Math. U. 91m

R

ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ

ΕΚ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΣΥΛΛΕΧΘΕΙΣΩΝ

ΥΠΟ Κ. Μ. ΚΟΥΜΑ

ΛΑΡΙΣΣΑΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

Περιέχων, τὴν Ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν, τὴν τοῦ Συμβολικοῦ Λογισμοῦ τῇ στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ προσεφαρμογὴν, Ἐπιτομὴν τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας, τὴν Ὑψηλοτέραν Γεωμετρίαν, εἴτ' οὖν τὰς τοῦ Κώνου τομὰς, καὶ τὰ περὶ τῶν ἄλλων καμπύλων, καὶ μέρος τοῦ Λογισμοῦ τῶν Ἀπειροστῶν.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗι ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΕΝΔΩΤΟΥ.

Α Ω Ζ.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΗΣ.

Τῶν ἐν τῷ Γ΄. Τόμῳ περιεχομένων.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Ε΄.

	Σελ.
Κεφάλαιον Α΄. Τριγωνομετρία ἐπίπεδος . . .	1
— — Β΄. Περὶ ἐπιλύσεως τῶν κατὰ τὰ τρίγωνα προβλημάτων	19

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ ς΄.

Κεφάλαιον Α΄. Περὶ γεωμετρικῆς κατασκευῆς τῶν συμβολ. ποσοτ.	25
— — Β΄. Γεωμετρικῶν προβλημάτων ἐπίλυσις διὰ τῦ συμβολ. λογ. . . .	37

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Ζ΄.

Κεφάλαιον Α΄. Περὶ Χωροςαθμίσεως	65
— — Β΄. Περὶ Πρακτικῆς Μηκομετρίας .	68
— — Γ΄. Περὶ Ἰχνογραφίας	74
— — Δ΄. Σύνοψις τῆς Ἐχυροποιΐας . .	79
— — Ε΄. Περὶ Χωρομετρίας	85
— — ς΄. Περὶ Πρακτικῆς Στερεομετρίας .	95

ΥΨΗΛΟΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Α΄.

Κεφάλαιον Α΄. Περὶ γενέσεως τῶν Κωνικῶν τομῶν	103
— — Β΄. Περὶ φύσεως τῶν Κωνικῶν τομῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγεγραμμένων .	110
— — Γ΄. Περὶ Παραβολῆς	112
— — Δ΄. Περὶ διαμέτρων τῆς Παραβολῆς .	121
— — Ε΄. Περὶ Ἐλλείψεως	130

Κεφάλαιον ϛ΄. Περὶ διαμέτρων τῆς Ἐλλείψεως . 143
— — Ζ΄. Περὶ τῆς ἐν τοῖς ὀπτικοῖς χρήσεως τῶν τῆς Ἐλλείψεως ἰδιοτήτων . 154
— — Η΄. Περὶ Ὑπερβολῆς 158
— — Θ΄. Περὶ τῶν Ἀσυμπτώτων τῆς Ὑπερβολῆς 168
— — Ι΄. Περὶ ὑπερβολικῶν λογαρίθμων . 172
— — ΙΑ΄. Περὶ ὑπερβολικῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων 181
— — ΙΒ΄. Περὶ διαμέτρων τῆς ὑπερβολῆς . 190
— — ΙΓ΄. Περὶ τῆς ἐν τῇ Διοπτρικῇ χρήσεως τῆς ὑπερβολῆς 200
— — ΙΔ΄. Περὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος 203
— — ΙΕ΄. Περὶ Κωνικῶν τομῶν παραθέσεως 208
— — Ιϛ΄. Περὶ ὁμοίων Κωνικῶν τομῶν . . 212
— — ΙΖ΄. Περὶ τȣ̃ λογισμȣ̃ τῶν ϛοῶν . . 215
— — ΙΗ΄. Περὶ Κωνικῶν τομῶν γενῶν ὑπερτέρων 217

ΥΨΗΛΟΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Β΄.

Κεφάλαιον Α΄. Περὶ Γεωμετρικῶν Καμπύλων . 225
— — Β΄. Περὶ Γεωμετρικῶν Τόπων . . . 231
— — Γ΄. Περὶ Ὑπερβατικῶν Καμπύλων . 271

ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜ. ΤΗΣ ΩΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΘΕΩΡΟΥΜ. ΠΟΣΟΥ. ΤΜΗΜΑ Α΄.

Κεφάλαιον Α΄. Περὶ τȣ̃, ὅπως τὰ ἀπειροϛὰ εὑρίσκωνται 290

		Σελ.
Κεφάλαιον Β΄.	Περὶ ἀπειροςῶν δευτέρων, τρίτων, κ.τ.λ.	298
— — Γ΄.	Περὶ τῶν κατὰ τὰ ἡμίτονα, συνημίτονα κ.τ.λ. ἀπειροςῶν . . .	303
— — Δ΄.	Περὶ λογαριθμικῶν ἀπειροςῶν .	306
— — Ε΄.	Περὶ ἀπειροςῶν τῶν κατὰ τὰς δεικτικὰς ποσότητας	311
— — ς΄.	Χρῆσις τῶν προεκτεθέντων κανόνων εἰς εὕρεσιν τῶν ἐν ταῖς καμπύλαις γραμμαῖς ἁπτομένων, ὑφαπτομένων κ.τ.λ.	312
— — Ζ΄.	Περὶ εὑρέσεως τῶν Ἀσυμπτώτων	332

ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ ΤΩΝ ΗΜΑΡΤΗΜΕΝΩΝ.

ΣΕΛΙΔΙ 5, ςίχῳ 7. Τῆς ὑπὸ ΖΚ, Γρ. Τῆς ὑπὸ ΖΚΓ. — Σελ. 6, ςίχ. 8, Τῷ συνημιτόνῳ, Γρ. Τȣ̃ συνημιτόνȣ. — Σελ. 9, ςίχ. 8. ϰ. 12. Γρ. ϰ. 2. — Σελ. 15. ςίχ. 10, Γρ. ϰ. 2. — ςίχ. 19 Γρ. ϰ. 5 — ςίχ. 22. Τῷ ΚΝ. Γρ. Τῆς ΚΝ. — Σελ. 50, ςίχ. 6 (452), Γρ. (552). — Σελ. 60, ςίχ. 2 Ἐπεικῶς, Γρ. Ἐπιεικῶς. — Σελ. 62, ςίχ. 6. (454), Γρ. (453). — Σελ. 104. ςίχ. 15. (ϰ 16) Γρ. (ϰ 61) — Σελ. 108. ςίχ. 2 Γρ. (ϰ. 65). — Σελ. 114. ςίχ. 29 (348), Γρ. (Γεωμ. 348). — Σελ. 129, ςίχ. 7. Κατὰ, Γρ. Μετά. — Σελ. 145. ςίχ. 2. (299) Γρ. (248). — Σελ. 153. ςίχ. 21. (452) Γρ. (456) — Σελ. 157. ςίχ. 21. (131) Γρ. (Γεωμ. 131). — Σελ. 166. ςίχ. 1, εγ. Γρ. γε — ςίχ. 4 (156). Γρ. (160). — Σελ. 177. ςίχ. 18. (330). Γρ. (332). — Σελ. 195. ςίχ. 13. Γρ. ϰ. 101. — Σελ. 201. ςίχ. 21. (180). Γρ. (160). — Σελ. 212. ςίχ. 3 (243) Γρ. (253). — Σελ. 236. ςίχ. 28 (191) Γρ. (192). Σελ. 267 ςίχ. 18. ἐνάριϑμοι, Γρ. εὐάριϑμοι. — Σελ. 273. ςίχ. 23 Ἀποτετμημένη ΑΗ, Γρ. Τεταγμένη ΑΗ — ςίχ. 24 Αἱ ἀποτετμημέναι = 2, = 4 κτ. Γρ. Αἱ ἀποτετμημέναι = 1, = 2, κτ, ϗ ἠγέρϑωσαν αἱ τεταγμέναι = 2, = 4, κτ. — Σελ. 293. ςίχ. 17, $\pi\chi^{\pi+1}$, Γρ. $\pi\chi^{\pi-1}$. — Σελ. 295. ςίχ. 7. Τῆς ȣ̃ν π. Γρ. Τῆς ȣ̃ν Π. — Σελ. 302. ςίχ. 11, Μεινȣμένη, Γρ. Μειȣμένη. — Σελ. 314, ςίχ. 16, Τȣ̃ § 20, Γρ. Τȣ̃ § 273.



Σ Ε Ι Ρ Α
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Α Σ
ΤΜΗΜΑ ΠΕΜΠΤΟΝ
Τριγωνομετρία ἐπίπεδος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.
Ἔκθεσις τῶν ἐν αὐτῇ ἐξετάζεσθαι εἰωθότων.

480 ΟΡΙΣΜΟΣ. Τριγωνομετρία καλεῖται ἡ τὸ πρόβλημα τόδε ἐπιλύουσα ἐπιστήμη „παντὸς τριγώνου, „τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας ἀναγκαίως περιέχοντος, „ἐὰν τρία τούτων τῶν ἓξ δοθῶσιν, ἐν οἷς ὑπάρχοι καὶ μία „τῶν πλευρῶν, εὑρεῖν τἄλλα τρία.“

481. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀναγκαίως δὲ τῶν γνωστῶν ὑπ-

άρχειν καὶ μίαν τῶν πλευρῶν ὁ ὁρισμὸς ἀπαιτεῖ, ὅτι ἀπειράριθμα τρίγωνα ὅμοια ὑπάρχειν δύνανται, ὧν αἱ γωνίαι ἴσαι ἑκάςη ἑκάςῃ· ἐὰν ἓν μὴ ᾖ ἐν τοῖς δεδομένοις καὶ μία τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, ἄδηλον ἔςαι, τίνος τῶν ἀπείρων ὁμοίων τριγώνων τὴν λύσιν θηρώμεθα.

482. ΟΡΙΣΜΟΣ. Γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΚΔ, ϗ τȣ̃ τόξȣ ὡσαύτως ΖΔ (σχ. 1), τȣ̃ τὴν γωνίαν ταύτην καταμετρȣ̃ντος, ἡμίτονον κοινῇ ἀκȣ́ει κάθετος, ἀγομένη ἀπὸ τȣ̃ Ζ πέρατος τῆς τε ἑτέρας πλευρᾶς ΖΚ ϗ τȣ̃ τόξȣ ΔΖ ἐπὶ τὴν ἑτέραν ΔΚ.

483. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΚΔ ἡμίτονον ΖΠ τὸ ἥμισύ ἐςι τῆς ΖΠκ χορδῆς, ἥτις ὑποτείνει τὸ ΖΔκ τόξον, ὅ ἐςι διπλȣ̃ν τȣ̃ τὴν γωνίαν ταύτην μετρȣ̃ντος ΔΖ τόξȣ· ἡ γὰρ ΚΔ ἀκτὶς κάθετος ἐφέςηκε τῷ ΖΠ ἡμιτόνῳ (72)· ἄρα (157) ΖΠ = Πκ. Τὸ ἄρα γωνίας τινὸς ἡμίτονον ἥμισύ ἐςι χορδῆς τόξȣ, ὅ ἐςι διπλȣ̃ν τȣ̃ τὴν γωνίαν ταύτην μετρȣ̃ντος.

484. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐπεὶ ἄρα ά. τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας, καὶ τȣ̃ αὐτὴν μετρȣ̃ντος τόξου, ἐςὶ ταὐτὸν (482)· β΄. τὸ ἡμίτονον ἁπάσης γωνίας ἐςὶν ἥμισυ τῆς τόξον διπλȣ̃ν τȣ̃ τὴν γωνίαν ταύτην μετρȣ̃ντος ὑποτεινȣ́σης χορδῆς (483)· τέλος δὲ, ἐπεὶ τὰ ἡμίση πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ὡς τὰ ὅλα (Συμβ. Λογ. 234)· ἐντεῦθεν ἄρα, ἃ ταῖς χορδαῖς παραβαλλομέναις πρὸς τὰ ὑποτεινόμενα τόξα δέδεικται, ἔξεςαι ἀπονεμηθῆναι τὰ αὐτὰ ϗ τοῖς ἡμιτόνοις, παραβαλλομένοις πρὸς τὰς ἑαυτῶν γωνίας, ἢ τὰ καταμετρȣ̃ντα ταύτας τόξα· ἐκȣ̃ν,

485. ά. Τὰ ἡμίτονα τῶν μεταξὺ ἐλαχίςȣ τόξȣ $= 0$, ϗ τόξȣ $= 90°$ κειμένων τόξων συναύξȣσι τοῖς τό-

ξοις· καὶ γὰρ αἱ μὲν χορδαὶ αὔξȣσι μέχρι τῶν 180° (50)· τὰ δὲ ἡμίτονα ἀντιςοιχȣ͂σι τοῖς ἡμίσεσι τόξοις, τοῖς ὑποτεινομένοις ὑπὸ τȣ́των τῶν χορδῶν (483)· φθίνȣσι δὲ αἱ χορδαὶ, τῶν τόξων ἀπὸ 180° ἐς 360° αὐξομένων (52)· φθίνȣσιν ἄρα ϗ τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν, αὐτῶν αὐξομένων ἀπὸ 90° ἐς 180° (53).

486. β΄. Ἡ ἄρα ἀκτὶς ΒΚ τὸ πάντων μέγιςόν ἐςιν ἡμίτονον, ἐπανῆκον ὀρθῇ γωνίᾳ τῇ ΒΚΔ, ἢ 90°· ἐντεῦθεν ἄρα ἡ ἀκτὶς ὁ λ ι κ ὸ ν ἀποκαλεῖται ἡ μ ί τ ο ν ο ν, ϗ ὑποτίθεται = 1 σὺν ὅσοισδήποτε μηδενικοῖς, φέρ' εἰπεῖν δέκα, τȣτέςιν ὑποτίθεται = 10000000000· ταὐτὸν εἰπεῖν, διῃρημένη εἰς μοίρας ἰσαλλήλȣς δέκα διλλιονίων· αἱ δ' ἐν τῷ κύκλῳ ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ λόγον, ὃν ἔχȣσι πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἔσονται πλείω, ἢ ἐλάττω, μέρη τῶν δέκα διλλιονίων.

Ἡ ἀκτὶς, ἢ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, σημαίνεται ἀεὶ διὰ τȣ͂ Η, ὃ δηλοῖ ἡμιδιάμετρον.

487. γ΄. Ὥσπερ αἱ χορδαὶ (54), ȣ̔́τω ϗ τὰ ἡμίτονα ȣ̓κ ἀναλόγως αὐξομένοις τοῖς τόξοις, ἢ ταῖς γωνίαις, συναύξονται· ἐπεὶ ἥμισῃ τῶν χορδῶν εἰσι τὰ ἡμίτονα.

488. Ἀόριςον μέν ἐςι τὸ μῆκος τῶν ἁπτομένων, ἃς κατείδομεν (148, κτ)· ἐνταῦθα δὲ καλεῖται ἁ π τ ο μ έ ν η, ἡ κάθετος ἡ ἐπὶ τȣ͂ πέρατος Δ τῆς ἀκτῖνος, ἥτις ἐςὶν ἡ ἑτέρα τῶν τῆς ΔΚΖ γωνίας πλευρῶν, προαγομένη, μέχρις ἂν συναντήσῃ τῇ ἀκτῖνι ΚΖ, ἐκβληθείσῃ ἐς τὸ Η, ἥτις ἐςὶν ἁτέρα τῶν πλευρῶν τῆς ΔΚΖ γωνίας· ἡ δὲ ἀκτὶς αὕτη προαγομένη, ἕως ȣ̓ συναντήσῃ τῇ ἁπτομένῃ, τȣτέςιν ἡ ΚΖΗ, καλεῖται τ έ μ ν ȣ σ α.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ ΖΚΒ γωνία τοῦ παραπληρω-

ματος τῆς ΖΚΔ ά. ἡμίτονον μὲν ἑαυτῆς ἔχει τὴν ΖΤ κάθετον, καθειμένην ἀπὸ τȣ̃ Ζ πέρατος τῆς ΖΚ πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ΒΚ ἀκτῖνα. ἥτις ἐςὶν ἡ ἑτέρα πλευρὰ ταύτης τῆς γωνίας· β΄. ἁπτομένη δ᾽ αὐτῆς ἐςιν ἡ ΒΟ· γ΄. τέμνȣσα δὲ ἡ ΚΖΟ.

489. Τὸ δὲ ΖΤ ἡμίτονον τῆς ΖΚΒ γωνίας Συνημίτονον ὀνομάζεται τῆς ΖΚΔ· τȣ̓ναντίον δὲ τὸ ΖΠ ἡμίτονον τῆς ΖΚΔ συνημίτονον καλεῖται τῆς ΖΚΒ παραπληρώματος τῆς ΖΚΔ· ταὐτὰ ῥητέον ϗ περὶ τῆς ἁπτομένης ϗ τῆς τεμνȣ́σης· εἰς δὲ συντομίαν γράφονται· συνημ. συναπτ. συνδιατ. ȣ̓κȣ̃ν συνημίτονον τῆς ΖΚΔ γωνίας ἐςὶν ἡ ΖΤ, συναπτομένη δὲ αὐτῆς ἡ ΒΟ, συνδιατέμνȣσα δὲ ἡ ΚΟ.

Τἀνάπαλιν δὲ τῆς ΒΚΖ γωνίας συνημ. ΖΠ, συναπτ: ΔΗ, συνδιατ. ΚΗ.

490. Ἥτε ἁπτομένη ϗ ἡ τέμνȣσα ταῖς γωνίαις συναύξȣσιν ἀπὸ ο μέχρις 90°· ἀλλὰ τηνικαῦτα ἡ ἁπτομένη, τῇ τεμνȣ́σῃ γινομένη παράλληλος, ȣ̓δέποτε αὐτῇ συμπεσεῖται· τῆς ȣ̃ν 90° γωνίας ἥτε τέμνȣσα ϗ ἡ ἁπτομένη εἰσὶν ἄπειροι.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπείπερ ὀρθῆς γωνίας ἡ ἁπτομένη ϗ ἡ τέμνȣσα ȣ̓δαμȣ̃ πραγματικῶς συνίασιν· ὥριςαι δὲ ἁπτομένη ἡ τῇ ΔΚ ἀκτῖνι κάθετος, ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τȣ̃ πέρατος τῆς ἀκτῖνος, ϗ τȣ̃ σημείȣ, καθ᾽ ὃ συναπαντᾷ τῇ τεμνέσῃ, ἔξεςαι εἰπεῖν, ὡς αὗται αἱ δύω εὐθεῖαι, γωνίᾳ ἐπανήκȣσαι ὀξείᾳ, βραχύτι διαφερȣ́σῃ ὀρθῆς, προσέλαβον ἅπασαν τὴν δυνατὴν αὐτῶν αὔξησιν· προσεθέντος ἀλλ᾽ ȣ̃ν τῇ ὀξείᾳ τῇδε γωνίᾳ τȣ̃ βραχέος ἐκείνȣ, ᾧ ἐνέδει ὀρθῆς, κἀκ τȣ́τȣ τῆς γωνίας καθιςαμένης ὀρθῆς, ἥτε ἁπτομένη ϗ ἡ τέμνȣσα, ἀποβάλλȣσαι τὸ ἀλλήλαις

συνιέναι, τὸ εἶναι συναποτίθενται, εἴτ' ἂν μεδενὶ ἴσαι γίνονται· ἄλλο τετὶ ὑπόδειγμα, τῦ ποσότητα ἅπασαν ἐξυθενῦσθαι μετὰ τὸ προσκτήσασθαι ἅπασαν τὴν δυνατὴν ἑαυτῆς αὔξησιν, ἢ, ὡς εἰώθασι λέγειν, μετὰ τὸ γενέσθαι μεγίςην, εἰ πρὸς ταύτῃ τῇ μεγίςῃ αὐξήσει κἂν ἐλάχιςόν τι προσεπιτεθείη (76).

491. ΠΟΡΙΣΜΑ. Γωνίας ἀμβλείας τῆς ὑπὸ ΖΚ ἡμίτονόν ἐςι τὸ τῆς ὀξείας ΖΚΔ, ἥτις τῇ εἰρημένῃ ἀμβλείᾳ ὑπάρχει ἀναπλήρωμα (211)· τῦτὶ δὲ ἔςιν, ὅτι τόξον τὸ ΖΓκ $>$ 180° χορδὴν ἔχει τὴν τῦ τόξυ ΖΔκ, ὃ μετὰ τῦ προτέρυ παρέχει 360° (46), ϗ ὅτι τὸ ἡμίτονον τὸ ἥμισύ ἐςι τῆς χορδῆς ταύτης (483).

Ἕπεται δὲ τῦτο ϗ ἐκ τῦ ὁρισμῦ τῦ ἡμιτόνυ· ϗ γὰρ τὸ ἡμίτονόν τῆς ΖΚ γωνίας ὀφείλει εἶναι κάθετος, ἀπό τινος πλευρᾶς τῆς ΖΚ τῦ πέρατος Ζ καθειμένη ἐπὶ τὴν ΚΓ πλευρὰν (482)· ἀλλαμὴν ἀπὸ τῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΠΚΓ εὐθεῖαν μία μόνη κάθετος ἄγεται ἡ ΖΠ (116)· ἄρα ἡ ΖΠ, ἥτις ἡμίτονόν ἐςι τῆς ὀξείας γωνίας ΖΚΠ ἡ αὐτὴ ἔςαι ἡμίτονον ϗ τῆς ἀμβλείας γωνίας ΖΚΓ· ἵνα ἄρα εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον γωνίας = 110° φέρ' εἰπεῖν, ἀφαιρετέον 110° ἀπὸ 180°, τὸ δὲ κατάλοιπον 70° ἔςαι τὸ ἡμίτονον τῆς 110° ἀμβλείας γωνίας.

492. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡμίτονον πλάγιον καλεῖται τῦ ΔΖ τόξυ, ἢ τῆς ὑπὸ ΖΚΔ γωνίας, μέρος τῆς ἀκτῖνος τὸ ΔΠ, ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ΔΖ περιφερείας, ϗ τῦ ΖΠ ἡμιτόνυ, ὃ παραβαλλόμενον πρὸς τὸ ΔΠ ὀνομάζεται ἡμίτονον ὀρθόν.

493. Ἡμεῖς ἀλλ' ἂν ἐνταῦθα περὶ μόνυ τῦ ὀρθῦ ἡμιτόνυ διαληψόμεθα, ὡς βάσεως ὄντος, ἢ θεμελίυ, τῦ τριγωνομετρικῦ λογισμῦ· ἀλλ' ὐκ ἔςιν ὅπως ἀχρῆςον

πάμπαν φήσομεν τὴν τῦ πλαγίυ ἡμιτόνυ γνῶσιν· ἡ γὰρ θεωρία τῶν διαφόρων τῆς Φυσικῆς εἰδῶν τὰ πολλὰ φέρει εἰς τὰς τῦ πλαγίυ ἡμιτόνυ ἰδιότητας, ϛὼ δείξομεν ἐν τοῖς ἐφεξῆς.

494. Ἀλλὰ τϐτὶ ἡμῖν μόνον τὸ 1 χῆμα χαρίζεται· ἐπὶ αὐτῦ γὰρ ῥᾷϛα πᾶς ἄντις ἀναγνοίη, ὅτι τὸ πλάγιον ἡμίτονον ἴσον ἐϛὶ τῇ ἀκτῖνι ἢ τῷ ὁλικῷ ἡμιτόνῳ πλὴν τῦ ΠΚ = ΖΤ, εἴτ' ἶν τῷ συνημιτόνῳ διὰ τὸ ΖΤΠΚ παραλληλόγραμμον.

Ἵν' ἶν εὑρεθῇ τὸ πλάγιον ἡμίτονον ΔΠ τόξυ τῦ ΔΖ = 60° φέρ' εἰπεῖν, ζητηθήτω ἐν τοῖς πίναξι τὸ ἡμίτονον τόξυ τῦ ΖΒ = 30° ὃ ἐϛὶ τῦ 60° τὸ παραπλήρωμα, ϗ παρίϛαται διὰ ΖΤ = ΠΚ· ϗ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῆς ΔΚ ἀκτῖνος, εἴτ' ἶν ἀπὸ 1000000000· τὸ δὲ κατάλοιπον ἔϛαι τὰ πλάγιον ἡμίτονον ΔΠ.

495. Ἐπεὶ τὸ πάσης γωνίας ἡμίτονον ἥμισύ ἐϛι τῆς χορδῆς, ἥτις ὑποτείνει τόξον διπλῦν τῦ ταύτην τὴν γωνίαν μετρῦντος· ἡ δ' ὑποτείνυσα τόξον 60° ἴση ἐϛὶ τῇ ἀκτῖνι (252)· ἐντεῦθεν ἄρα τὸ γωνίας = 30° ἡμίτονον ἴσον ἐϛὶ τῷ ἡμίσει τῆς ἀκτῖνος.

496. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Παντὸς τριγώνυ τῦ ΑΒΓ (σχ. 6.) τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ὑπ' αὐτὰς ὑποτεινύσαις πλευραῖς.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὸ ἡμίτονον ἐϛὶν ἥμισυ χορδῆς ὑποτεινύσης τόξον διπλῦν τῦ τὴν γωνίαν τῦ ἡμιτόνυ τύτυ μετρῦντος (483)· ἀλλ' ἑκάϛη πλευρὰ ΒΓ ἐϛὶ χορδὴ τόξυ διπλασίυ τῦ τὴν ὑποτεινομένην γωνίαν Α μετρῦντος (201)· τὸ ἄρα γωνίας ἁπάσης ἡμίτονον ἥμισύ ἐϛι τῆς αὐτὴν ὑποτεινύσης πλευρᾶς· ἀλλὰ τὰ ἡμίση ἀνάλογόν εἰσι τοῖς ὅλοις (Συμβ. λογ. 234.)· ἄρα τὰ τῶν γωνιῶν ἡμίτονα

ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ὑπ᾽ αὐτὰς ὑποτεινέσαις πλευραῖς· Ο. Ε. Δ.

497. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Τριγώνε ὀρθογωνίε τῦ ΑΒΓ (σχ. 7.) ἡ πρὸς τῇ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ πλευρὰ ΑΓ ἐςὶ πρὸς τὴν ἑτέραν ΒΓ· ὡ ἡ ἀκτίς ΑΓ (*) πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς Α ὀξείας γωνίας ΒΓ· ὃ καθ᾽ ἑαυτὸ πρόδηλον.

498. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἡ ἀπτομένη γωνίας $=45^\circ$ ἐςὶν ἴση τῇ ἀκτῖνι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ὀρθογωνίε γὰρ τριγώε τῦ ΚΔΗ (σχ. 1), τῆς Κ ὔσης $=45^\circ$, ἔςαι καὶ Η $=45^\circ$ (212)· τριγώνου τοίνυν τῦ ΚΔΗ ὄντος ἰσοσκελῦς (221), ἔςαι ἡ ΔΗ ἀπτομένη ἴση τῇ ἀκτῖνι ΚΔ. Ο. Ε. Δ.

499. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Τριγώνε ἰσοσκελῦς, ἢ σκαληνῦ, τὸ ἄθροισμα δυεῖν πλευρῶν ἀνίσων πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν λόγον ἔχει, ὃν ἡ ἀπτομένη τῦ ἡμιαθροίσματος τῶν δύω γωνιῶν, ἃς ὑποτείνεσιν αἱ ῥηθεῖσαι πλευραὶ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς αὐτῶν ἡμιδιαφορᾶς.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. α΄. Προήχθω ἡ ΑΟ (σχ. 8.), ὥςε γενέσθαι ΟΠ $=$ ΟΖ, ϗ ἑπομένως ΑΠ $=$ ΑΟ $+$ ΟΖ· ὐκῦν γωνία ἡ ὑπὸ ΖΟΠ $=$ Α $+$ Ζ (216), ἀθροίσματι τῶν γωνιῶν, ἃς ὑποτείνεσιν αἱ ΑΟ, ΟΖ πλευραί· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΖΟΠ ἰσοσκελές ἐςιν, ἐκ κατασκευῆς· ἄρα (217) ἣν ἀχθῇ κάθετος ἡ ΟΔ δίχα τεμεῖ τὴν ὑπὸ ΖΟΠ γωνίαν· ἄρα

$$\text{ἡ ὑπὸ } ΔΟΠ = \frac{ΖΟΠ}{2} = \frac{Α + Ζ}{2}.$$

β΄. Κέντρῳ τῷ Ο, ϗ διαςήματι τῷ ΟΔ, γεγράφθω

(*) Ἡ ΑΓ ἀκτίς ἐςι κύκλε τῦ ΓΟ, γεγραμμένε περὶ τὸ Α ὡς περὶ κέντρον.

τόξον τὸ ΔΓΗ μετρεῖν τὴν ὑπὸ ΔΟΠ γωνίαν, ἴσην τῇ $\frac{A+Z}{2}$. οὐκοῦν ἡ ΔΠ, οὖσα ἁπτομένη τῆς ὑπὸ ΔΟΠ γωνίας (488), ἔσαι καὶ τῆς $\frac{A+Z}{2}$.

γʹ. Ἀχθείσης παραλλήλου τῆς ΟΓ παρὰ τὴν ΑΖ, ἔσαι ἡ ὑπὸ ΓΟΠ = Α (132)· οὐκοῦν ἡ Ζ = ΖΟΠ — ΓΟΠ, εἴτ' οὖν — Α, = ΖΟΓ· ἄρα ἡ μείζων Ζ ἴση ἐσὶ τῷ ἡμιαθροίσματι αὐτῶν σὺν τῇ ἡμιδιαφορᾷ (Συμβ. λογ. 442.)· ἡμιδιαφορὰ δὲ αὐτῶν ἐσὶν ἡ ὑπὸ ΔΟΓ γωνία, ἧς ἁπτομένη ἐσὶν ἡ ΔΓ·

δʹ. Ἀχθεισῶν τῶν ΤΔ καὶ Ββ παραλλήλων τῇ ΑΖ, ἐπεὶ ΖΔ = ΔΠ (217) ἔσαι (313) καὶ ΑΤ = ΤΠ, καὶ (Συμβ. λογ. 442) ΤΟ ἔσαι ἡμιδιαφορὰ τῶν ΑΟ, ΟΖ· δεικτέον οὖν ὡς ἔσιν ΑΠ : 2ΤΟ :: ΔΠ : ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπείπερ ΟΓ παράλληλός ἐσι τῇ ΤΔ, τῇ Ββ, ἔσι ΤΠ : ΔΠ :: ΤΟ : ΔΓ (313)· οὐκοῦν καὶ (Συμβ. λογ. 242.) ΤΠ : ΤΟ :: ΔΠ : ΔΓ, ἔνθεν διπλασιασμῷ τοῦ πρώτου λόγου (Συμβ. λογ. 246) 2ΤΠ : 2ΤΟ : ΔΠ : ΔΓ, ἢ ΑΠ : 2ΤΟ :: ΔΠ : ΔΓ. Ο. Ε. Δ.

500. ΘΕΩΡΗΜΑ Εʹ. Παντὸς σκαληνοῦ τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο λοιπῶν ἐσὶν, ὡς ἡ διαφορὰ τῶν δύο λοιπῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τμημάτων, ἃ τέμνονται ὑπὸ καθέτου τῇ μείζονι πλευρᾷ καθιεμένης ἀπὸ τῆς, ἣν αὕτη ὑποτείνει, γωνίας.

ΔΕΙΞΙΣ. Κέντρῳ μὲν τῷ Β (σχ. 9) διασήματι δὲ τῷ ΒΕ γεγράφθω ἀπέραντον τόξον τὸ Ο Ε Τ καὶ προήχθω ἡ ΒΓ μέχρι τοῦ Τ· οὐκοῦν ἔσαι ΒΤ = ΒΕ, = ΒΟ (45)· ἄρα ἡ ΓΟ διαφορά ἐσι τῶν ΒΓ, ΒΕ· ἐπεὶ δὲ ἡ ΒΔ κάθ-

ετος ἐφέςηκε τῇ ΗΕ χορδῇ, ἄρα ΗΔ=ΔΕ (157.)· ἄρα ΓΗ ἐςὶν ἡ διαφορὰ τῶν τῆς μεγάλης πλευρᾶς ΓΕ τμημάτων ΓΔ, ΔΕ, ἃ τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΔ καθιεμένης ἀπὸ τῆς, ἣν ὑποτείνει ἡ μεγάλη πλευρὰ, γωνίας· ἀλλαμὴν (330) ΛΕ : ΓΤ :: ΓΟ : ΓΗ· ἄρα κτλ. Ο. Ε. Δ.

501. ΘΕΩΡΗΜΑ ϛʹ. Αʹείποτε ὑπάρχουσιν αἱ ἑξῆς ἀναλογίαι· ά. ἡ ἀκτὶς πρὸς τὸ συνημίτονον τόξου (σχ. 12), ὥσπερ ἡ ἁπτομένη τοῦ αὐτοῦ τόξου πρὸς τὸ αὐτοῦ ἡμίτονον, εἴτ' οὖν Η : σύνημ :: ἁπ : ἡμ· βʹ. Η : ἡμιτ :: συναπ : συνημ· γʹ. ἁπ. : Η :: Η συναπ.

ΔΕΙΞΙΣ. Εʹπεὶ γὰρ ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα ΚΔΒ, ΚΑΝ διὰ τὰς παραλλήλους ΒΔ, ΑΝ· ἄρα ΚΑ : ΚΔ :: ΑΝ : ΒΔ, εἴτ' οὖν Η : συνημ :: ἁπ : ἡμιτ· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Τὰ τρίγωνα ΗΚΜ, ΙΚΒ εἰσὶν ὅμοια· ἄρα Η = ΗΚ : ΙΚ=ΔΒ=ἡμ :: ΗΜ (συναπ. τοῦ ΒΑ) : ΙΒ (συνημ τοῦ ΒΑ), εἴτ' οὖν Η : ἡμ :: συναπ : συνημ· ὅπερ ἦν τὸ βʹ.

Τὰ τρίγωνα ΗΚΜ, ΝΚΑ ἔχουσιν ἑκάτερον μίαν γωνίαν ὀρθὴν, τὸ μὲν τὴν πρὸς τῷ Η, τὸ δὲ τὴν πρὸς τῷ Α, καὶ τῶν ΚΑ, ΗΜ παραλλήλων οὐσῶν, ἡ πρὸς τῷ Μ γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ ΝΚΑ· εἰσὶν ἄρα ὅμοια· διὸ ΝΑ : ΚΑ :: ΗΚ : ΗΜ, εἴτ' οὖν ἁπτ : Η :: Η : συναπ = $\frac{\text{Η Η}}{\text{ἁπ}}$

502. ΠΟΡΙΣΜΑ Αʹ. Αʹρα αʹ. ἡμιτ = $\frac{\text{ἁπ} \times \text{συνημ}}{\text{Η}}$

β΄. $\sigma\upsilon\nu\eta\mu = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi \times \eta\mu\iota\tau}{H}$. γ΄. $\alpha\pi = \frac{H^2}{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi\tau}$. δ΄. ὑποτιθεμένης $H = 1$ ἡ πρώτη ἐξίσωσις προβάλλει $\eta\mu\iota\tau = \alpha\pi\tau \times \sigma\upsilon\nu\eta\mu$, ἢ $\alpha\pi\tau = \frac{\eta\mu}{\sigma\upsilon\nu\eta\mu}$. έ. ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εὐμαρῶς ἀποφέρεται $\sigma\upsilon\nu\alpha\pi\tau = \frac{\sigma\upsilon\nu\eta\mu}{\eta\mu} = \frac{1}{\alpha\pi\tau.}$, ὁ γὰρ τρίτος τύπος προβάλλει $\sigma\upsilon\nu\alpha\pi = \frac{H\,2}{\alpha\pi\tau.} = \frac{1}{\alpha\pi\tau}$.

ϛ΄. ἐκ τῆς $\sigma\upsilon\nu\alpha\pi = \frac{1}{\alpha\pi}$, πρόεισι συναπ. α × ἀπ α = 1 = συναπ β × ἀπτ. β, τῶν α, β τόξα, ἢ γωνίας σημαινόντων· ἐὰν δ' ἐν τῷ τετάρτῳ τύπῳ ἀντικατασαθῇ ἡ δύναμις $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi}$ τῆς ἁπτομένης, πορισθήσεται πολλαπλασιασμῷ ἐπὶ συνημ. ὁ τύπος $\eta\mu = \frac{\sigma\upsilon\nu\eta\mu}{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi\tau}$· ἀντικατασάντος δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ τύπῳ τοῦ $\frac{1}{\alpha\pi\tau}$ ἀντὶ τῆς συναπτομένης (ὑποτιθεμέμης ἀεὶ $H = 1$), πορισθήσεται $\sigma\upsilon\nu\eta\mu = \frac{\eta\mu}{\alpha\pi\tau}$.

503. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐκ τοῦ τρίτου τύπου τοῦ ἐκτεθέντος ἤδη πορίσματος, εἴτ' οὖν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\pi = \frac{H^2}{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi\tau}$ δῆλον, ὡς, εἰ προκέοιντο δύω τόξα α καὶ β, εὑρεθήσεται $\alpha\pi.\,\alpha : \alpha\pi.\,\beta :: \frac{H^2}{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi.\,\alpha} : \frac{H^2}{\sigma\upsilon\nu\alpha\pi.\,\beta}$· ἢ (ἐπεὶ τὰ τὸν

αὐτὸν ἀριθμητὴν ἔχοντα κλάσματα εἰσὶν ἐν λόγῳ (Συμβ. λογ. 261) ἀντιςρόφῳ τῶν παρονομαςῶν)· ἁπ. α : ἁπ. β :: συναπ. β : συναπ. α, τῦτ' ἔςιν αἱ ἁπτόμεναι ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ εἰσὶ τῶν συναπτομένων· αὐτὸ δὲ τῦτο ϗ ὕτω δειχθήσεται· ἐκ τῦ προλαβόντος θεωρήματος ἔςιν ἁπ. : η :: η : συναπ· ἄρα απ. α × συναπ. α $=$ η², ϗ ἁπ. β × συναπ. β $=$ η²· ἄρα απ. α × συναπ α $=$ απ. β × συναπ. β. ἄρα ἁπ. α : ἁπ. β :: συναπ. β. συναπ. α.

504. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄ Δοθέντος τῦ ἡμιτόνυ ΑΖ, τόξυ τῦ ΑΜ εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον τόξυ διπλασίυ τῦ ΑΜΒ. (Σχ. 3.).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθω ΒΔ κάθετος τῇ ΚΑ, ϗ ἐκ τῦ Κ σημείυ κάθετος ἡ ΚΜ κατὰ τὸ μέσον Ζ τῆς χορδῆς ΒΑ. γνωςῆς δὲ ὕσης τῆς ΑΖ, γνωςὴ ἔσεται ϗ ἡ αὐτῆς διπλασία ΑΒ· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΚΖΑ, ΒΔΑ, ἔχοντα γωνίαν κοινὴν τὴν πρὸς τῷ Α, ϗ μίαν ἔτι ὀρθὴν, εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ΚΑ : ΚΖ :: ΒΑ : ΔΒ· τῦτ' ἔςιν· η : συνημ. τοῦ δοθέντος τόξου : 2 ἡμ τοῦ αὐτοῦ τόξου : ἡμ τοῦ διπλοῦ.

505. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ὑποτέθειται γνωςὸν τὸ συνημίτονον ΚΖ· τῦ γὰρ ἡμιτόνυ ΑΖ γνωςῦ ὄντος, δῆλον ὅτι διὰ τῆς ἰδιότητος τῦ ὀρθογωνίυ τριγώνυ ΚΖΑ ἔςι $ΚΖ = \sqrt{(ΚΑ^2 - ΖΑ^2)}$, εἴτ' ὖν $συνημιτ = \sqrt{(η^2 - ἡμ^2)}$, „τῦτ' ἔςιν ὅταν δοθέντος μὲν τῦ ἡμιτόνυ ζητῆ„ται τὸ συνημίτονον, τῦ τετραγώνυ τῦ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος „ἀφαιρετέον τὸ ἀπὸ τῦ ἡμιτόνυ τετράγωνον, ϗ τῦ κα„ταλοίπου ἐξακτέον ῥίζαν τὴν τετραγώνειον· δοθέντος „δὲ τοῦ συνημιτόνου, ζητῆται τὸ ἡμίτονον, ἀφαιρετέον

„τὸ ἀπὸ τοῦ συνημιτόνου τετράγωνον ἀπὸ τοῦ τῆς ἀ-
„κτῖνος, ϗ ἐκ τȣ̃ καταλοίπȣ ληπτέον ῥίζαν τὴν τετρα-
„γώνειον.“

506. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Βȣλομένοις δὲ εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον τόξȣ ὑποδιπλασίȣ τȣ̃ ΑΜ, δεδομένȣ ἤδη τȣ̃ ἡμιτόνȣ ϗ τȣ̃ συνημιτόνȣ τόξȣ διπλασίȣ τȣ̃ ΑΒ ληπτέον αὐτὸ ἐκ τῆς ἰδιότητος τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ $BA^2 = BΔ^2 + ΔA^2$, ἢ $BA^2 = ημ^2\, α + παρημ.^2\, α$, ὑποτιθεμένοις α τὸ διπλάσιον τόξον· ἄρα $BA = \sqrt{(ημ^2.α + παρημ^2.\, α)}$ ϗ $AZ = \frac{BA}{2} =$ ἡμ. τȣ̃ ὑποδιπλασίȣ τόξȣ $= \frac{1}{2}\sqrt{(ημ^2.\, α + παρημ^2.\, α)}$· γνωσθέντος δὲ τȣ̃ ἡμιτόνȣ, γνωσθήσεται ῥᾶστα τό, τε συνημίτονον, ϗ τὸ παρημίτονον ΔΑ, ὅπερ ἐστὶν = ΚΑ — ΚΔ (494).

507. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Δοθέντων τῶν δυοῖν τόξοιν ἡμιτόνων, εὑρεῖν τὰ ἡμίτονα τȣ̃τε ἀθροίσματος, ϗ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς. (Σχ. 4.).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΔΛ = β, ΑΛ = α· δῆλον ȣ̃ν ὅτι ΔΞ ἐστὶν ἡμίτονον τȣ̃ ΑΔΒ τόξȣ ἀθροίσματος τῶν δύω· ἐὰν δὲ ληφθῇ ΛΒ = ΔΛ, τὸ βχ ἡμίτονον τȣ̃ ΑΛ — ΒΛ, ἢ τȣ̃ ΑΛ — ΔΛ, ἔσται τὸ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς· γινωσκομένων τῶν ἡμιτόνων τȣ̃ α ϗ β, γινώσκεται ϗ τὰ αὐτῶν συνημίτονα (505)· ἐκ δὲ τῶν σημείων Δ, Λ, Β κατήχθωσαν κάθετοι τῇ ΚΑ, ϗ ἐκ τȣ̃ Β κάθετος τῇ ΔΞ ἡ ΒΠ, ϗ ἐκ τȣ̃ Ο μέσȣ τῆς χορδῆς ΔΒ αἱ κάθετοι ΟΘ, ΟΜ· ἀχθεῖσα δὲ ἡ ΚΟ, ἐπεὶ διήκει διάτε τȣ̃ κέντρȣ, ϗ τȣ̃ μέσȣ τῆς χορδῆς ΔΒ, ἀναγκαίως ἐφεστήξει αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς (164)· διὰ δὲ τὰς παραλλήλȣς ΠΒ, ΘΟ αἱ εὐθεῖαι ΔΠ, ΔΒ ἀναλόγως τμηθήσονται κατάτε τὸ

Θ ϗ τὸ Ο (318)· ἀλλὰ μὴν ΔΒ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ο· ἄρα ΔΠ δίχα κατὰ τὸ Θ, ϗ ΔΘ = ΘΠ· ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΛΝ, ΚΟΜ πρόεισι ΚΛ : ΚΟ :: ΛΝ : ΟΜ, ἢ η : συνημ. β :: ἡμ. α : ΟΜ = $\frac{\text{ἡμ. α} \times \text{συνημ. β}}{\eta}$: ἐπεὶ δὲ ϗ τὰ τρίγωνα ΚΛΝ, ΔΘΟ ὅμοια, ὡς ἔχοντα ἐκ κατασκευῆς ἁπάσας τὰς πλευρὰς καθέτους ἀλλήλαις (220. Πορ. Γ), ἄρα ΚΛ : ΚΝ :: ΔΟ : ΘΔ, εἴτ' οὖν η : συνημ. α :: ἡμ. β : ΘΔ = $\frac{\text{ημ. β} \times \text{συνημ. α}}{\eta}$· ἀλλὰ ΔΞ = ΟΜ + ΔΘ = ΞΘ + ΘΔ, ϗ Βχ = ΘΞ — ΠΞ = ΔΞ — ΔΘ· ἄρα ΔΞ, εἴτ' ἂν ἡμ (α + β) = $\frac{\text{ἡμ. α} \times \text{συνημ. β} + \text{ἡμ. β} \times \text{συνημ. α}}{\eta}$· ϗ Βχ = ημ (α — β) = $\frac{\text{ημ. α} \times \text{συνημ. β} - \text{ημ. β} \times \text{συνημ. α}}{\eta}$· τετέςι „τὸ ἡμίτονον τῆ ἀθροίσματος δύω τόξων α, β (ὑποτιθεμένου „α > β) ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆ ἡμιτόνȣ τῆ α ϗ „τῆ συνημιτόνȣ τῆ β σὺν τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆ ἡμιτόνȣ β ϗ τῆ „συνημιτόνȣ τῆ α, συνάμα διαιρεθεῖσι διὰ τῆς ἀκτῖνος· τὸ „δὲ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν τόξων ἴσον ἐςὶ τῷ „γινομένῳ ὑπὸ τῆ ἡμιτόνȣ τῆ α, ϗ τῆ συνημιτόνȣ τῆ β, „πλὴν τῆ γινομένȣ ὑπὸ τῆ ἡμιτόνȣ τῆ β ϗ τῆ συνημιτό„νȣ τῆ α, διαιρεθεῖσι διὰ τῆς ἀκτῖνος.“

508. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Δοθέντων τῶν συνημιτόνων δύω τόξων α καὶ β, εὑρεῖν τὸ συνημίτονον ΚΞ τῆ αὐτῶν ἀθροίσματος, καί τὸ συνημίτονον Κχ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τὰς παραλλήλȣς ΔΞ, ΟΜ, αἱ εὐθεῖαι ΔΒ, Ξχ ἀναλόγως τέτμηνται κατὰ τὸ Ο ϗ Μ (314)· ἀλλ' ἡ ΔΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ο, ἄρα ϗ ἡ Ξχ κατὰ τὸ Μ· τȣ́τȣ δὲ τεθέντος, ἐπείπερ τὰ τρίγωνα ΚΛΝ, ΚΟΜ εἰσὶν ὅμοια (318)· ἄρα ΚΛ : ΚΟ :: ΚΝ : ΚΜ, εἴτ' ȣ̃ν η : συνημ. β :: συνημ. α : ΚΜ $= \dfrac{\text{συνημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta}{\eta}$· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΛΝ, ΔΘΛ (220 Πόρ. Γ΄.)· πρόεισι ΚΛ : ΛΝ :: ΔΟ : ΘΟ = ΞΜ = Μχ, εἴτ' ȣ̃ν η : ἡμ. α :: ἡμ. β : ΞΜ $= \dfrac{\text{ἡμ. } \alpha \text{ ἡμ. } \beta}{\eta}$· ἄρα ΚΞ = ΚΜ — ΞΜ =

$$\frac{\text{συνημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta - \text{ἡμ. } \alpha \times \text{ἡμ. } \beta}{\eta}$$, ϗ Κχ = ΚΜ

+ Μχ $= \dfrac{\text{συνημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta + \text{ἡμ. } \alpha \times \text{ἡμ. } \beta}{\eta}$, τȣ̃τ'

„ἔςι, τὸ συνημίτονον τȣ̃ ἀθροίσματος δύω τόξων ἴσον ἐςὶ „τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν συνημιτόνων τῶν αὐτῶν τόξων „πλὴν τȣ̃ γινομένȣ ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὰ ἡμιτόνων· τὸ δὲ „τῆς διαφορᾶς, τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν συνημιτόνων τῶν „αὐτῶν τόξων σὺν τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὰ ἡμιτόνων, διαιρεθεῖσιν ἅπασι διὰ τῆς ἀκτῖνος.“

509. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ΄. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων δύω γωνιῶν α ϗ β, ἔςι πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν, ὥσπερ ἡ ἁπτομένη τȣ̃ ἡμιαθροίσματος τῶν αὐτῶν γωνιῶν πρὸς τὴν τῆς ἡμιδιαφορᾶς.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπείπερ αἱ ὑποτείνȣσαι τὰς γωνίας πλευραὶ εἰσὶν, ὡς τὰ ἡμίτονα τῶν αὐτῶν (496), δῆλον τὸ θεώρημα ἐκ τῶν δειχθέντων (499)· ἔςιν ἄρα ἡμ. α +

$$ἡμ.\ \beta : ἡμ.\ \alpha - ἡμ.\ \beta :: ἀπ.\ (\frac{\alpha+\beta}{2}) : ἀπ.\ (\frac{\alpha-\beta}{2}).$$

510. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔστιν ἄρα ϗ $συνημ.\ \alpha + συνημ.\ \beta :$
$$συνημ.\ \alpha - συνημ.\ \beta :: συναπ.\ (\frac{\alpha+\beta}{2}) : συναπ.\ (\frac{\alpha-\beta}{2}).$$
τὰ γὰρ συνημίτονα εἰσὶν ἡμίτονα τῶν κατὰ τὰ παραπληρώματα γωνιῶν (489)· ἄρα, κατὰ τὸ θεώρημα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων τῶν κατὰ τὰ παραπληρώματα γωνιῶν ἔστι πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν, ὥσπερ ἡ ἀπτομένη τȣ̃ ἡμιαθροίσματος τῶν κατὰ τὰ παραπληρώματα γωνιῶν πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν αὐτῶν.

511. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Βȣλομένοις δ' εὑρεῖν τὴν τέμνȣσαν διὰ τȣ̃ συνημιτόνȣ ϗ τῆς ἀκτῖνος, πορισθήσεται ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΚΔ, ΝΚΑ· ἔστι γὰρ (ὑποτεθείσης τῆς ὑπὸ $ΒΚΑ = \alpha$) $συνημ.\ \alpha : ΒΚ = \eta :: ΚΑ = \eta :$
$$ΚΝ = τεμ.\ \alpha = \frac{\eta^2}{συνημ.\ \alpha}$$
· δῆλον δὲ ϗ ὅτι $ΚΝ = τεμ.\ \alpha = \sqrt{(\eta^2 + ἀπ.^2\ \alpha)}$ ϗ $ΚΜ = συντ.\ \alpha = \sqrt{(\eta^2 + συντ.^2\ \alpha)}$.

512. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἡμίτονον ἁπάσης γωνίας τῆς α, ἔστι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ἀκτῖνος ϗ τȣ̃ συνημιτόνȣ τῆς αὐτῆς γωνίας, ὥσπερ ἡ ἀπτομένη τῆς ἡμισείας γωνίας α πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω γωνία $ΑΚΠ = \alpha$· ȣ̓κȣ̃ν ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία $ΑΒΠ = \frac{\alpha}{2}$ (178), ϗ ἀχθείσης διὰ τȣ̃ κέντρȣ Κ τῷ ΚΝ παραλλήλως τῇ ΒΠ, ἔσαι ἡ γωνία ΝΚΑ $= ΠΒΑ$ (45) $= \frac{\alpha}{2}$, ϗ ΑΝ ἔσαι ἀπτ. $\frac{\alpha}{2}$· ἀλλ' ἐκ τῶν ὀρθογωνίων ὁμοίων τριγώνων ΒΠΔ (180) ΝΚΑ (151) ἔστι

ΠΔ : ΔΒ : : ΝΑ : ΚΑ, εἴτ' ὖν ἡμ. α : η + συνημ. α : : ἀπτ. $\frac{\alpha}{2}$: η· ἄρα η + συνημ. α $= \frac{\eta \times \text{συνημ. } \alpha}{\text{ἀπτ. } \frac{\alpha}{2}}$

513. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ΑΠΔ γωνία μετρεῖται ὑπὸ τῦ ἡμίσεως τῦ τόξυ ΑΖ, ϗ ΑΖ = ΑΠ, ῦ τὸ ἥμισυ μετρεῖ τὴν ὑπὸ ΝΚΑ γωνίαν, δῆλον ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΝΑΚ, ΠΔΑ εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ΠΔ : ΑΔ : : ΚΑ : ΑΝ, τῦτ' ἔςιν· ἡμ. α : η — συνημ. α : : η : ἀπ. $\frac{\alpha}{2}$· ὅθεν Η — συνημ. α $= \frac{\text{ἡμ. } \alpha}{\eta}$· ἀπ. $\frac{\alpha}{2}$, ϗ (διαιρέσει δήπυ τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ τῆς προευρημένης (512))

$$\frac{\text{Η} - \text{συνημ. } \alpha}{\text{Η} + \text{συνημ. } \alpha} = \frac{\text{ἀπ.}^2 \frac{\alpha}{2}}{\eta^2} \cdot \text{ ἄρα } \eta^2 \cdot \left(\frac{\text{Η} - \text{συνημ. } \alpha}{\text{Η} + \text{συνημ. } \alpha}\right) = (\text{ἀπτ.})^2 \tfrac{1}{2}\alpha$$

· ἀλλὰ $(\text{συναπ.})^2 = \frac{\eta^4}{(\text{ἀπ.})^2}$ (501)· ἄρα $(\text{συναπ.})^2$

$$\tfrac{1}{2}\alpha = \eta^2 \cdot \left(\frac{\text{Η} + \text{συνημ. } \alpha}{\text{Η} - \text{συνημ. } \alpha}\right) \; (*).$$

Εἴδομεν ἤδη (512) ὡς ἔςιν ἡμ. α : η + συνημ. α : :

(*) Ἐπεὶ γὰρ ἁπλῶς $(\text{συναπ.})^2 = \frac{\eta^4}{(\text{ἀπτ.})^2}$· ἄρα (συναπ.)² ½α ἔςιν ἴση τῷ η⁴ διαιρυμένῳ διὰ (ἀπτ.)² ½α, ἔςι δὲ $(\text{ἀπτ.})^2 \tfrac{1}{2}\alpha = HH \left(\frac{\eta - \text{συνημ. } \alpha}{\eta + \text{συνημ. } \alpha}\right)$· ἄρα $(\text{ἀπτ.})^2 \tfrac{1}{2}\alpha =$

$$\eta^4 : HH \cdot \left(\frac{\eta - \text{συνημ. } \alpha}{\eta + \text{συνημ. } \alpha}\right) = H^4 : \frac{HH. \,(\eta - \text{συνημ. } \alpha)}{\eta + \text{συνημ. } \alpha}$$

$$= H^4 \times \frac{\eta + \text{συνημ. } \alpha}{HH. \,(\eta - \text{συνημ. } \alpha)} = H^2 \left(\frac{H \,.\, \text{συνημ. } \alpha}{\eta - \text{συνημ. } \alpha}\right).$$

ἀπ. $\frac{\alpha}{2}$: η· ἀλλὰ (495)· ἀπ. $\frac{\alpha}{2}$: η : : Η : συναπ. $\frac{\alpha}{2}$·

ἄρα ἡμ. α : Η + συνημ. α : : Η : συναπ. $\frac{\alpha}{2}$· ἐὰν οὖν γένηται

τὸ κυκλικὸν τεταρτημόριον = ν, προκύψει συναπ. $\frac{\alpha}{2}$ = ἀπ.

$(\nu - \frac{\alpha}{2})$ = ἀπ. $(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu - \alpha}{2})$ = ἀπ. $(\frac{\nu + \pi}{2})$· ὑποτε-

θέντος ἀμέλει ν − α = π· ἔστι δὲ καὶ ἡμ. α = συνημ. π, καὶ ἡμ. π = συνημ. α· ἄρα ἡ ἀναλογία ἡμ. α : Η + συνημ.

α : : Η : συναπ. $\frac{\alpha}{2}$ γενήσεται συνημ. π : Η + ἡμ. π : : Η :

ἀπ. $(\frac{\nu + \pi}{2})$· ἔστι δὲ καὶ ἡμ. α : Η − συνημ. α : : Η : ἀπ.

$\frac{\alpha}{2}$: : συνημ. $\frac{\alpha}{2}$: Η· ἄρα, ἐπεὶ συναπ. $\frac{\alpha}{2}$ = ἀπ. $(\nu - \frac{\alpha}{2})$

= ἀπτ. $(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu - \alpha}{2})$ = ἀπτ. $(\frac{\nu + \pi}{2})$, καὶ ἡμ. α = συνημ.

π, καὶ ἡμ. π = συνημ. α· ἐκ τούτων πορισθήσεται συνημ. π

: Η − ἡμ. π : : ἀπ. $(\frac{\nu + \pi}{2})$: Η· ἄρα Η + ἡμ. π =

$\frac{\text{συνημ. } \pi. \text{ ἀπ. } (\frac{\nu + \pi}{2})}{H}$, Η − ἡμ. π = $\frac{\text{συνημ. } \pi. \ H}{\text{ἀπ } (\frac{\nu + \pi}{2})}$,

$\frac{H + \text{ἡμ. } \pi}{H - \text{ἡμ. } \pi} = \frac{(\text{ἀπ.})^2 \ (\frac{\nu + \pi}{2})}{H^2}$, καὶ τελευταῖον

$\frac{H^2 \ (H + \text{ἡμ. } \pi)}{H - \text{ἡμ. } \pi} = (\text{ἀπτ.})^2 \ (\frac{\nu + \pi}{2})$.

514. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐκ τῶν μέχρι τȣ̃δε εἰρημένων οἵτε πίνακες τῶν τε ἡμιτόνων, ϗ συνημιτόνων, ϗ ἁπτομένων, ϗ συναπτομένων, κατασκευάζονται, ϗ ἅπαν τριγωνομετρικὸν πρόβλημα, καθάπερ ὀψόμεθα ἐν τῷ ἐφεξῆς κεφαλαίῳ, λύσιμον ἀποκαθίςαται· ἡμιτόνȣ γὰρ γωνίας $= 30°$ δοθέντος (495), εὑρεθήσεται ῥαδίως τὸ γωνίας $= 15°$ (506), ἑξῆς δὲ τὸ $7° \frac{1}{2}$, εἶτα τὸ $3° \frac{1}{4}$, ϗ ἐφεξῆς ὁμοίως, τὰ ἡμίση θηρωμένοις μέχρι δωδεκάτης πράξεως, καθ' ἣν εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον γωνίας $= 52'' \, 44''' \, 3'''' \frac{3}{4}$· ἐπεὶ δὲ τὰ βραχυτάτων τόξων ἡμίτονα αὐτοῖς τοῖς τόξοις συμπίπτȣσι, ϗ εἰσὶν αὐτοῖς ἀνάλογα κατὰ τὸ ἀκόλȣθον, εὑρεθήσεται τὸ γωνίας $= 1'$ ἐκ τῆς ἀναλογίας „ὥσπερ γωνία $= 52'' \, 44''' \, 3'''' \frac{3}{4}$ πρὸς τὸ ἡμίτονον αὐτῆς, ȣ̔́τω γωνία $= 1'$ πρὸς τὸ ζητȣ́μενον αὐτῆς ἡμίτονον“· τȣ́τȣ δὲ εὑρεθέντος ἀπόνως ἐκπορίζεται τὸ γωνίας $= 2'$ (504)· ἑξῆς δὲ ὑποτεθέντων $\beta = 1'$, ϗ $\alpha = 2'$, εὑρεθήσεται ϗ τὸ τῆς $3'$ (507)· τȣ́τȣ δὲ ὑποτεθέντος $= \alpha$, ϗ $\beta = 1'$ εὑρεθήσεται ϗ τὸ τῆς $4'$, καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως μέχρι τȣ̃ γωνίας $= 30°$· εὑρεθέντος δὲ τȣ̃ γωνίας $= 30°$ ἡμιτόνȣ, ἵν' εὑρεθείη τὸ γωνίας μείζονος, φέρ' εἰπεῖν, τῆς $= 35°$, γενέσθω $\alpha = 30°$, ϗ $\beta = 5°$· εἰς δ' εὕρεσιν τȣ̃ γωνίας $= 30° \, 1'$, γενέσθω $30° = \alpha$, ϗ $1' = \beta$, ϗ ȣ̔́τως ἑξῆς ἕως τȣ̃ γωνίας $= 60°$· τȣ́τȣ δὲ ἅπαξ γνωσθέντος, τὰ ἕως $90°$ θηρευθήσεται, τιθεμένȣ $\alpha = 60°$, ϗ $\beta = 1°, = 2°, = 3°$. κτλ. · ἡμιτόνων δὲ γωνίαις προσανηκόντων μείζοσιν, ἢ $90°$, ἐπεὶ ταυτίζεται τοῖς τῶν αὐτοῖς ἀναπληρωμάτων (491), εὐμαρεςάτη ἡ εὕρεσις· ἡμίτονον γὰρ γωνίας $= 100°$ ταυτόν ἐςι ϗ γωνίας $= 80°$· ἀταλαιπώρως δὲ ϗ τὰ συνημίτονα πορίζονται, τῶν ἡμιτόνων γινωσκομένων· τὸ γὰρ συνη-

μίτονον ἰσȣ̃ται τῇ τετραγωνείῳ ῥίζῃ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος τετράγωνον ὑπερεκπίπτει τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ ἡμιτόνȣ (505)· ἐπεὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα (σχ. 2) ΚΔΒ, ΚΑΝ εἰσὶν ὅμοια· ἐντεῦθεν ἄρα ΚΔ : ΔΒ : : ΚΑ : ΑΝ, εἴτ' ȣ̃ν συνημ. : ἡμ. : : Η : ἀπ.· γινωσκομένων ȣ̃ν τȣ̃ τε ἡμιτόνȣ ϗ τȣ̃ συνημιτόνȣ γωνίας τινὸς, εὐχερῶς εὑρεθήσεται ἡ αὐτῆς ἁπτομένη· ἐκ δὲ τῆς ἀναλογίας (501) απ : Η : : Η : συναπ. ῥαδίως πορισθήσεται ϗ ἡ συναπτομένη· ἐὰν ȣ̃ν ὑποτεθῇ ἡ ἀκτὶς = 10000000000, τὸ γωνίας = 30° ἡμίτονον ἔςαι = 5000000000· ἐκ δὲ τῶν προειρημένων εὑρεθήσονται οἱ τὰ ἡμίτονα, συνημίτονα ϗ ἁπτομένας, τόξων τῶν τε μειζόνων ϗ τῶν ἐλαττόνων ἢ 30°, ἐκδηλȣ̃ντες ἀριθμοί· τȣ̀ς δὲ ἀριθμȣ̀ς εὑρόντες, ζητȣ̃μεν τȣ̀ς αὐτῶν λογαρίθμȣς ἐν τοῖς πίναξιν· οἷς ϗ μόνοις χρώμεθα ἀντὶ τῶν ἡμιτόνων, συνημιτόνων κτλ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἐπιλύσεως τῶν κατὰ τὰ τρίγωνα προβλημάτων.

515. Προϋποτεθειμένων τῶν πινάκων, οἳ περιέχȣσι τὰ ἡμίτονα, ἁπτομένας, συνημίτονα, συνεφεπτομένας (514), διὰ τῶν προτεθέντων θεωρημάτων ἐπιλύειν δυνάμεθα ἅπαν ἐπὶ τριγώνȣ γινόμενον πρόβλημα, ὅ ἐςι τριῶν διδομένων, ἐν οἷς ϗ μία πλευρὰ, τὰ ἄλλα τρία εὑρίσκειν.

516. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τριγώνȣ τȣ̃ ΒΓΕ δύω γωνιῶν δοθεισῶν τῶν Β, Γ, ϗ τῆς ΒΓ πλευρᾶς, εὑρεῖν τὰ ἄλλα (σχ. 9).

ΛΥΣΙΣ. Ἡ τρίτη γωνία Ε πορίζεται, ἐὰν ἀφαιρεθῇ Β + Γ ἀπὸ 180° (210)· εἰς δὲ εὕρεσιν τῆς ΒΓ πλευρᾶς χρηςέον τῇ μεθόδῳ τῶν τριῶν. Τὸ γὰρ ἡμίτονον τῆς Γ γωνίας, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ γνωςὴ πλευρὰ ΒΕ, ἐςὶ πρὸς αὐτὴν τὴν γνωςὴν πλευρὰν, ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς Ε γωνίας, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ ΒΓ πρὸς αὐτὴν τὴν ΒΓ, ἣν ζητῦμεν (496)· ἔςω ὖν Β = 100°, ϗ Γ = 15°· ὐκῦν Ε ἔςαι = 180° — 115° = 65°· ἔςω δὲ ϗ ΒΕ = 20 ὀργυιαῖς· ζητείσθω εἶτα ἐν τοῖς πίναξι τὸ ἡμίτονον τῆς Γ γωνίας = 15°, ϗ τὸ τῆς Ε = 65°, ϗ σχηματισθήτω ἡ μέθοδος τῶν τριῶν ὕτω· 2588190 : 20 :: 9063078 : χ = 70 $\frac{88260}{2588190}$, δύναμις τῆς ΒΓ πλευρᾶς.

Βυλόμενοι δὲ εὑρεῖν τὴν ΓΕ πλευρὰν, τίθεμεν τρίτον ὅρον τῆς ἀναλογίας τὸ ἡμίτονον τῆς Β γωνίας, ὑφ' ἣν αὕτη ὑποτείνει· ταύτης δὲ τῆς γωνίας ἀμβλείας ὔσης, τὸ αὐτῆς ἡμίτονον τὸ αὐτὸ ἔςαι τῦ αὐτῆς ἀναπληρώματος (491), εἴτ' ὖν τῆς 80°· ἐντεῦθεν ὖν 2588190 : 20 :: 9848077 : χ = 26 + $\frac{259100}{2588190}$ = ΓΕ.

517. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Τῶν ἡμιτόνων ἐκτιθεμένων δἰ ἀριθμῶν μεγάλων, ἡ μέθοδος τῶν τριῶν λίαν ἐπίπονος γίνεται· ἀνθ' ὅτυ δὴ ζητήσαντες οἱ Μαθηματικοὶ τὺς λογαρίθμυς τῶν ἡμιτόνων πασῶν τῶν γωνιῶν τῦ κυκλικῦ τεταρτημορίυ, ἔθεντο πρὸ ἑκάςυ ἡμιτόνυ τὸν οἰκεῖον αὐτῦ λογάριθμον, εἰς ἓν τεῦχος συνάψαντες τὺς πίνακας τῶν ἡμιτόνων, ϗ τὺς λογαρίθμυς τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· ἀντὶ ὖν ἡμιτόνων ϗ πλευρῶν τιθέντες τὺς αὐτῶν λογαρίθμυς, τὴν γεωμετρικὴν εἰς ἀριθμητικὴν τῶν τριῶν μέθοδον μεταποιῦμεν, ϗ τῦ προκύψαντος λογαρίθμυ ἐν τοῖς πίναξι τὸ ἀντίςοιχον ἡμίτονον, ἢ τὴν πλευρὰν, ἣν ζητῦμεν, εὑρίσκομεν.

Οὕτως ἡ προεκτεθεῖσα τῶν τριῶν γεωμετρικὴ μέθοδος (516) γενήσεται 9,4129962 · 1,3010300 : 9,9572757 · χ· τῶν μέσων ὖν συναφθέντων, ϗ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιρεθέντος τοῦ γνωστοῦ ἄκρου, τὸ κατάλοιπον χ = 1,8453095, ἔσαι λογάριθμος, ὃς ἐν τοῖς πίναξιν ἀντισοιχεῖ τῷ 70 καί τινι πρὸς, ὅς ἐσι δύναμις ἐγγίζουσα τῇ ΒΓ πλευρᾷ.

518. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐμφαίνων τὴν ἐγνωσμένην πλευρὰν περιέχῃ ὀργυιὰς ϗ πόδας, πάντα ἀνήχθωσαν εἰς πόδας, ϗ εἰλήφθω τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ὁ λογάριθμος εἰς ἐκτέλεσιν τῆς ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν μεθόδου.

519. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐν τῇ ἀριθμητικῇ τῶν τριῶν μεθόδῳ, ἀντὶ τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων, ϗ τῶν πλευρῶν, σημειούσθωσαν χάριν συντομίας αὐταὶ αἱ γωνίαι ϗ αἱ πλευραί· οὕτως οὖν ἐκτεθήσεται ἡ ἐν (517) ἀριθμητικὴ ἀναλογία Γ · ΒΕ : Ε · ΒΓ.

520. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ΄. Τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, εἴτ' οὖν τοῦ γωνίας ὀρθῆς, ὄντος = 10000000000 (486), ὁ αὐτοῦ λογάριθμος ἔσαι 10 ὡς ὁλοχερὴς (Συμβ. Λογ. 322)· ἐὰν οὖν λογαρίθμῳ προσθεῖναι δέῃ τὸν λογάριθμον τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἀπόχρη συνάψαι 1 ταῖς δεκάσι τοῦ χαρακτηρισικοῦ τοῦ λογαρίθμου ἐκείνου, ἐὰν ὑπερέχῃ τὸν 10, ἢ προθεῖναι πρὸς ἀρισερὰν 1, ἐὰν ᾖ τοῦ 10 ἥττων· ἐὰν δὲ ἀφελεῖν δέῃ, ἀποκεκόφθω 1 τῶν τοῦ χαρακτηρισικοῦ δεκάδων. Τὸ ἑξῆς ὑπόδειγμα διαλευκανεῖ τὸ λεγόμενον.

521. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τριγώνου ὀρθογωνίου (σχ. 10) τοῦ ΑΔΖ δοθείσης τῆς πλευρᾶς ΔΖ = 30 ὀργυιαῖς, καὶ τῆς γωνίας Ζ = 40°, εὑρεῖν τὰ λοιπά.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ γωνία Α = 90° — 40° = 50° (212)· εἰς εὕρεσιν δὲ τῆς βάσεως ΑΖ (496, 519) γενέσθω Α · ΔΖ

: Δ · ΑΖ · δὶ ἀριθμῶν δέ · 9,884254 · 1,477121 : 10 · χ· τὸ τῶν μέσων ἄθροισμα ἐςὶν 11,477121 (520), ὃ ἀφαιρεθέντος τῦ γνωςῦ ἄκρυ λειφθήσεται $\chi = 1,592867$ λογάριθμος ἐγγίζων τῷ 39, ἐκδηλῦντι τὴν ζητυμένην βάσιν· ὕσης δὲ τῆς $\mathrm{AZ} = 39$ ὀργιαῖς, γινωσκομένης τε τῆς γωνίας Ζ, εὑρεθήσεται ἡ τὴν Ζ ὑποτείνυσα πλευρὰ ΑΔ διὰ τῆς ἀναλογίας τῆς ἀριθμητικῆς Δ · ΑΖ : Ζ · ΑΔ (496, 516).

522. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Τριγώνυ δοθεισῶν δύω πλευρῶν, ϗ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας, εὑρεῖν τὰ λοιπά.

ΛΥΣΙΣ. Ἤτοι ἐςὶν $\mathrm{A\Pi} = \mathrm{A\Gamma}$ (σχ. 11), ϗ γνωςῆς ὕσης τῆς Α, ἔςαι (206) ἑκατέρα τῶν Π, Γ, $= \frac{180^\circ - \mathrm{A}}{2}$ (210)· γνωςῆς ὖν ὕσης τῆς γωνίας Π, εὑρεθήσεται ἡ ΠΓ πλευρὰ δὶ ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν μεθόδυ (519) Π · ΑΓ : Α · ΠΓ · ἢ εἰσὶν ἄνισοι αἱ δοθεῖσαι ΑΟ, ΖΟ (σχ. 8)· κἀντεῦθεν ἥδε γενήσεται ἡ μέθοδος τῶν τριῶν· „τὸ ἄθροισμα τῶν δύω δοθεισῶν πλευρῶν ἐςὶ „πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν, ὡς ἡ ἁπτομένη τῦ ἡμιαθροί„σματος τῶν γωνιῶν, ὑφ' ἃς αἱ πλευραὶ ὑποτείνυσι, πρὸς „τὴν ἁπτομένην τῆς αὐτῶν ἡμιδιαφορᾶς.

Γνωςῶν ὖν ὑσῶν τῶν δύω πλευρῶν, ῥᾷςα εὑρίσκεται τό,τε ἄθροισμα αὐτῶν, ϗ ἡ διαφορὰ, ἅπερ συνίςησι τὺς δύω προτέρυς τῆς ἀναλογίας ὅρυς· δυνατὸν δὲ εὑρεῖν ϗ τὸν τρίτον· ϗ γὰρ $\mathrm{A} + \mathrm{Z} = 180^\circ - \mathrm{O}$· ὑκῦν τρίτος ὅρος ἔςαι ἡ ἁπτομένη τῆς $\frac{180^\circ - \mathrm{O}}{2}$, ἣ εὑρίσκεται ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων· ὁ δὲ τέταρτος ὅρος χ τῆς πράξεως διεκπερανθείσης ἀποδώσει τὴν ἁπτομένην τῆς ἡ-

μιδιαφορᾶς τῶν γωνιῶν τῶνδε· εὑρόντες οὖν ἐν τοῖς πίναξι διὰ τῆς ἁπτομένης ταύτης τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶνδε τῶν γωνιῶν, ἕξομεν τὴν ἐλάττονα γωνίαν Α ἴσην τῷ ἡμιαθροίσματι πλὴν τῆς ἡμιδιαφορᾶς (Συμβ. Λογ. 442).

Τέλος δὲ ἐκ τῆς ἀναλογίας Α : ΖΟ : : Ο : ΑΖ (496, 519) εὑρεθήσεται ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΖ.

Ἔστω ΓΑ = ΑΠ, καὶ Α = 142°· οὐκοῦν Π = Γ = 19°· ἔστω δὲ καὶ ΑΓ = 12 ὀργυιαῖς· ἔστι δὲ τοῦ μὲν 19° λογάριθμος 1,5126, τοῦ δὲ ἀριθμοῦ 12 ὁ 1,0791· τοῦ δὲ 142° ὁ αὐτὸς ὢν τῷ τοῦ 38° (491), ἔστιν 1,7893· τοιγαροῦν ἡ μέθοδος διατεθήσεται οὕτω· 1,5126 · 1,0791 : 1,7893 : x = ΠΓ, οὗ κοῦν λογάριθμος πρόεισιν ὁ 1,3558 ἀριθμῷ ἀντιστοιχῶν ἐγγύς που τῷ 23, ὃς παρίστησιν, ὅσων ὀργυιῶν ἐστιν ἡ ΠΓ.

	1,0791
	1,7893
	2,8684
	1,5126
	1,3558

523. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. *Δύω πλευρῶν δοθεισῶν καὶ μιᾶς γωνίας, ὑφ᾽ ἣν ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν ὑποτείνει, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ, γινωσκομένου μέντοι, εἰ ἡ γωνία, ὑφ᾽ ἣν ἑτέρα πλευρὰ ὑποτείνει, ὀξεῖά ἐστιν, ἢ ἀμβλεῖα.*

ΛΥΣΙΣ. Ἤτοι γάρ εἰσιν ἴσαι αἱ δοθεῖσαι, οἷον ΑΠ = ΑΓ (σχ. 11), καὶ γινωσκομένης τῆς Γ, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ ΑΠ, γνωσθήσεται καὶ ἡ Π (204), καὶ δὴ καὶ ἡ Α (210)· γνωσθήσεται δὲ καὶ ἡ ΠΓ ἐκ τῆς μεθόδου Γ . ΑΠ : Α . ΠΓ· ἢ ἄνισοι, καὶ τηνικαῦτα, γνωστῶν οὐσῶν τῶν ΑΟ, ΟΖ (σχ. 8) καὶ τῆς Α γωνίας, ἔσται ΖΟ . Α : ΑΟ . Ζ· ὁ οὖν τέταρτος ὅρος, εἴτ᾽ οὖν τὸ λογαριθμικὸν ἡμίτονον τῆς Ζ, ἐπίσης δύναται εἶναι γωνίας ὀξείας τε καὶ ἀμβλείας (491)· ἐπάναγκες οὖν εἰδέναι τὴν Ζ, εἰ ἔστιν ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα, ἵνα δυνηθῶμεν συναγαγεῖν τὴν τῆς Ο δύναμιν· ἁπασῶν δὲ

τέλος τῶν γωνιῶν γνωσθεισῶν ἀποληφθήσεται ἡ δύναμις τῆς ΑΖ διὰ Α . ΟΖ : Ο . ΑΖ.

524. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Τριγώνȣ τῶν τριῶν πλευρῶν δοθεισῶν, εὑρεῖν τὰς γωνίας.

ΛΥΣΙΣ. Ἤτοι ἰσάλληλοί εἰσιν ἅπασαι αἱ πλευραὶ, ϗ ἑκάςη γωνία ἔςαι $= \frac{180^\circ}{3}$ (205, 210)· ἢ δύω μόνον εἰσὶν ἴσαι ΑΠ = ΑΓ, ϗ ἡ ἐκ τῆς Α γωνίας ἀχθεῖσα τῇ ΠΓ κάθετος δίχα τεμεῖ τὴν ΠΓ (217)· ἄρα ΠΘ = ΘΖ· ἀλλὰ τȣ̃ καινȣ̃ τριγώνȣ ΑΘΠ γινώσκονται, δύω μὲν πλευραὶ ΑΠ, ΠΘ, μία δὲ γωνία ἡ Θ· ἐκεῖν ΑΠ . Θ : ΠΘ, Α· ὅθεν πρόεισιν ἡ δύναμις τῆς Α γωνίας τȣ̃ ΑΠΘ τριγώνȣ, ἧς τὸ διπλȣ̃ν ἐςιν ἡ Α γωνία τȣ̃ ΑΠΓ τριγώνȣ· ταύτης δὲ τῆς γωνίας γνωσθείσης, ἡ λοιπὴ ῥᾳ̃ςα θηρευθήσεται (522).

Ἢ τελευταῖον αἱ τρεῖς πλευραὶ ΒΓ, ΒΕ, ΓΕ (σχ. 9) εἰσὶν ἄνισοι· ϗ δὴ α΄. ἐςι ΓΕ : ΓΤ : : ΓΟ : ΓΗ (500)· β΄. διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδȣ εὑρεθείσης ἐν ἀριθμοῖς τῆς ΓΗ, τὸ μὲν μεῖζον τμῆμα ΓΔ ἔςαι $= \frac{\Gamma\mathrm{E}}{2} + \frac{\Gamma\mathrm{H}}{2}$, τὸ δ᾽ ἔλαττον ΔΕ $= \frac{\Gamma\mathrm{E}}{2} - \frac{\Gamma\mathrm{H}}{2}$ (Συμβ. Λογ. 442)· γ΄. Τριγώνȣ τȣ̃ ΗΔΕ γινωσκομένων τῶν δύω πλευρῶν ΒΕ, ΔΕ, ϗ τῆς ὀρθῆς γωνίας Δ, εὐχερῶς εὑρεθήσεται ϗ ἡ Ε γωνία (523)· ὡσαύτως τριγώνȣ τȣ̃ ΒΓΔ γνωςῶν ὄντων τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΔ, ϗ τῆς Δ γωνίας, εὑρεθήσεται ϗ ἡ Γ· τȣ̃ ȣ̃ν ὁλικȣ̃ τριγώνȣ ΒΓΕ γνωςῶν ὄντων τῶν δύω γωνιῶν Γ, Ε, ἔςαι γνωςὴ ϗ ἡ τρίτη Β (210).

525. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ΄. Τριγώνȣ παντὸς ΒΓΕ, τριῶν δοθέντων, ἐν οἷς ἐςι ϗ μία πλευρὰ, εὑρεῖν τὴν αὐτȣ̃ ἐπιφάνειαν.

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθεισῶν τῶν τε γωνιῶν αὐτȣ̃ ϗ πλευρῶν (516, 522, 523, 524), ζητηθήτω ἡ δύναμις τῆς καθέτȣ ΒΔ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας Δ . ΒΓ : Γ . ΒΔ, ϗ πεπολλαπλασιάσθω ἡ ΓΕ βάσις ἐπὶ τὸ ἥμισυ ταύτης τῆς εὑρεθείσης καθέτȣ (288).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΚΤΟΝ.

Ἐν ᾧ ὁ Συμβολικὸς Λογισμὸς τῇ ϛοιχειώδει Γεωμετρίᾳ προσεφαρμόζεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ γεωμετρικῆς κατασκευῆς τῶν συμβολικῶν ποσοτήτων.

Ἦν μὲν ἀκόλȣθον ἐφεξῆς τὰ περὶ τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας ὑποσυνάψαι, καθὰ ϗ ἄλλοις ἔθος Γεωμέτραις· ἐπεὶ δ' ἡμῖν ἔδοξεν ἐν τῇ φυσικωτέρᾳ Μαθηματικῇ τῆς Ἀϛρονομίας, ὡς ἐκείνῃ τὰ μάλιϛα συντελȣ̃σαν, ϖροτάξασθαι, φέρ' ἴδωμεν διὰ βραχέων ἐνταῦθα τὴν τȣ̃ Συμβολικȣ̃ Λογισμȣ̃ πρὸς τὴν ϛοιχειώδη Γεωμετρίαν συνάφειαν, εἴτ' ȣ̃ν, ὡς λέγειν εἰώθασι, τὴν ἐκείνȣ ταύτῃ προσεφάρμοσιν· ϗ πρῶτον ὅπως ποσὰ γραμματικὰ γεωμετρικῶς κατασκευάζεται.

526. Αἱ γραμμαὶ, ϗ αἱ ἐπιφάνειαι, ϗ τὰ ςερεὰ, ποσότητες ἔσαι, τὰς αὐτὰς μὲν ἐπιδέχονται πράξεις, ἃς οἵτε ἀριθμοὶ, ϗ αἱ συμβολικαὶ ποσότητες· τὰ δ' ἐντεῦθεν προϊόντα ἀποτελέσματα διττῶς ἂν ἔχοι μάλιςα ἐκτιμᾶσθαι, ἤτοι δι' ἀριθμῶν, ἢ διὰ γραμμῶν· κἀκείνως μὲν ἑκάςης τῶν δεδομένων ποσοτήτων δι' ἀριθμῶν δηλωθείσης, ἐδὲν ἔργον ὅλως ὑπάρχει ταῖς πράξεσιν· ἐδὲν γὰρ ἄλλο λοιπὸν, ἢ ἀντὶ γραμμάτων ἀριθμητικὰς ἀντικαταςῆσαι ποσότητας, ϗ πράξεις, ἃς ἡ διάθεσις τῶν γραμμάτων ϗ τῶν συμβόλων ἐνδείκνυσιν, ἐκπεράναι· ἔτω δὲ, ὡρισμένες τινὰς ἐπάναγκες ἐπιγνῶναι τύπες, οἷς ἂν ἅπαντες ἀναχθεῖεν οἱ ἄλοι· ἴδωμεν ἔν πρῶτον ὅπως οἱ ςοιχειώδεις ἔτοι κατασκευάζονται τύποι· εἶτα δὲ ὅπως οἱ ἄλλοι ἐκείνοις ἐπανάγονται· καλεῖται δὲ τοῦτο κατασκευὴ τῶν συμβολικῶν ποσοτήτων, ἢ τῶν ταύταις προσεφαρμοζομένων προβλημάτων.

527. Ἐὰν ἡ μὲν εἰς κατασκευὴν προκειμένη ποσότης ᾖ λογικὴ, εἴτ' ἔν ῥιζικῶν ποσῶν ἄνευ, αἱ δὲ τῆ ἀριθμητῆ διαςάσεις μονάδι τῶν τῆ παρονομαςῆ ὑπερέχωσιν, ἡ κατασκευὴ διαπερανθήσεται ἀεὶ τετάρτης ζητεμένης ἀναλόγε τῶν τριῶν δεδομένων εὐθειῶν.

528. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Προκειμένης ἔν εἰς κατασκευὴν τῆς ποσότητος $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, ἐφ' ἧς α, β, γ γνωςὰς εὐθείας ἐμφαίνεσιν, ἤχθωσαν εὐθεῖαι ἀπέραντοι (σχ. 12) αἱ ΑΨ, ΑΧ, γωνίαν τυχἔσαν περιέχεσαι, ϗ ἐπὶ τῆς ἑτέρας αὐτῶν τῆς ΑΧ εἰλήφθω ἡ ΑΒ ἴση τῇ ἐμφαινομένῃ τῷ γ, ϗ ἡ ΑΔ ἴση ἀτέρᾳ τῶν α, β, τῇ α φέρ' εἰπεῖν· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ΑΨ εἰλήφθω ἡ ΑΓ ἴση τῇ β· ϗ ἐπεζευκέτω τὰ πέρατα Β, Γ τῆς πρώτης, ϗ τῆς τρί-

της ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ϗ ἤχθω διὰ τȣ̃ Δ πέρατος τῆς δευτέρας ἡ ΔΕ παράλληλος παρὰ τὴν ΒΓ, ἥτις διορίσει ἐπὶ τῆς ΑΨ τὴν ΑΕ ἴσην τῇ δυνάμει τȣ̃ τύπȣ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$· καὶ γὰρ (318) ἐκ τῶν παραλλήλων ΔΕ, ϗ ΒΓ πρόεισιν ἡ ἀναλογία ΑΒ : ΑΔ :: ΑΓ : ΑΕ, τȣ̃τ᾽ ἔςιν $\gamma : \alpha :: \beta :$ ΑΕ· ἄρα ΑΕ $= \frac{\alpha\beta}{\gamma}$· δηλοῖ δὲ τȣ̃το, εὑρεῖν τετάρτην ἀνάλογον εὐθεῖαν τριῶν δοθεισῶν. κατασκευασθήσεται ἄρα ὁ τύπος $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ χρησαμένοις μεθόδῳ τῇ ἐκτεθείσῃ (319).

529. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ε᾽ὰν ἄρα προκέηται εἰς κατασκευὴν ὁ τύπος $\frac{\alpha\alpha}{\gamma}$, τὸ ζήτημα συμπεριπεσεῖται τῷ ἤδη ἐκτεθέντι (528)· τηνικαῦτα γὰρ ἡ εὐθεῖα β ἐξισȣ̃ται τῇ α.

530. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Κείσθω κατασκευάσαι γεωμετρικῶς τὴν Συμβολικὴν ποσότητα $\frac{\alpha\beta+\beta\delta}{\gamma+\delta}$· ἐπεὶ ȣ̃ν $\frac{\alpha\beta+\beta\delta}{\gamma+\delta} = \frac{(\alpha+\delta)\times\beta}{\gamma+\delta}$ (Συμϐ. Λογ. 68. ά.), λαμϐανομένης τῆς $\alpha+\delta$ ὡς μιᾶς εὐθείας ἐμφαινομένης ὑπὸ μ, ϗ τῆς $\gamma+\delta$ ἀντὶ μιᾶς ἄλλης δηλȣμένης ὑπὸ ν, τρέψεται ὁ τύπος εἰς $\frac{\mu\beta}{\nu}$, ὃς γεωμετρικῶς κατασκευασθήσεται κατὰ τὸν ἐκτεθέντα (528).

531. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ε᾽ὰν ἡ $\frac{\alpha\alpha-\beta\beta}{\gamma}$, ἐπεὶ ταυτίζεται τῇ $\alpha\alpha-\beta\beta$ τῇ $(\alpha+\beta)\times(\alpha-\beta)$, ὡς ἔ-

ςι δῆλον ἐκτελεμένε τῦ σεσημειωμένε πολλαπλασιασμῦ, παρεςάσθω ἡ ποσότης $\frac{\alpha\alpha - \beta\beta}{\gamma}$ ὑπὸ σχήματι τοιῷδε $\frac{(\alpha+\beta)\times(\alpha-\beta)}{\gamma}$, ϗ ζητηθήτω τετάρτη ἀνάλογος τῶν γ, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ (319).

532. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ΄. Ἐὰν προκέηται εἰς κατασκευὴν ἡ ποσότης $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon}$, ἐπείπερ ὑπάρχει $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon} = \frac{\alpha\beta}{\delta} \times \frac{\gamma}{\varepsilon}$, κατεσκευάσθω πρῶτον ὁ τύπος $\frac{\alpha\beta}{\delta}$ (528), ϗ ἡ ἐκ τῆς κατασκευῆς προκύψασα τετάρτη ἀνάλογος κληθήτω μ· ἐκεῖν ἔςαι $\frac{\alpha\beta}{\delta} \times \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{\mu\gamma}{\varepsilon}$, ἥτις κατασκευασθήσεται ϗ αὐτὴ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

533. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵν᾽ ἄρα κατασκευασθῇ ἡ ποσότης $\frac{\alpha^2\beta}{\gamma^2}$, πρῶτον αὐτὴν παραςαθῆναι δεῖ ὅτως $\frac{\alpha^2}{\gamma} \times \frac{\beta}{\gamma}$: εἶτα κατασκευασθῆναι τὴν $\frac{\alpha^2}{\gamma}$· τελευταῖον δὲ τῆς κατ᾽ αὐτὴν δυνάμεως διὰ μ δηλωθείσης, κατασκευασθῆναι τὴν ποσότητα $\frac{\mu\beta}{\gamma}$.

534. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀναλύειν ὖν χρὴ τὴν προκειμένην ποσότητα εἰς μέρη, ὧν ἕκαςον ἂν ἰσοδυναμοίη τῷ τύπῳ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, ἢ $\frac{\alpha^2}{\gamma}$· κἂν τῦτο τὰ πολλὰ δυσχερὲς εἶναι δοκῇ, διὰ μέντοι μεταμορφώσεων εὐτυχῶς διανύεται.

535. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Ε΄. Κείσθω κατασκευάσαι

γεωμετρικῶς τὴν ποσότητα $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 + \gamma^2}$· ὑποτεθείσθω οὖν πρὸς τὸ δοκοῦν $\beta^3 = \alpha^2 \mu$, καὶ $\gamma^2 = \alpha\nu$· ἄρα τηνικαῦτα $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 + \gamma^2} = \frac{\alpha^3 + \alpha^2\mu}{\alpha^2 + \alpha\nu}$ (Συμβ. Λογ. 70) $= \frac{\alpha^2 + \alpha\mu}{\alpha + \nu} = \frac{(\alpha + \mu).\,\alpha}{\alpha + \nu}$ (Συμβ. Λογ. 68. ά.), ἥτις εὐμαρῶς κατασκευάζεται (531), εἰ μόνον γνωσθεῖεν τὰ μ, ν· γινώσκεται δὲ ταῦτα ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\beta^3 = \alpha^2\mu$ καὶ $\gamma^2 = \alpha\nu$· ὅθεν $\mu = \frac{\beta^3}{\alpha^2}$, καὶ $\nu = \frac{\gamma^2}{\alpha}$, ἃ ῥᾳδίως κατασκευάζεται (529, 533).

536. ΣΧΟΛΙΟΝ. Συμβαίνει ἐνίοτε τὰς ποσότητας οὕτω σχηματίζεσθαι, ὡς ἀχρήστους πάμπαν δοκεῖν τὰς μεταμορφώσεις· γίνεται δὲ τοῦτο ὅταν μὴ ᾖ ὁμογενὴς ἡ ποσότης, τουτ᾽ ἔστιν ὅταν ἕκαστος τῶν τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ τοῦ παρονομαστοῦ, ὅρων μὴ συγκέηται ἐξ ἴσων ποιητῶν, ὅταν ᾖ, φέρ᾽ εἰπεῖν, τοιάδε $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\gamma^2 + \beta}$· παρατηρητέον μέντοι, ὅτι οὐδέποτε τοιόνδε ποσὸν προέρχεται, πλὴν ὅταν ἐπὶ λογισμοῦ διὰ τὸ ἁπλούστερον ποσά τινα μονάδι ἴσα ἐκλαμβάνωνται· οὕτω φέρ᾽ εἰπεῖν ὁ τύπος $\frac{\alpha^3 + \beta^2\gamma}{\alpha^2 + \gamma^2}$, ὑποτεθέντος $\beta = 1$, τρέψεται εἰς τὸν $\frac{\alpha^3 + \gamma}{\alpha^2 + \gamma^2}$· ἐπεὶ μέντοι ἀδύνατον ἐγχειρῆσαι τῇ κατασκευῇ, τὰ, ἐξ ὧν ἔσται ἡ κατασκευὴ, ἀγνοοῦντας στοιχεῖα, γινώσκεται ἀείποτε ἡ μονάδι ἴση ὑποτεθεῖσα ποσότης· ἐξέσται ἄρα ἀεὶ ταύτην ἀντικαθιστᾷν ἀντὶ τῆς μονάδος· κωλύει δὲ τὸ τοιοῦτον οὐδέν· ἐπεὶ γὰρ

τὰς διαςάσεις ἑκάςȣ ὅρȣ τȣ͂τε ἀριθμητȣ͂, ϗ τȣ͂ παρονομαςȣ͂ χρὴ ἴσας ἀεὶ εἶναι (δυνατὸν ἄλλως διαφέρειν τȣ̀ς ἐκείνȣ τῶν τȣ́τȣ ὅρων), ἀντεισακτέον ἑκάςῳ ὅρῳ βαθμὸν τῆς μονάδι ἰσωθείσης εὐθείας πρὸς ἀναπλήρωσιν τȣ͂ τῶν διαςάσεων ἀριθμοῦ· οὕτως εἰ κατασκευάσαι προκέοιτο $\frac{\alpha^3+\beta+\gamma^2}{\alpha+\beta^2}$, ὑποτιθέντες τὴν μονάδι ἰσωθεῖσαν εὐθεῖαν εἶναι δ, γράψωμεν $\frac{\alpha^3+\beta\delta^2+\gamma^2\delta}{\alpha\delta+\beta^2}$· εἰς κατασκευὴν δὲ ταύτης θῶμεν $\beta^2=\delta\mu$, $\gamma^2=\delta\nu$, ϗ $\alpha^3=\delta^2\pi$· ὅθεν ἡ προτεθεῖσα ποσότης μεταπεσεῖται εἰς τὴν $\frac{\delta^2\pi+\beta\delta^2+\delta^2\nu}{\alpha\delta+\delta\mu}$ $=\frac{\delta\pi+\beta\delta+\delta\nu}{\alpha+\mu}=\frac{(\pi+\beta+\nu)\delta}{\alpha+\mu}$, ἥτις εὐμαρῶς κατασκευάζεται προκατασκευασθεισῶν τῶν δυνάμεων μ, ν, π, εἴτ' ȣ͂ν $\mu=\frac{\beta^2}{\delta}$, $\nu=\frac{\gamma^2}{\delta}$, $\pi=\frac{\alpha^3}{\delta^2}$, αἳ ϗ αὗται εὐμαρῶς κατασκευάζονται (528, 533).

537. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν ἁπάσαις ταῖς ἄρτι ἐκτεθειμέναις κατασκευαῖς, ὁ ἀριθμὸς τῶν ποιητῶν, εἴτ' ȣ͂ν τῶν διαςάσεων ἑκάςȣ τῶν κατὰ τὸν ἀριθμητὴν ὅρων, ὑποτέθειται μονάδι ὑπερέχειν τῶν κατὰ τὸν παρονομαςήν· δυνατὸν δὲ ὑπερέχειν αὐτῶν δυσὶν, ἢ ϗ τρισὶ, μονάσι, πλείοσιν ἀλλ ȣ͂ν ȣ̓δαμῶς, εἰ μὴ εὐθεῖά τις ἰσῶτο μονάδι, ἣ ποιηταὶ τινὲς ἀριθμȣ̀ς ἐμφαίνοιεν.

538. Ὅταν αἱ διαςάσεις τȣ͂ ἀριθμητȣ͂ τῆς προκειμένης ποσότητος ὑπερέχωσι τὰς τȣ͂ παρονομαςȣ͂ δυσὶ μονάσιν, ἡ ποσότης παρίςησιν ἐπιφάνειαν, ἧς δυνατὸν ἀεὶ τὴν κατασκευὴν εἰς τὴν παραλληλογράμμȣ, ἢ ϗ τετραγώνȣ μεταβαλεῖν.

539. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἐὰν εἰς κατασκευὴν πρόκέηται τὸ ποσὸν $\frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta}{\alpha+\gamma}$, ἐκληπτέον αὐτὸ ὡς $\alpha \times \frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha+\gamma}$· ἀλλὰ μὴν $\frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha+\gamma}$ εὐχερῶς κατασκευάζεται (528), ἐκλαμβανόμενον ὡς $\alpha \times \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \gamma}$· ἄρα, τῆς ἐντεῦθεν ἐξισώσης δυνάμεως κληθείσης μ, ἔσαι $\alpha \times \frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha+\gamma} = \alpha\mu$· ἐὰν ἦν γένηται α μὲν ὕψος, μ δὲ βάσις παραλληλογράμμȣ, ἔσαι $\alpha\mu$ τȣ̃ παραλληλογράμμȣ ἡ ἐπιφάνεια· τȣ̉ναντίον ἄρα τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην ἐμφαίνει τὸ $\alpha\mu = \frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta}{\alpha+\gamma}$.

540. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ὡσαύτως κατασκευασθήσεται ϗ τὸ ποσὸν $\frac{\alpha^3 + \beta\gamma^2 + \delta^3}{\alpha+\gamma}$, ὑποτεθέντος $\beta\gamma = \alpha\mu$, καὶ $\delta^2 = \alpha\nu$· τηνικαῦτα γὰρ ὁ τύπος γενήσεται $\frac{\alpha^3 + \alpha\mu\gamma + \alpha\nu\delta}{\alpha+\gamma} = \alpha\left(\frac{\alpha^2 + \mu\gamma + \nu\delta}{\alpha+\gamma}\right)$· ἀλλ᾽ ὁ ποιητὴς $\frac{\alpha^2 + \mu\gamma + \nu\delta}{\alpha+\gamma}$ κατασκευάζεται εὐχερῶς ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων (528), ὡσαύτως ϗ αἱ δυνάμεις τȣ̃ μ, ϗ ν· εὑρεθείσης ȣ̃ν τῆς τȣ̃ ποιητȣ̃ τȣ́τȣ δυνάμεως, ϗ δηλωθείσης διὰ π, ȣ̉δὲν ἄλλο λοιπὸν, ἢ κατασκευάσαι τὸ $\alpha \times \pi$, τȣ̃τ᾽ ἔσι συςῆσαι παραλληλόγραμμον, ȣ̃ ὕψος μὲν εἴη τὸ α, βάσις δὲ ἡ π.

541. Τελευταῖον δὲ, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν τȣ̃ ἀριθμητȣ̃ διαςάσεων τρισὶν ὑπερέχῃ τὰς τȣ̃ παρονομαςȣ̃, ἡ πο-

σότης ἐμφαίνει στερεὸν, ἧ τὴν κατασκευὴν ἀεὶ τρέπειν ἕξεστιν εἰς τὴν παραλληλεπιπέδου.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐὰν προκέηται εἰς κατασκευὴν ἡ ποσότης $\frac{\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2}{\alpha+\gamma}$, ἐκληπτέον αὐτὴν ὡς $\alpha\beta\times\frac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha+\gamma}$ κατασκευασθείσης δὲ κατὰ τὰ προειρημένα (528) τῆς ποσότητος $\frac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha+\gamma}$, ἐὰν ἡ ἐντεῦθεν προκύψασα γραμμὴ κληθῇ μ, τὸ ζήτημα ἀναχθήσεται εἰς τὸ κατασκευάσαι τὸ ποσὸν $\alpha\beta\times\mu$· ἀλλὰ μὴν αβ ἐμφαίνει, ὡς εἴδομεν (540), παραλληλόγραμμον· ἐὰν ἄρα ἐπινοηθῇ παραλληλεπίπεδον, ἧ βάσις μὲν εἴη τὸ εἰρημένον παραλληλόγραμμον, ὕψος δὲ ἡ εὐθεῖα μ, ἡ τοῦ παραλληλεπιπέδου στερεότης ἐκδηλωθήσεται διὰ $\alpha\beta\times\mu=\frac{\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2}{\alpha+\gamma}$.

542. Καὶ τὰ μὲν εἰρημένα ἱκανά εἰσι πρὸς κατασκευὴν ἁπάσης ῥητῆς ποσότητος· ἴδωμεν δὲ ἤδη τῶν ῥιζικῶν ποσοτήτων τὰς δευτεροβαθμίους.

Δυνατὸν οὖν ταύτας κατασκευάζειν, ἤτοι διὰ μέσης ἀναλόγου δυεῖν εὐθειῶν δεδομένων, ἢ διὰ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τριγώνου ὀρθογωνίου, ἢ τελευταῖον διὰ τῆς ἑτέρας τῶν δυεῖν λοιπῶν πλευρῶν τριγώνου ὀρθογωνίου.

543. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Κείσθω κατασκευάσαι τὸ ῥιζικὸν $\sqrt{\alpha\beta}$· ἤχθω τοίνυν εὐθεῖα (σχ. 13) ἀπέραντος ἡ ΑΒ, ἐφ' ἧς εἰλήφθω $\mathrm{A\Gamma}=\alpha$, καὶ $\mathrm{\Gamma B}=\beta$· ἐπὶ δὲ τῆς ὅλης ΑΒ, ὡς διαμέτρου, γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἐκ τοῦ Δ ἐστάσθω κάθετος τῇ ΑΒ ἡ ΔΓ τελευτῶσα πρὸς τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Γ, ἥτις ἔσται ἡ δύναμις τοῦ ῥιζικοῦ $\sqrt{\alpha\beta}$, τοῦτ' ἔστιν εἰς εὕρεσιν τῆς δυνάμεως τοῦ ῥιζικοῦ ποσοῦ $\sqrt{\alpha\beta}$ εὑρετέον μέσην ἀνάλογον τῶν δυεῖν

εὐθειῶν τῶν δί α, β ἐκδηλȣμένων (347)· ἔςι γὰρ ΑΓ : ΓΔ : : ΓΔ : ΓΒ, τȣτ' ἔςιν $\alpha : \Gamma\Delta :: \Gamma\Delta : \beta$ (343)· ἄρα $\Gamma\Delta^2 = \alpha\beta$, ϗ $\Gamma\Delta = \sqrt{\alpha\beta}$.

544. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἐὰν ᾖ ποσότης εἰς κατασκευὴν προκειμένη ἡ $\sqrt{(3\alpha\beta + \beta^2)}$, ἐκληπτέον ταύτην ὡς $\beta \times \sqrt{(3\alpha + \beta)}$ (Συμϐ. Λογ. 167), ϗ εὑρετέον μέσην ἀνάλογον τῶν δυεῖν εὐθειῶν $3\alpha + \beta$, ϗ β.

545. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἐὰν ᾖ $\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta)}$, ἐκληπτέον αὐτὴν ὡς $\sqrt{(\alpha + \beta)} \times \sqrt{(\alpha - \beta)}$, εἴτ' ȣ̃ν $\sqrt{\overline{(\alpha + \beta) \times (\alpha - \beta)}}$, καὶ εὑρετέον μέσην ἀνάλογον τῶν $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$· ἐὰν δὲ ᾖ $\sqrt{(\alpha^2 + \beta\gamma)}$, γενέσθω $\beta\gamma = \alpha\mu$· ἔςαι ȣ̃ν ἡ ποσότης $\sqrt{(\alpha^2 + \alpha\mu)} = \sqrt{(\alpha + \mu)} \times \alpha$· εὑρεθήσεται ἄρα μέση ἀνάλογος τῶν $\alpha + \mu$, α προκατασκευασθείσης τῆς δυνάμεως $\mu = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$ (528).

546. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ΄. Ἵνα κατασκευασθῇ ἡ $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$, δυνατὸν μὲν ὑποθεῖναι $\beta^2 = \alpha\mu$, ϗ κατασκευάσαι τὴν $\sqrt{(\alpha^2 + \alpha\mu)}$, ὡς ἀνωτέρω (545)· δυνατὸν δὲ ϗ ἄλλως τὰ τῆς κατασκευῆς μετελθεῖν· ἤχθω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ (Σχ. 14) = α, ϗ ἐκ τȣ̃ πέρατος αὐτῆς Α ἐςάσθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ = β· ἔςαι ȣ̃ν ἡ ἐπιζευχθεῖσα $\mathrm{B\Gamma} = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$· τȣ̃ γὰρ ΑΒΓ τριγώνȣ ὀρθογωνίȣ ὄντος, ἔςι (349) $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 = \alpha^2 + \beta^2$· ἄρα $\mathrm{B\Gamma} = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$.

547. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Δυνατὸν δὲ διὰ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ϗ τὴν ποσότητα $\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}$ ἄλλως, ἢ ὡς ἀνωτέρω (545), κατασκευάσαι· ἤχθω γὰρ εὐθεῖα (Σχ. 15) ἡ $\mathrm{AB} = \alpha$, ϗ ἐπὶ τῆς ΑΒ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΓΒ, ϗ ἐκ τȣ̃ Α ἐπεζεύχθω χορδὴ ἡ ΑΓ =

β· τοιγαρ̃ν ἡ ἐπιζευχθεῖσα ΓΒ ἔςαι $= \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}$· ὀρθογωνίου γὰρ ὄντος τ̃ ΑΓΒ τριγών (180) ἔςαι (349) $AB^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$· ἄρα $B\Gamma^2 = AB^2 - A\Gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$· ἄρα $B\Gamma = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}$.

548. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Δυνατὸν ὡσαύτως κατασκευάσαι ϗ τὴν ποσότητα $\sqrt{(\alpha^2 + \beta\gamma)}$ ἄλλως, ἢ ὡς κατεσκεύαςαι (545)· γενέσθω γὰρ $\beta\gamma = \mu^2$, ϗ $\sqrt{(\alpha^2 + \mu^2)}$ κατεσκευάσθω, ὡς καταδέδεικται (546)· ἐξευρεῖν μέντοι χρὴ πρότερον τὴν τ̃ μ δύναμιν, ἥτις πορίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\mu^2 = \beta\gamma$· ὅθεν $\mu = \sqrt{\beta\gamma}$· ἔςιν ἄρα ἡ μ μέση ἀνάλογος τῶν βγ κατασκευαζομένη, ὡς ἀνωτέρω (543) εἴρηται.

549. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Ἐὰν δὲ πλειόνων ἢ δυοῖν ὅρων ὑπάρχῃ περιεκτικὸν τὸ ὑπόῤῥιζον ποσὸν, ἡ κατασκευὴ ἀναχθήσεται ἐπί τινας τῶν προαποδοθεισῶν μεθόδων διὰ μεταμορφώσεων· ἐὰν φέρ' εἰπεῖν ᾖ $\sqrt{(\alpha^2 + \beta\gamma + \varepsilon\zeta)}$, γενέσθω $\beta\gamma = \alpha\mu$, ϗ $\varepsilon\zeta = \alpha\nu$· ἐκ̃ν ἡ ποσότης γενήσεται $\sqrt{(\alpha^2 + \alpha\mu + \alpha\nu)} = \alpha \times \sqrt{(\alpha + \mu + \nu)}$, ἥτις κατασκευάζεται, λαμβανομένης μέσης ἀναλόγ̃ τῶν α, $\alpha + \mu + \nu$, προκατασκευασθεισῶν ἀμέλει τῶν δυνάμεων μ, ν, εἴτ' ἔν $\mu = \frac{\beta\gamma}{\gamma}$, ϗ $\nu = \frac{\varepsilon\zeta}{\alpha}$· δυνάμεθα μέντοι ποιήσαντες $\beta\gamma = \mu^2$, ϗ $\varepsilon\zeta = \nu^2$ κατασκευάσαι τὴν ποσότητα $\sqrt{(\alpha^2 + \mu^2 + \nu^2)}$· ἀλλὰ γὰρ ἐὰν ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης ᾖ σειρὰ ποσοτήτων ὑπαρκτικῶν, οἷα, φέρ' εἰπεῖν, ἡ $\sqrt{(\alpha^2 + \eta^2 + \nu^2 + \pi^2}$, κτλ), γενέσθω $\sqrt{(\alpha^2 + \mu^2)} = \eta$, ϗ $\sqrt{(\eta^2 + \nu^2)} = \iota$, καὶ $\sqrt{(\iota^2 + \pi^2)} = \kappa$, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως· ϗ ἐπεὶ ἑκάςη τῶν δε τῶν ποσοτήτων διὰ τῆς πρὸ αὐτῆς προσδιορίζεται, ἐκ τῆς ἐσχάτης προκύψει ἡ δύναμις τῆς $\sqrt{(\alpha^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2 + \kappa\tau\lambda.)}$· ἵνα δὲ κατασκευασθῶσιν,

ὡς οἷόν τε, ἁπλέστερον αἱ ποσότητες αὗται, ἐκληφθήτω ἑκάστῃ ὑποτείνουσα ὀρθὴν γωνίαν τριγώνου, ἄλλημετ' ἄλλην, ὡς πλευρά· τεθήτω φέρ' εἰπεῖν (σχ. 16.) ΑΒ $=\alpha$, καὶ ἑστάσθω κάθετος ΑΓ $=\mu$· ἔσται οὖν ἡ ἐπιζευχθεῖσα ΒΓ $=\eta$· ἑξῆς δ' ἑστάσθω ἐκ τοῦ Γ τῇ ΒΓ κάθετος ἡ ΓΔ $=\nu$· ἡ τοίνυν ἐπιζευγνυμένη ΒΔ ἔσται $=\iota$· ἐκ δὲ τοῦ πέρατος Δ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθείσης τῆς ΔΕ $=\pi$, ἔσται ΒΕ $=\kappa=\surd(\alpha^2+\mu^2+\nu^2+\pi^2)$· ἐὰν δὲ μεταξὺ ὦσι καὶ τετράγωνα λειπτικά, πεπράχθω τὰ εἰρημένα εἰς κατασκευὴν τῆς ποσότητος $\surd(\alpha^2-\beta^2)$ (547).

550. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Ε΄. Ἐὰν προκέηται κατασκευάσαι ποσότητα ἔχουσαν τύπον τοιόνδε $\frac{\alpha\surd(\beta+\gamma)}{\surd(\delta+\varepsilon)}$, πολλαπλασιασθεῖσα τόντε ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ $\surd(\delta+\varepsilon)$, τραπήτω εἰς $\frac{\alpha\surd(\beta+\gamma)(\delta+\varepsilon)}{\delta+\varepsilon}$, καὶ ζητηθήτω μέση ἀνάλογος τῶν $\beta+\gamma$, καὶ $\delta+\varepsilon$· ταύτης δὲ κληθείσης μ, λοιπὸν ἔσται κατασκευάσαι τὴν ποσότητα $\frac{\alpha\mu}{\delta+\varepsilon}$, ὃ ῥαδίως δήπου ἐπιτηδευθήσεται (528).

551. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν γένει δ' εἰπεῖν ἁπλέστατα πολλάκις αἱ συμβολικαὶ ποσότητες κατασκευάζονται διὰ τῶν ἐκτεθειμένων ἀρχῶν· τοῦτὶ μέντοι ἐκ σκέψεων τινῶν περιγίνεται ἰδιαιτέρων, οἰκείως ἐχουσῶν ἑκάστῳ ζητήματι, καὶ κανόσι περιορισθῆναι οὐκ ἔχει· σημειωτέον μόνον, ὅτι ἡ τῶν ῥιζικῶν ποσῶν κατασκευὴ ἀνάγεται εἰς τὸ εὑρίσκειν τετάρτας ἀναλόγους, καὶ μέσας ἀναλόγους, καὶ τρίγωνα κατασκευάζειν ὀρθογώνια· δυνατὸν ἀλλ' οὖν ἔσθ' ὅτε τὰς κατασκευὰς μᾶλλον ἢ ἧττον ἁπλᾶς, καὶ κομψὰς, ἀπεργάζεσθαι, καθ' ἣν ἂν ἑλοίμεθα μέθοδον, εἰς εὕρεσιν τῶνδε τῶν

μέσων ἀναλόγων· διὸ δὴ παρὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν ἐν (347) μεθόδȣς ἄλλας δισσὰς ἐνταῦθα ὑποςρώσομεν τȣ̃ εὑρίσκειν μέσην ἀνάλογον δυεῖν εὐθειῶν δεδομένων.

552. ΜΕΘΟΔΟΣ Α΄. Ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας μιᾶς τῶν δυεῖν δεδομένων γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ (σχ. 15.), ϗ ληφθέντος τȣ̃ ΑΔ αὐτῆς μέρȣς ἴσȣ θατέρα, ἐςάσθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΓ· ἐπιζευχθεῖσα ȣ̃ν ἡ ΑΓ ἔςαι μέση ἀνάλογος τῶν ΑΒ, ΑΔ· ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΓΒ, τὸ τρίγωνον ΑΓΒ ἐςιν ὀρθογώνιον (180), ϗ ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ ἡ ΑΓ μέση ἐςὶν ἀνάλογος τῆς τε τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινȣ́σης ΑΒ, ϗ τȣ̃ τμήματος ΑΔ (342).

553. ΜΕΘΟΔΟΣ Β΄. Ἤχθω εὐθεῖα (σχ. 17.) ἡ ΑΒ ἴση τῇ μείζονι τῶν δυεῖν δεδομένων εὐθειῶν, ϗ εἰλήφθω ἐπ᾽ αὐτῆς μέρος τὸ ΑΓ τῇ ἐλάσσονι ἴσον, ϗ ἐπὶ τȣ̃ λοιπȣ̃ ΒΓ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΓΔΒ, ȣ̃ ἤχθω ἡ ἁπτομένη ΑΔ (153), ἥτις ἐςὶ μέση ἀνάλογος τῶν ΑΒ, ΑΓ (331).

554. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δῆλον ἄρα, ὡς αἱ μὲν ῥηταὶ ποσότητες ἀεὶ δύνανται κατασκευάζεσθαι δι᾽ εὐθειῶν, τῶν δὲ ῥιζικῶν αἱ δευτεροβάθμιοι, διὰ κύκλȣ ϗ εὐθείας ἀλλήλοις συνερχομένων· αἱ μέντοι καθυπερτέρων βαθμῶν ῥιζικαὶ ποσότητες διὰ τῆς συνδρομῆς παντοίων καμπύλων γραμμῶν, περὶ ὧν ἐν τῇ ὑψηλοτέρᾳ Γεωμετρίᾳ ῥηθήσεται, κατασκευῆς τυγχάνȣσι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Γεωμετρικῶν προβλημάτων ἐπίλυσις διὰ τȣ̃ συμβολικȣ̃ λογισμȣ̃.

555. Ἡ μέθοδος τȣ̃ γεωμετρικὰ προβλήματα διὰ τȣ̃ συμβολικȣ̃ λογισμȣ̃ ἐπιλύειν ἀνάλυσις γεωμετρικὴ ἤκȣσε· προαπαιτȣ̃νται δ' ἐν ταύτῃ ὡς γνώριμα ἔνιαι τῆς, περὶ ἧς ζητεῖται, ποσότητος ἰδιότητες, δι' ὧν κατασκευάζεται ἐξίσωσις ἡ τὸ ζήτημα ἐπιλύȣσα· ȣ̓χ' ὅπως δὲ, ἃ παρέδομεν ἐν τῷ δευτέρῳ τόμῳ (Συμβ. Λογ. Τμ. Γ.), ἀναγκαῖα ὑπάρχει ἐνταῦθα, ἀλλὰ δὴ ϗ ἄλλα, ἃ προϊȣ̃σι μᾶλλον ϗ μᾶλλον γνώριμα καταςαθήσεται.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ὑποδειγμάτων ἀνθαπτέον, ἵν' αὐτοῖς ἅλις προενασκηθέντες οἷοί ποτε γενοίμεθα τὰ περὶ ἐπιλύσεως τῶν ἐν ταῖς καμπύλαις ζητουμένων ἀκριβῶς εἰδέναι.

556. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τῷ δοθέντι (σχ. 18.) τριγώνῳ ΕΗΙ, εἴτ' ȣ̓̃ν, ȣ̔̃ αἵτε πλευραὶ ϗ αἱ γωνίαι ϗ τὸ ὕψος ἐγνωσμένα ὑπάρχȣσι, τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ ἐγγράψαι.

ΛΥΣΙΣ. Τὸ πρόβλημα τόδε καλῶς ἐπιςήσασιν ȣ̓δὲν βȣ́λεται, ὅτι μὴ ἐπὶ τȣ̃ ὕψȣς ΕΖ σημεῖον ὁρίσαι τὸ Θ, δι' ȣ̔̃ ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ ΗΙ ἴση εἴη τῇ ΘΖ, εἴτ' ȣ̓̃ν διὰ συμβολικῶν ποσοτήτων διορίσαι τὴν ΑΒ εὐθεῖαν $=$ τῇ ΖΘ.

Ἔςω ȣ̓̃ν τὸ μὲν γνωςὸν ὕψος ΕΖ $= \alpha$, ἡ δὲ γνωςὴ βάσις ΑΙ $= \beta$· ϗ ἡ ἄγνωςος ΘΖ $= \chi$· ȣ̓κȣ̃ν ΕΘ $= \alpha - \chi$· ἐπεὶ τοίνυν ΑΒ παράλληλός ἐςι τῇ ΗΙ (318 321)· ἄρα ΕΖ : ΕΘ : : ΖΙ : ΘΒ : : ΗΙ : ΑΒ, εἴτ'

ἐν ΕΖ : ΕΘ : : ΗΙ : ΑΒ, τῦτ' ἔςιν $\alpha : \alpha - \chi :: \beta :$ ΑΒ, ἄρα ΑΒ $= \frac{\alpha\beta - \beta\chi}{\alpha}$ (Συμϐ. λογ. 250.)· ἐπεὶ δὲ ΑΒ δέον εἶναι = ΘΖ, ἔςαι $\frac{\alpha\beta - \beta\chi}{\alpha} = \chi$, ὅθεν διὰ τῶν καταδειχθέντων κανόνων (Συμβ. λογ. 415, κτλ.) $\chi = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Εἰς κατασκευὴν δὲ ταύτης τῆς ποσότητος, ἐπάναγκες διορίσαι (528) τετάρτην ἀνάλογον ταῖς $\alpha + \beta$, β, α· ἤχθω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΖΟ $= \alpha + \beta =$ ΕΖ + ΗΙ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΟ, ϗ εἰλήφθω ΖΜ = ΗΙ $= \beta$, ϗ παράλληλος τῇ ΕΟ ἤχθω ἡ ΜΘ, ἥτις συμϐαλῦσα τῇ ΕΖ διορίσει τὴν ΘΖ $= \chi$· ἐκ γὰρ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕΖΟ, ΘΖΜ, ἀποφέρεται ΖΟ : ΖΜ : ΖΕ : ΖΘ, εἴτ' ὖν, $\alpha+\beta$: $\beta :: \alpha :$ ΖΘ $= \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. Ο. Ε. Π.

557. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β. Δοθέντων (σχ. 19) τῶν ὑψῶν ΑΓ, ΒΔ δύω ῥαϐδίων ΑΓ, ΒΔ, ἐπιπέδῳ ἐφιςαμένων, ϗ τῦ ΑΒ αὐτῶν ἀποςήματος, εὑρεῖν ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον τὸ Ε, ὃ ἴσον ἀπέχοι τῦ τε Γ, ϗ τῦ Δ.

ΛΥΣΙΣ. Εἰ μὲν ἐξείη ἐπιζεῦξαι εὐθεῖαν τὴν ΓΔ, ὐδὲν ἂν ἔδει ποιῆσαι, ἢ ἐγεῖραι ἐκ τῦ μέσυ τῆς ΓΔ κάθετον τὴν ΚΕ, προσδιορίσυσαν τὸ σημεῖον Ε (402)· εἰ δ' ὖν· κατάγε μὴν τὸν ἐφεξῆς προσδιορισθήσεται τρόπον.

Ἔςω ΑΓ $= \alpha$, ϗ ΔΒ $= \beta$, ϗ ΑΒ $= \gamma$, ϗ ΑΕ $= \chi$· ὐκῦν ΒΕ $= \gamma - \chi$, ϗ ΓΕ $= \sqrt{(\alpha\alpha + \chi\chi)}$ (351)· ϗ ΔΕ $= \sqrt{(\beta\beta + (\gamma - \chi)^2)}$· ἀλλὰ ζητεῖται εἶναι ΓΕ = ΔΕ· ἄρα $\sqrt{(\alpha\alpha + \chi\chi)} = \sqrt{(\beta\beta + (\gamma - \chi)^2)}$· ὅθεν τετρα-

γωνιζομένων ἑκατέρȢ τῶν μελῶν, ȣ̓ τῶν μεταξὺ πράξεων γινομένων, ἀποφέρεται $\chi = \frac{\gamma\gamma - \alpha\alpha + \beta\beta}{2\gamma} = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2} \cdot \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\gamma}$· ἐντεῦθεν ἡ κατασκευὴ γενήσεται τὸν ἀκόλȢθον τρόπον.

Διὰ τȢ̃ μέσȢ σημείȢ Λ τῆς ΑΒ ἤχθω ΙΛΘ παράλληλος τῇ ΑΓ, ἥτις συμβαλεῖ τῇ ΔΖ παραλλήλῳ τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Θ, ȣ̓ εἰλήφθω $\text{ΛΙ} = \frac{1}{2}\gamma = \text{ΛΑ}$, ȣ̓ $\text{ΛΗ} = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}\text{ΓΖ}$, ȣ̓ $\text{ΛΟ} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \beta = \text{ΘΗ}$, ȣ̓ ἐπεζεύχθω ἡ ΙΟ, ȣ̓ διὰ τȢ̃ Η ἤχθω τῇ ΙΟ παράλληλος ἡ ΗΕ, ἥτις συμβαλεῖ τῇ ΑΒ κατὰ τὸ ζητȢ́μενον σημεῖον Ε· ȣ̓ γὰρ ΛΙ : ΛΟ :: ΛΗ : ΛΕ, τȢ̃τ' ἔςι $\frac{1}{2}\gamma : \frac{1}{2}(\alpha + \beta) :: \frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \text{ΛΕ}$· ἄρα $\text{ΛΕ} = \frac{\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \times \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\frac{1}{2}\gamma} = \frac{1}{2}\frac{(\alpha + \beta) \times (\alpha - \beta)}{\gamma}$.

ἀλλὰ $\text{ΑΕ} = \text{ΑΛ} - \text{ΛΕ} = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\frac{(\alpha + \beta) \times (\alpha - \beta)}{\gamma}$, ἄρα $\text{ΑΕ} = \chi$· Ο Ε Π.

558. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τρίτον δὲ ὑπόδειγμα τοιόνδε ἐφεξῆς ἐκθησόμεθα, ὃ δώσει κατιδεῖν, ὅπως ἐμπερικλείειν ἐξισώσεσι καθολικαῖς δυνησόμεθα προβλήματα γεωμετρικὰ, ȣ̓ ὅπως διὰ διαφόρων προπαρασκευῶν τῶν ἐξισώσεων ἐξέςαι καινὰς ἰδιότητας ἀνακαλύπτειν.

559. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. ΤριγώνȢ τȢ̃ ΑΒΓ (σχ. 20) δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν, εὑρεῖν τὰ τμήματα ΑΔ, ΔΓ, ȣ̓ τὴν τέμνȢσαν κάθετον ΒΔ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπειδὴ (349) $\text{ΒΔ}^2 + \text{ΓΔ}^2 = \text{ΒΓ}^2$, ȣ̓ $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΒΔ}^2 = \text{ΑΒ}^2$, ἐὰν ῥηθῇ $\text{ΒΑ} = \upsilon$, ȣ̓ $\text{ΓΔ} = \chi$, ȣ̓ $\text{ΒΓ} = \alpha$, ȣ̓ $\text{ΑΒ} = \beta$, ȣ̓ $\text{ΑΓ} = \gamma$, ȣ̓ δὴ $\text{ΑΔ} = \text{ΑΓ} - \text{ΓΔ}$

$= \gamma - \chi$, ἀποφέρονται δύω ἐξισώσεις, $\chi\chi + \upsilon\upsilon = \alpha\alpha$, ϗ $\gamma\gamma - 2\gamma\chi + \chi\chi + \upsilon\upsilon = \beta\beta$.

Ἐπεὶ δὲ $\chi\chi$ ϗ $\upsilon\upsilon$ ἐν ἑκατέρᾳ ἐξισώσει οὐδένα συνεργὸν ἔχουσιν, ἢ τὴν μονάδα, ἀφῃρήσθω ἡ δευτέρα ἀπὸ τῆς πρώτης, ϗ δὴ καταλειφθήσεται $2\gamma\chi - \gamma\gamma = \alpha\alpha - \beta\beta$· ὅθεν $\chi = \frac{\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma}{2\gamma} = \frac{\alpha\alpha - \beta\beta}{2\gamma} + \frac{1}{2}\gamma$, ὃ γράψαι οὕτω δυνάμεθα $\chi = \frac{1}{2}\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\gamma} + \frac{1}{2}\gamma$.

Ἐν τούτῳ οὖν τῷ τύπῳ αὐτίκα σαφὲς, ὡς εἰς εὕρεσιν τῆς χ ἐπάναγκες (528) τετάρτην λαβεῖν ἀνάλογον πρὸς τὰς γ, $\alpha + \beta$, ϗ $\alpha - \beta$, ϗ ταύτης λαβόντας τὸ ἥμισυ, προσθεῖναι αὐτῷ τὸ $\frac{1}{2}\gamma$, εἴτ' οὖν $\frac{1}{2}$ ΑΓ.

Ἀλλὰ γὰρ ἐκ τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων πολλὰ ϗ ἄλλα ἐξέσται συναγαγεῖν, ὧν ἔνια τοῖς πρωτοπείρων ὀφθαλμοῖς ὑποβαλεῖν οὐχ ὅπως ἐπωφελὲς ἀλλὰ δὴ ϗ ἀναγκαῖον ἴσμεν ἐσόμενον.

560. Α΄. Ἡ ἐξίσωσις $2\gamma\chi - \gamma\gamma = \alpha\alpha - \beta\beta$ ταὐτὸν δύναται, ὃ ϗ $\gamma \cdot (2\chi - \gamma) = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$· ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως σαφὲς προϊέναι ἀναλογίαν τοιάνδε $\gamma : \alpha + \beta :: \alpha - \beta : 2\chi - \gamma$· ἀλλὰ $2\chi - \gamma = \chi - (\gamma - \chi)$· ἄρα ἀντὶ τῶν συμβολικῶν ἐκθέσεων ἀντικατασταθεισῶν τῶν αὐταῖς ἐμφαινομένων εὐθειῶν, ἔσται ΑΓ : ΒΓ + ΑΓ :: ΒΓ — ΑΓ : ΓΔ — ΑΔ, ὅπερ ταὐτόν ἐστιν ἀκριβῶς τῷ ἀποδειχθέντι (500).

561. Β΄. Ἐὰν κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ τόξον γραφῇ τὸ ΒΟ, ϗ ἐπιζευχθῇ ἡ χορδὴ ΒΟ, ἔσται ΒΔ^2 + ΔΟ^2 = ΒΟ^2· ἀλλὰ ΔΟ = ΓΟ — ΓΔ = ΒΓ — ΓΔ = $\alpha - \chi$· ἄρα ΒΟ^2 $= \upsilon\upsilon + \alpha\alpha - 2\alpha\chi + \chi\chi$· εὕρηται δὲ ἀνω-

τέρω (459) $\nu\nu + \chi\chi = \alpha\alpha$· ἄρα $BO^2 = 2\alpha\alpha - 2\alpha\chi = 2\alpha(\alpha - \chi)$· τεθείσης ἂν ἀντὶ χ τῆς αὐτῦ δυνάμεως $\frac{\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma}{2\gamma}$, ποϱισθήσεται $BO^2 = 2\alpha\left(\alpha + \frac{\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\gamma}{2\gamma}\right) = 2\alpha\,\frac{(2\alpha\gamma - \alpha\alpha - \gamma\gamma + \beta\beta)}{2\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} \times [\beta\beta - (\alpha - \gamma)^2]$, εἴγε $2\alpha\gamma - \alpha\alpha - \gamma\gamma = -(\alpha\alpha - 2\alpha\gamma + \gamma\gamma) = -(\alpha - \gamma)^2$· ἀλλ ἐκληφθείσης $\alpha - \gamma$ ἀντὶ μιᾶς μόνης ποσότητος, ἀποφέρεται $\beta\beta - (\alpha - \gamma)^2 = (\beta + \alpha - \gamma)(\beta - \alpha + \gamma)$· ἄρα $BO^2 = \frac{\alpha}{\gamma}(\beta + \alpha - \gamma)(\beta - \alpha + \gamma)$, ὅπερ παραςῆσαι δυνάμεθα διὰ τῦ δε τῦ τύπυ $BO^2 = \frac{\alpha}{\gamma}(\alpha + \beta + \gamma - 2\gamma)(\alpha + \beta + \gamma - 2\alpha)$· τοιγαρῦν ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν κληθῇ 2κ, ἔςαι $BO^2 = \frac{\alpha}{\gamma}(2\kappa - 2\gamma)(2\kappa - 2\alpha) = 4\frac{\alpha}{\gamma}(\kappa - \gamma)(\kappa - \alpha)$· ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ τῦ Γ κάθετος ἀχθῇ τῇ ΟΒ ἡ ΓΙ, ἔςαι (496) ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΓΙΟ ἡ ἀναλογία ΓΟ : ΟΙ : : Η : ἡμ. ΟΓΙ, τῦτ' ἔςιν α $\frac{1}{2}$ ΒΟ : : Η : ἡμ. ΟΓΙ· ἄρα $\frac{1}{2} BO = \frac{\alpha\ \text{ἡμ. ΟΓΙ}}{H}$, ἢ $BO = \frac{2\alpha\ \text{ἡμ ΟΓΙ}}{H}$, καὶ δὴ $BO^2 = \frac{4\alpha^2\ (\text{ἡμ. ΟΓΙ})^2}{H^2}$· ἐκ δὴ τῶν δύω δυνάμεων τῦ BO^2 ἀποφέρεται $\frac{4\alpha}{H^2}(\text{ἡμ. ΟΓΙ})^2 = \frac{4\alpha}{\gamma}(\kappa - \gamma)(\kappa - \alpha)$· διαιρέσει δὲ διὰ 4α, καὶ ἄρσει τῶν παρονομαςῶν, ἔσεται $\alpha\gamma\,(\text{ἡμ. ΟΓΙ})^2 = H^2(\kappa - \gamma)(\kappa - \alpha)$· ἐντεῦθεν ἄρα

$\alpha\gamma : (\varkappa - \gamma)(\varkappa - \alpha) :: H^2 : (\text{ἡμ. ΟΓΙ})^2$· ὅθεν ἐκπηγάζει κανὼν ἁπλȣ̃ς εἰς θήρευσιν γωνίας ἡςινοσȣ̃ν τριγώνȣ εὐθυγράμμȣ, ȣ̃ αἱ τρεῖς δέδονται πλευραί· ἀμέλειτοι

„ Τȣ̃ ἡμιαθροίσματος τῶν τριῶν πλευρῶν ἀφῃρήσθω „ ἄλλη μετ' ἄλλην ἑκατέρα τῶν τὴν ζητȣμένην γωνίαν περιε„ χȣσῶν πλευρῶν· ὅθεν ἐξίασι δύω κατάλοιπα· ἑξῆς δὲ „ γενέσθω ἤδε ἡ ἀναλογία : τὸ γινόμενον ὑπὸ δύω πλευρῶν „ τῶν τὴν ζητȣμένην γωνίαν περιεχȣσῶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν „ δύω καταλοίπων γινόμενον, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος τε„ τράγωνον πρὸς τέτρατόν τινα ὅρον, ὅς ἔςαι τὸ ἀπὸ τȣ̃ ἡ„ μιτόνȣ τῆς ἡμισείας ζητȣμένης γωνίας τετράγωνον.“

562. Γ. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon\upsilon + \chi\chi = \alpha\alpha$ ἀποφέρεται $\upsilon\upsilon = \alpha\alpha - \chi\chi = (\alpha + \chi)(\alpha - \chi)$· ἀντὶ ἄρα τȣ̃ χ ἀντικαταςάσης τῆς αὐτȣ̃ δυνάμεως προκύψει $\upsilon\upsilon =$

$$\left(\alpha + \frac{\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma}{2\gamma}\right)\left(\alpha + \frac{\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\gamma}{2\gamma}\right) =$$

$$\left(\frac{2\alpha\gamma + \alpha\alpha + \gamma\gamma - \beta\beta}{2\gamma}\right) \times \left(\frac{2\alpha\gamma - \alpha\alpha - \gamma\gamma + \beta\beta}{2\gamma}\right)$$

$$= \left(\frac{(\alpha + \gamma)^2 - \beta\beta}{2\gamma}\right) \times \left(\frac{\beta\beta - (\alpha - \gamma)^2}{2\gamma}\right) =$$

$$\frac{(\alpha + \gamma + \beta)(\alpha + \gamma - \beta)}{2\gamma} \times \frac{(\beta + \alpha - \gamma) \times (\beta - \alpha + \gamma)}{2\gamma}$$

ἄρα $4\gamma\gamma\upsilon\upsilon = (\alpha + \gamma + \beta)(\alpha + \gamma - \beta)(\beta + \alpha - \gamma)(\beta - \alpha + \gamma)$, ἢ $4\gamma\gamma\upsilon\upsilon = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma - 2\beta)(\alpha + \beta + \gamma - 2\gamma)(\alpha + \beta + \gamma - 2\alpha)$· τεθέντος ȣ̃ν $2\varkappa = \alpha + \beta + \gamma$, ἕξομεν $4\gamma\gamma\upsilon\upsilon = 2\varkappa \cdot (2\varkappa - 2\beta)(2\varkappa - 2\gamma)(2\varkappa - 2\alpha)$, ἢ $4\gamma\gamma\upsilon\upsilon = 16\varkappa \cdot (\varkappa - \alpha)(\varkappa - \beta)(\varkappa - \gamma)$· διαιρέσει δὲ διὰ 16 καὶ ἀναγωγῇ, καὶ ἐξαγωγῇ τῆς τετρα-

γωνικῆς ῥίζης, προέρχεται $\frac{\gamma\upsilon}{2} = \surd[\varkappa \cdot (\varkappa - \alpha)(\varkappa - \beta)(\varkappa - \gamma)]$· ἀλλὰ $\frac{\gamma\upsilon}{2}, = \frac{\mathrm{A\Gamma} \times \mathrm{B\Delta}}{2}$, ἐστιν ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ τριγώνȣ ΑΒΓ· ἄρα „Τριγώνȣ παντὸς, ȣ̃ δέδονται αἱ τρεῖς „πλευραὶ, ἵν' εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια, τȣ̃ ἡμιαθροίσματος τῶν „πλευρῶν ἀφαιρετέον ἄλλην μετ' ἄλλην ἑκάστην τῶν τριῶν „πλευρῶν, καὶ πολλαπλασιαστέον τὰ κατάλοιπα ἐπ' ἄλληλά „τε, καὶ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα, τȣ̃ δὲ γινομένȣ ἐξακτέον ῥί„ζαν τὴν τετραγώνειον.“

563. Δ΄. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $2\gamma\chi - \gamma\gamma = \alpha\alpha - \beta\beta$ πρόεισι $\beta\beta = \alpha\alpha + \gamma\gamma - 2\gamma\chi$ (χ. 21)· ἐὰν μέντοι ἡ κάθετος ἐκτὸς τῆς βάσεως πίπτῃ, εὑρεθείη ἂν, τηρȣμένων τῶν αὐτῶν ὀνομάτων, $\upsilon\upsilon + \chi\chi = \alpha\alpha$, καὶ $\beta\beta = \upsilon\upsilon + \gamma\gamma + 2\gamma\chi + \chi\chi$· ἡ γὰρ ΑΔ, τὸ πρὶν ȣ̃σα $\gamma - \chi$, ἐστι τανῦν $\gamma + \chi$· ȣ̓κȣ̃ν ἀφαιρεθείσης τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἀπὸ τῆς δευτέρας, πρόεισι $\gamma\gamma + 2\gamma\chi = \beta\beta - \alpha\alpha$, ἢ $\gamma(\gamma + 2\chi) = (\beta + \alpha) \times (\beta - \alpha)$· ὅθεν $\gamma : \beta + \alpha :: \beta - \alpha : \gamma + 2\chi$· ἀλλὰ $\gamma + 2\chi = \chi + \gamma + \chi = \Gamma\Delta + \mathrm{A\Delta}$· ἄρα καὶ $\mathrm{A\Gamma} : \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} :: \mathrm{AB} - \mathrm{B\Gamma} : \Gamma\Delta + \mathrm{A\Delta}$, ὃ καὶ ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει δείκνυσι τὴν καθολικότητα τῆς ἀποδειχθείσης προτάσεως (500).

564. Ε΄. Ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως $\gamma\gamma + 2\gamma\chi = \beta\beta - \alpha\alpha$ προκύπτει $\beta\beta = \alpha\alpha + \gamma\gamma + 2\gamma\chi$· ταύτην ȣ̓̃ν τὴν ἐξίσωσιν παρατιθεμένοις πρὸς τὴν $\beta\beta = \alpha\alpha + \gamma\gamma - 2\gamma\chi$, τὴν ἐπὶ τȣ̃ 20 σχήματος, κατάδηλον, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινȣ́σης τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Γ πλευρᾶς ΑΒ τετράγωνον ββ ἔλαττόν ἐστι τȣ̃ ἀθροίσματος $\alpha\alpha + \gamma\gamma$ τῶν ἀπὸ τῶν περιεχȣσῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν τετραγώνων τῷ 2γχ· τȣ̓ναντίον δὲ τὸ ἀπὸ

τῆς ὑποτεινȣ́σης τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν (σχ. 21) πλευρᾶς ΑΒ τετράγωνον ββ δύναται αα + γγ + 2γχ, τȣτ' ἔςι μεῖζόν ἐςι τȣ̃ εἰρημένȣ ἀθροίσματος τῇ αὐτῇ ποσότητι 2γχ· ἑκάτερα δὲ ταῦτα, ἡμῖν μὲν ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἄχρηςα ἐγένοντο· τῷ δ' Εὐκλείδῃ τὸ μὲν πρῶτον ἡ ΙΓ΄. τὸ δὲ δεύτερον ἡ ΙΒ΄. καταριθμȣ̃νται τῶν τȣ̃ δευτέρȣ βιβλίȣ προτάσεων.

565. ϛ΄. Αἱ δύω ἐξισώσεις ββ = αγ + γγ — 2γχ ἤ ββ = αα + γγ + 2γχ δεικνῦσι τὴν τῶν λειπτικῶν πρὸς τὰς ὑπαρκτικὰς ποσότητας ἐναντιότητα· ἐὰν μὲν γὰρ (σχ. 20, 21) ἡ κάθετος ΒΔ ἐπὶ τῆς βάσεως πίπτῃ τȣ̃ τριγώνȣ, τὸ τμῆμα ΓΔ πρὸς δεξιὰν κεῖται τῆς καθέτȣ· ἐὰν δ' ἐκτὸς, πρὸς ἀριςεράν· ἀλλ' ἐν ταῖς δυσὶν ἐξισώσεσιν ὁ ὅρος 2γχ ἔχει ἀληθῶς σύμβολα ἐναντία· ἄρα τȣ̉ναντίον, ὁποῖοι ἂν εἶεν οἱ λογισμοὶ ἐπὶ θατέρȣ τῶν δύω τριγώνων, ἕξομεν τὰ συμβαίνοντα ταῖς ἀναλόγοις περιπτώσεσι θατέρȣ, ἀπονέμοντες σύμβολα ἐναντία τοῖς ἐναντίως ἔχȣσι θέσεως μέρεσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας· ἀλλ' ἐπὶ τῶν ἤδη εἰρημένων (561, 562)· τὸ ΓΔ τμῆμα ȣ̉δεμίαν ἴχει χώραν· οἱ δύω ἄρα κανόνες ἐκεῖνοι καθόλȣ ἐπαληθεύȣσι παντὶ εὐθυγράμμȣ τριγώνȣ εἴδει.

566. ΣΧΟΛΙΟΝ. Καίπερ ἐν γένει τοσȣ́τῳ ῥᾷον τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα ἐν ἐξισώσεσι περικλείονται, ὅσῳ περ ἂν πλείȣς ἴσμεν ἰδιότητας τῶν γραμμῶν· ἐπείπερ ἔμπης αὐτὸς ὁ συμβολικὸς λογισμὸς ἀνιχνεύει τὰς ἰδιότητας ταύτας, ὧν ἐπιδεόμεθα προτάσεων, λίαν εἰσὶν ὀλιγάριθμοι. Τὰ γὰρ „ὅτι τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογον ἔχȣσι“ καὶ „τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινȣ́σης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχȣσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετραγώνοις“, κρηπὶς ταῦτα ὑφέςηκε τῆς τȣ̃ συμβολικȣ̃ λογισμȣ̃ τῇ Γεωμετρίᾳ

προσεφαρμόσεως. Ἀλλὰ κατὰ τὴν διάφορον φύσιν τῶν ζητημάτων, ἐξέςαι διαφόρως χρήσασθαι ταύταις ταῖς προτάσεσιν· ἢ ἣν μὲν ῥάςη ἡ χρῆσις τῶν ἀναλογιῶν ἐν τῷ ἄρτι διαληφθέντι προβλήματι· ἑξῆς δὲ, ὧν ἐποριζάμεθα πρὸς λογισμὸν τῆς γωνίας διὰ τῶν τριῶν πλευρῶν, ἢ τῆς χορδῆς (σχ. 20) ΒΟ διὰ τοῦ γραφέντος τόξου ΒΟ, ἢ τοῦ τῆς ὑπὸ ΟΓΙ γωνίας ἡμιτόνου, αὐτίκα δυσχερὴς ἐπιεικῶς προσέπιπτεν ἡ κατασκευή· εἰσὶ δὲ ἢ ἄλλα προβλήματα, ἐφ᾽ οἷς, εἴτε εὐθείας προαγαγεῖν δέοι, ἐς τ᾽ ἂν ἄλλαις συμβάλωσι, εἴτε παραλλήλους πρὸς ἑτέρας, ἢ γωνίαν δεδομένην μεθ᾽ ἑτέρων ποιούσας, δυσχερῶς τὰ τῆς κατασκευῆς ἐπιτηδεύεται· συνελόντι δ᾽ εἰπεῖν οὐ τὴν τυχοῦσαν ἀπαιτεῖ ἀγχίνοιαν ἢ κρίσιν ἐν τῇ αἱρέσει τῶν κατασκευαςικῶν μέσων ἡ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ τῇ Γεωμετρίᾳ προσοικείωσις· ἐπεὶ δὲ τῆς κρίσεως ταύτης διὰ τῆς χρήσεως ἐγκρατεῖς γινόμεθα, φέρε παντοίοις ἄλλοις ὑποδείγμασι τοὺς τὴν ἀνάλυσιν μελετῶντας ἐγγυμνάσωμεν.

567. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Ἀπὸ σημείου τοῦ Α (σχ. 22), οὗ δέδοται ἡ θέσις ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΗΔ, ΔΙ, περιεχούσας γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΗΔΙ, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν, ὅπως τὸ συνιςάμενον τρίγωνον ΕΔΘ, ἴσον ᾖ τῷ δοθέντι τετραγώνῳ γγ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τοῦ Α ἤχθω τῇ ΔΗ παράλληλος ἡ ΑΒ, ἢ ἡ ΑΓ ἐςάθω κάθετος τῇ ΔΘ προαχθείσῃ, ἢ ἐκ τοῦ Ε, καθ᾽ ὃ ἡ ΑΕΘ συναντᾷ τῇ ΔΗ κατήχθω κάθετος ἡ ΕΖ· γνωςῶν οὖν γενομένων τῶν ΕΖ, ΔΘ, ἔςαι $\frac{ΕΖ \,.\, ΔΘ}{2} =$ ΕΔΘ $= γγ$· ἢ δὴ ἔςω ΔΘ $= χ$· τὴν δὲ ΕΖ σκεπτέον, εἰ ἄρα διορίσαι δυναίμεθα, εἴτε διὰ τῆς $χ$, εἴτε διὰ τῶν

ἐν τῷ προβλήματι δεδομένων· ἐπεὶ δὲ γνωστή ἐστιν ἡ θέσις τοῦ Α σημείου, ἐκληπτέον ὡς γνωστὸν τὸ ἀπόστημα ΒΔ, δι' οὗ δίεισιν ἡ παράλληλος ΑΒ, καὶ δὴ καὶ τὸ τοῦ Α ἀπὸ τῆς ΔΘ προεκβληθείσης ἀπόστημα ΑΓ. Τοιγαροῦν κληθήτω ΒΔ $= \alpha$, καὶ ΑΓ $= \beta$· ἐκ μὲν οὖν τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΘ, ΕΔΘ ἀποφέρεται ΒΘ : ΔΘ :: ΑΘ : ΕΘ· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων καὶ αὐτῶν τριγώνων ΑΓΘ, ΕΖΘ πρόεισιν ΑΘ : ΕΘ :: ΑΓ : ΕΖ· ἄρα ΒΘ : ΔΘ :: ΑΓ : ΕΖ, τοῦτ' ἔστιν $\alpha + \chi : \chi :: \beta : \mathrm{EZ} = \frac{\beta\chi}{\alpha+\chi}$, ἐπεὶ δὲ ζητεῖται εἶναι ΕΔΘ $= \gamma\gamma$, δέον ὑπάρχειν $\mathrm{EZ} \times \frac{\Delta\Theta}{2} = \frac{\beta\chi}{\alpha+\chi} \times \frac{\chi}{2} = \gamma\gamma$, εἴτ' οὖν $\frac{\beta\chi\chi}{2\alpha+2\chi} = \gamma\gamma$, ἢ, ἀφανισμῷ τοῦ παρονομαστοῦ, $\beta\chi\chi = 2\alpha\gamma\gamma + 2\gamma\gamma\chi$.

Ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως ἐπιλυθείσης κατὰ τοὺς κανόνας τῶν δευτεροβαθμίων προβλημάτων (453 κτ.)· προέρχονται δύω δυνάμεις $\chi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} + \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta})}$, ὧν ἄχρηστος ἐνταῦθα ἡ τὸ — ἔχουσα.

Εἰς δὲ κατασκευὴν τοῦ προβλήματος μετηνέχθω ἡ ἔκθεσις εἰς τὸν ἐφεξῆς τύπον $\chi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} + \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} + 2\alpha)\frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$. τούτου τεθέντος ἤχθω ἀπέραντος εὐθεῖα (σχ. 23) ἡ ΠΞ, καὶ ἀπό τινος αὐτῆς σημείου τοῦ Γ ἐστάθω κάθετος ἡ ΑΓ $= \beta$, καὶ εἰλήφθων ἐπὶ τῶν ΓΑ καὶ ΓΠ αἱ εὐθεῖαι ΓΟ, ΓΜ ἴση ἑκατέρα τῇ τοῦ δοθέντος τετραγώνου πλευρᾷ γ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΜ ἤχθω παρ' αὐτὴν

διὰ τȣ̃ σημείȣ Ο παράλληλος ἡ ΟΝ, ἥτις διορίσει τὴν ΓΝ δύναμιν τȣ̃ $\frac{\gamma\gamma}{\beta}$, εἴγε τῶν τριγώνων ΑΓΜ, ΟΓΝ ὁμοίων ὄντων, ἐςὶν ΑΓ : ΟΓ :: ΓΜ : ΓΝ, εἴτ' ȣ̃ν β : γ :: γ : ΓΝ $= \frac{\gamma\gamma}{\beta}$· τοιγαρȣ̃ν ἡ δύναμις τȣ̃ χ ἀποβαίνει $\chi = \Gamma N + \surd[(\Gamma N + 2\alpha) \times \Gamma N]$· ἀλλὰ $\surd[(\Gamma N + 2\alpha) \times \Gamma N]$ ἐμφαίνει, ὡς δῆλον, μέσην ἀνάλογον πρὸς τὰς ΓΝ ϗ ΓΝ + 2α· ȣ̓δὲν ȣ̃ν λείπεται ἄλλο, ἢ διορίσαι ταύτην τὴν μέσην ἀνάλογον, ϗ ταύτην προσθεῖναι τῇ ΓΝ· πρὸς δὲ τȣ̃το, ἐπὶ τῆς ΝΓ προαχθείσης εἰλήφθω ΓΞ = 2α, ϗ ἐπὶ τῆς ΝΞ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΝΥΞ συμβάλλον τῇ ΓΑ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Υ, ϗ ἡ ΝΥ χορδὴ μετηνέχθω ἐκ τȣ̃ Ν ἐπὶ τὸ Π· ȣ̓κȣ̃ν ἔςαι ΓΠ δύναμις τȣ̃ χ· καὶ γὰρ ΝΥ ἐςὶ μέση ἀνάλογος τῶν ΝΓ, ΝΞ (522), εἴτ' ȣ̃ν τῶν ΓΝ καὶ ΓΝ + 2α· ἄρα ΝΥ, ἢ $\Pi N = \surd[(\Gamma N + 2\alpha) \times \Gamma N]$· ἄρα $\Gamma\Pi = \Gamma N + \Pi N = \Gamma N + \surd[(\Gamma N + 2\alpha) \times \Gamma N] = \chi$ τοιγαρȣ̃ν μετενεγκόντες τὴν ΓΠ ἐκ τȣ̃ (σχ. 22.) Δ ἐπὶ τὸ Θ, ϗ εὑρόντες τὸ σημεῖον Θ, δι' αὐτȣ̃ ϗ διὰ τȣ̃ Α ἀγαγόντες τὴν ΑΘ, ἕξομεν τὸ τρίγωνον ΕΔΘ = γγ. ΟΕΠ.

568. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Βȣλομένοις δὲ εἰδέναι, ὃ δύναται ὁ δεύτερος τύπος τȣ̃ χ, τȣ̃τ' ἔςι $\chi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} - \surd[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} + 2\alpha)\frac{\gamma\gamma}{\beta}]$, σημειωτέον, ὅτι μὴ διορίσαντες, εἰ περὶ τῆς ὑπὸ ΕΔΘ γωνίας τὸ ζήτημα γίνοιτο, ἢ περὶ τῆς ἐκείνῃ ἴσης $E^{I}\Delta\Theta^{I}$ τῆς ὑπὸ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ΘΔ, ΕΔ προαχθεισῶν περιεχομένης (99), ἡ δευτέρα ἐπίλυσις διαπερανεῖ τὰ αὐτὰ ἐπὶ τῆς $E^{I}\Delta\Theta^{I}$ γωνίας, ἃ ϗ ἐπὶ τῆς

ΕΔΘ ἡ πρώτη· ϰ̀ γὰρ ϰληθείσης χ τῆς ΔΘ', ϰ̀ τῶν αὐτῶν ὀνομάτων τηρηθέντων, ἐπεὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΘ', Ε'ΔΘ', διὰ τας ΑΒ, ΔΕ' παραλλήλȣς, εἰσὶν ὅμοια (135, 99, 218), προέρχεται ΒΘ : ΔΘ' : : ΑΘ' : ΘΕ' ϰ̀ ϰαταγομένης τῆς ϰαθέτȣ Ε'Ζ' τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΘ', Ε'Ζ'Θ' διδȣ̃σιν ΑΘ' : Θ'Ε' : : ΑΓ : Ζ'Ε'· ἄρα ΒΘ' : ΔΘ' : : ΑΓ : Ζ'Ε', τȣτ' ἔϛιν, $\alpha - \chi : \chi : : \beta : Z'E' = \frac{\beta\chi}{\alpha - \chi}$· ἐπεὶ ȣ̃ν ζητεῖται εἶναι Θ'Ε'Δ $= \gamma\gamma$, ἄρα ἀνάγκη ὑπάρχειν $\frac{\beta\chi}{\alpha-\chi} \times \frac{\chi}{2} = \gamma\gamma$· ὅθεν $\beta\chi\chi = 2\alpha\gamma\gamma - 2\gamma\gamma\chi$, ϰ̀ ἑπομένως $\chi = \frac{-\gamma\gamma}{\beta} \pm \surd(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} + \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta})$ δυνάμεις τῆς χ παρὰ τοσȣ̃τον τῶν ἐν τῇ προτέρᾳ περιπτώσει διενηνοχυῖαι, ὅσον ἐκεῖναι ἀντίθετα σύμβολα τῶν ϰατὰ ταύτας ἔχȣσι· ϰαί γε εἰϰότως· ἡ γὰρ χ ποσότης ἐϰ τῶν ἀντιθέτων εἴληπται μερῶν· ϰαινὴ αὕτη ἐμπέδωσις τȣ̃ τὰς λειπτιϰὰς τῶν ποσοτήτων ϰατ' ἔννοιαν ἀντθετον λαμϐάνεσθαι ταῖς ὑπαρϰτιϰαῖς (565).

Η' δέ γε ἀποδοθεῖσα ἐπὶ τῆς προτέρας περιπτώσεως ϰατασϰευὴ εὔχρηϛος ϰἀνταῦθα, εἰ μόνον ἡ ΝΥ (χ. 23) ἐϰ τȣ̃ Ν ἐπὶ τὸ Κ πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Ξ μετενεχθείη· ȣ̃τω γὰρ ἡ ἐϰεῖθι ȣ̃σα ΓΠ τȣ̃ χ δύναμις ἐνταῦθα ἔσεται ΓΚ· ἡ γὰρ δύναμις τȣ̃ χ, ἡ ταύτῃ τῇ περιπτώσει συνάδȣσα, ἔϛι $\chi = -\frac{\gamma\gamma}{\beta} + \surd(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} + \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta})$, ἢ $\chi - \frac{\gamma\gamma}{\beta} + \surd[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} + 2\alpha) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}]$, τȣτ' ἔϛι $\chi = -$ ΓΝ $+ \surd[($ΓΝ $+ 2\alpha) \times$ ΓΝ$]$· ἐπεὶ ȣ̃ν ΝΥ $= \surd[($ΓΝ $+ 2\alpha) \times$ ΓΝ$]$, ἕξομεν $\chi = -$ ΓΝ $+$ ΝΥ $= -$ ΓΝ $+$ ΝΚ $=$ ΓΚ· τοιγαρȣ̃ν τὴν ΓΚ ἐϰ τȣ̃ Δ (χ. 22) ἐπὶ τὸ Θ'

μετενεγκόντες, ϗ ἐκ τȣ̃ Α διὰ τȣ̃ ȣ̎τως ὁρισθέντος σημείȣ Θ^{I} ἀγαγόντες τὴν ΑΘ^{I}Ε^{I}, ἕξομεν τὸ τρίγωνον Θ^{I}ΔΕ^{I} ἴσον τῷ τετραγώνῳ γγ· ϗ δὴ αὕτη δευτέρα ὑπάρχει τȣ̃ προϐλήματος ἐπίλυσις.

569. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ τὸ σημεῖον Α κείμενον ἔνερθεν τῆς εὐθείας ΒΘ (χ. 24), ἡ ποσότης β, εἴτ' ȣ̃ν ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔσεται λειπτικὴ, ϗ δὴ ἑκατέρα τῶν δύω προτέρων δυνάμεων τῆς χ ἔςαι $\chi = -\frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} - \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta}\right)}$, ἢ $\chi = -\frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha\right) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}\right]}$, ἔνθα κατάδηλον, ὅτι τὸ πρόϐλημα ἀδύνατον εἴη, εἰ $2\alpha < \frac{\gamma\gamma}{\beta}$ ὑπάρχοι· ἐπεὶ τηνικαῦτα ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης ἔςαι λειπτικὴ, ϗ τȣ̃ χ αἱ δυνάμεις ἀνύπαρκτοι (Συμ. Λογ. 175)· ἀλλὰ τȣ̃το μὲν ὡς πρὸς τὴν γωνίαν ΗΔΙ, πρὸς μέντοι τὴν αὐτῇ ἴσην Ε^{I}ΔΘ^{I} ἀφορῶσι, διττῶς ἂν ἐπιλυθείη τὸ πρόϐλημα· τȣτὶ δὲ ὡς ἂν γένοιτο, κατασκευαςέον τὰς δύω δυνάμεις $\chi = -\frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha\right) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}\right)}$ κατὰ τὸν ἐφεξῆς τρόπον· ὁρισθείσης, ὡς ἀνωτέρω, τῆς δυνάμεως ΓΝ τȣ̃ $\frac{\gamma\gamma}{\beta}$, εἰλήφθω (χ. 25) ΝΞ $= 2\alpha$, καὶ ἐπ' αὐτῆς ἡμικυκλίȣ γραφέντος τȣ̃ ΝΥΞ, ἤχθω ἁπτομένη αὐτȣ̃ ἡ ΓΥ, ϗ μετηνέχθω ἡ ΓΥ ἐκ τȣ̃ Γ ἐπὶ τὸ Π πρὸς τὸ Ν, ϗ πρὸς τ' ἀντίθετα ἐκ τȣ̃ Γ ἐπὶ τὸ Κ· ϗ δὴ ΝΠ,

ϗ ΝΚ ἔσονται δύω δυνάμεις τῆς χ, αἳ μητηνέχθωσαν (χ. 24) ἐκ τȣ̃ Δ ἐπὶ τὸ Θ ϗ ἐκ τȣ̃ Δ ἐπὶ τὸ Θ^{I}, ϗ ἐκ τȣ̃ Α διὰ τῶν σημείων Θ, Θ^{I} ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΕΘ, Ε^{I}Θ^{I}· ἔςαι ȣ̃ν ἑκάτερον τῶν ΕΔΘ, Ε^{I}ΔΘ^{I} τριγώνων ἴσον τῷ τετραγώνῳ γγ. Ὅτι δὲ αἱ ΝΠ, ΝΚ (χ. 25) εἰσὶν αἱ δύω δυνάμεις τῆς χ, ἐντεῦθεν δῆλον· ἡ γὰρ ΓΥ (452) μέση ȣ̃σα ἀνάλογος τῶν ΓΝ, ΓΞ ἐςὶν $= \sqrt{(\Gamma\Xi \times \Gamma\mathrm{N})}$, ἢ (τιθεμένων ἀντὶ τῶν γραμμῶν τῶν κατ' αὐτὰς δυνάμεων) ΓΥ, ἢ ΓΠ, ἢ ΓΚ $= \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$· ἄρα ΝΠ $= \Gamma\mathrm{N} - \Gamma\Pi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} - \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$, ϗ ΝΚ $= \Gamma\mathrm{N} + \Gamma\Pi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} + \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$· ἀλλ' αἱ δύω αὗται ποσότητες αἱ αὐταί εἰσι ταῖς τȣ̃ χ δυνάμεσι μετ' ἀντιθέτων συμβόλων· ἄρα μετενεχθεῖσαι ἐκ τȣ̃ Δ πρὸς τὸ Θ (χ. 24) ἔσονται αἱ δυνάμεις τȣ̃ χ.

570. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'. Εἰ δὲ τὸ Α (χ. 26) ἐν αὐτῇ κέοιτο τῇ ὑπὸ ΗΔΙ γωνίᾳ, τηνικαῦτα ΒΔ πιπτȣ́σης ἐπὶ τ' ἀντίθετα τοῖς ἐξ ἀρχῆς, τὸ μὲν α λειπτικὸν, αἱ δὲ ἀρχικαὶ δυνάμεις τȣ̃ χ γένοιντ' ἂν $\chi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} - \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta})}$, αἵτινες εἰσὶν αἱ αὐταὶ (μετ' ἐναντίων συμβόλων) αἷς πρὸ μικρȣ̃ κατεσκευάσαμεν· σαφὲς ȣ̃ν τηνικαῦτα, ὅτι δεῖ τὰ τῆς κατασκευῆς μετελθεῖν ὡς κἀπὶ (χ. 25), ἀλλὰ μετενεγκεῖν τὰς τȣ̃ χ δυνάμεις ΝΠ, ϗ ΝΚ ἐκ τȣ̃ Δ

πρὸς τὸ Ι (χ. 26)· ὅθεν ἀναφύονται τὰ δύω τρίγωνα ΔΕΘ, ΔΕ'Θ' ἑκάτερον ὁμολογᾶν τῷ ζητήματι.

571. ΣΧΟΛΙΟΝ Δ'. Εἰ δὲ τὸ σημεῖον (χ. 27) Α κέοιτο, ἔνερθεν μὲν τῆς ΒΔ, ἐν αὐτῇ μέντοι τῇ γωνίᾳ ΒΔΕ', τηνικαῦτα ἤτε α ϗ ἡ β ἔσονται λειπτικαὶ· ὅθεν ἔσεται χ

$$= -\frac{\gamma\gamma}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} + \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta}\right)},$$

αἵτινες ἐπ' ἀκριβὲς εἰσὶ (τᾶ συμβόλα μόνα διαμαχομένα) δυνάμεις, ἃς πρὸ μικρᾶ ὑπὲρ τῆς χ ἐθηρευσάμεθα· κατασκευασθήσεται ἄρα ϗ ἐνταῦθα τὸ πρόβλημα ὥσπερ ϗ ἐπὶ (χ. 22)· ϗ δὴ ἡ μὲν ΓΚ ἔςαι δύναμις τᾶ χ ὑπαρκτικὴ, ἡ δὲ ΓΠ δύναμις αὐτᾶ λειπτική· κἀκείνη μὲν μετενεχθήσεται ἐκ τᾶ Δ ἐπὶ τὸ Θ πρὸς τὸ Β, αὕτη δὲ τὐναντίον ἐκ τᾶ Δ ἐπὶ το Θ'.

572. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Παρηγάγομεν ἐνταῦθα τὰς παντοίας τῆς ἐπιλύσεως ταύτης περιπτώσεις, ἵνα δείξωμεν, ὅπως ταύτας πάσας μία μόνη ἐξίσωσις περιλαμβάνει, ϗ ὅπως διὰ μόνης μεταλλαγῆς τῶν συμβόλων ἀνακαλύπτονται, ϗ ὅπως αἱ ἐναντίαι τῶν γραμμῶν θέσεις ἐναντίοις διασημαίνονται τοῖς συμβόλοις, ϗ τ' ἀνάπαλιν· λείπεται ἔτι ἐνδεῖξαι ἐνίας τῆς αὐτῆς ἐπιλύσεως χρήσεις.

573. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. Σημείᾳ δοθέντος τᾶ Α (χ. 28) κειμένα ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τριγώνα δεδομένα τᾶ ΔΗΙ, ἀπ' αὐτᾶ εὐθεῖαν ἀγαγεῖν τὴν ΑΖ, ὅπως διαιρῇ τὸ τρίγωνον εἰς δύω μερίδας ΔΕΖ, ΕΖΙΗ, αἳ εἶεν πρὸς ἀλλήλας ἐν λόγῳ ἐγνωσμένῳ $\mu : \nu$.

ΛΥΣΙΣ. Τᾶδε ἡ ἐπίλυσις τῇ τᾶ προτέρα ἐμπεριλαμβάνεται· ἐπεὶ γὰρ δέδοται μὲν τὸ τρίγωνον ΔΗΙ, ἔγνωςαι δὲ ποσημόριον τᾶ ΔΗΙ ὀφείλει εἶναι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· ἐὰν ζητηθῇ τέταρτος ὅρος ταύτης τῆς ἀναλογίας $\mu + \nu$:

μ :: ΔΗΙ, εὑρεθήσεται τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· ἀλλὰ δυνατὸν ἀεὶ εὑρεῖν τετράγωνον γγ ἴσον ταύτῃ τῇ ἐπιφανείᾳ (362), τὸ ζήτημα ἄρα εἰς τῦτο ἥκει, ἀγαγεῖν ἀμέλει ἀπὸ τῦ σημείῦ Α εὐθεῖαν τὴν ΑΕΖ, ὅπως μετὰ τῶν δύω πλευρῶν ΔΗ, ΔΙ περιέχῃ τρίγωνον τὸ ΔΕΖ ἴσον τῷ τετραγώνῳ γγ, τῦτ' ἔςιν ἀνάγεται εἰς τὸ πρότερον πρόβλημα (567).

574. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δῆλον ἔτι, ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἀνάγεται καὶ τὸ, πᾶν χῆμα εὐθύγραμμον τεμεῖν δι' εὐθείας, ἀχθείσης ἀφ' ὁτινοσῦν σημείῦ (σχ. 29) τῦ Α, εἰς δύω τμήματα ΒΓΖΕ, ΕΖΔΗΚ, ἃ ἔχοιεν πρὸς ἄλληλα τὸν δοθέντα λόγον· γνωςῦ γὰρ ὄντος τῦ σχήματος ΒΓΔΗΚ, γινώσκονται πᾶσαι αὐτῦ αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραί· εὐμαρῶς ἄρα γνωσθήσεται τὸ τρίγωνον ΒΛΓ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύω πλευρῶν προεκβεβλημένων τῶν ΚΒ, ΔΓ, ἐπεὶ γινώσκεται ἥτε πλευρὰ ΒΓ, καὶ δύω γωνίαι ΛΒΓ, ΛΓΒ ἀναπληρώματα τῶν δύω γνωςῶν γωνιῶν ΓΒΚ, καὶ ΒΓΖ· ὅκῦν ὡς γνωςὸν ἐκληπτέον τὸ τρίγωνον ΛΒΓ· ἐπεὶ δὲ τὸ ΕΒΓΖ δεῖ εἶναι μέρος διωρισμένον τῆς ὅλης ἐπιφανείας, καὶ αὐτὸ ὡσαύτως γινώσκεται· τὸ ζήτημα ἄρα ἀνάγεται εἰς τὸ, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν τὴν ΑΕΖ, ἥτις ἐν τῇ γωνίᾳ ΚΛΔ τρίγωνον συνίςησιν ἴσον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ· τέλος δ' ἐντεῦθεν ἄντις συνίδοι, ὅπως τὸ χῆμα τόδε εἰς πλείω διέλοι τμήματα, ὧν οἱ λόγοι εἶεν δεδομένοι.

575. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν ποσότητες δεδομέναι, εἰσιῦσαι εἰς τὴν πρὸς ἐπίλυσιν τῦ προβλήματος χρησιμεύῦσαν ἐξίσωσιν, τοιαίδε ὦσιν, ὥςε μεταβαλλομένων τῶν κατ' αὐτὰς συμβόλων τὴν ἐξίσωσιν μηδεμίαν ὑφίςασθαι ἀλλοίωσιν· ἢ μεταβαλλομένης τῆς θέσεως τῆς γραμμῆς, ἢ τῶν γραμμῶν τῶν ζητῦμένων ἐν τῷ σχήματι, μέτε τὴν θέσιν μήτε τὸ μέγεθος τρέπεσθαι τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τηνι-

καῦτα ἐν ταῖς διαφόροις τȣ̃ χ δυνάμεσιν, εἰ πολλαὶ εἶεν ἐν τῇ ἐξισώσει, εὑρεθήσεται ἀεὶ μία, ἥτις ἐνεπιβόλως ἐπιλύσει τὸ πρόβλημα ἐν περιπτώσει, ἣν ἐμφαίνει ἡ μεταβολή· ὅτως ἐν τῷ ἀρτίως ἡμῖν ἐπιλυθέντι προβλήματι (567) μία τῶν δυνάμεων τȣ̃ χ ἐπέλυεν εὐθυβόλως τὸ πρόβλημα τῆς εὐθείας ΑΕΘ ἐμπιπτȣ́σης εἰς τὴν γωνίαν ΗΔΙ· ἀλλ' εἴδομεν ἅμα ὡς ἡ δευτέρα δύναμις τȣ̃ χ ἐπέλυε τὸ πρόβλημα ȣ̓κέτι ἐν τῇ γωνίᾳ ΗΔΙ, ἀλλ' ἐν τῇ κατὰ κορυφὴν αὐτῇ Ζ'ΔΕ'· ὁ δέ γε τȣ́τȣ λόγος, ὅτι ἐφ' ἑκάςης περιπτώσεως, τὰς αὐτὰς εἰς χρῆσιν ἔχοντας ποσότητας, ϗ τȣ̀ς αὐτȣ̀ς εἰς ἐκτέλεσιν λογισμȣ̀ς, εἰς τὴν αὐτὴν ἐπάναγκες καταντῆσαι ἐξίσωσιν, ἥτις ȣ̓κ ἔςιν ὅπως ȣ̓χὶ τὰς αὐτὰς παρέξεται ἐπιλύσεις.

576. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'. Ἐπὶ τῆς φορᾶς τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ σημεῖον εὑρεῖν τὸ Γ (σχ. 30.), ὅπως τὸ αὐτȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ Α ἀπόςημα μέσον ᾖ ἀνάλογον πρὸς τὸ αὐτȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ Β ἀπόςημα, ϗ τὴν ὅλην εὐθεῖαν ΑΒ.

ΛΥΣΙΣ. Ῥηθήτω α ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ, ϗ χ τὸ ζητȣ́μενον ἀπόςημα ΑΓ· ȣ̓κȣ̃ν $ΒΓ = α - χ$· ϗ ἐπεὶ ζητεῖται εἶναι ΑΒ : ΑΓ :: ΑΓ : ΓΒ· εἴτ' ȣ̓̃ν $α : χ :: χ : α - χ$· ἄρα $χχ = αα - αχ$, ἢ $χχ + αχ = αα$, ἐξίσωσις δευτεροβάθμιος, ἥτις ἐπιλυθεῖσα δίδωσι $χ = -\frac{1}{2}α \pm \sqrt{(\frac{1}{4}αα + αα)}$.

Εἰς ȣ̓̃ν κατασκευὴν τῆς πρώτης δυνάμεως $χ = -\frac{1}{2}α + \sqrt{(\frac{1}{4}αα + αα)}$ ἀνάγκη ἐπιςῆσαι τῷ σημείῳ Β τὴν κάθετον $ΒΔ = \frac{1}{2}α$· ϗ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΔ, ἔςαι $ΑΔ = \sqrt{(ΒΔ^2 + ΑΒ^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}αα + αα)}$· λείπεται τοίνυν ἀφελεῖν ταύτης τῆς εὐθείας τὴν ποσότητα $\frac{1}{2}α$, ὃ δὴ τελεῖται μεταφερομένης τῆς ΔΒ ἐκ τȣ̃ Δ ἐπὶ τὸ Ο· τηνικαῦτα ȣ̓̃ν ΑΟ δύναται $\sqrt{(\frac{1}{4}αα + αα)} - \frac{1}{2}α$, τȣ̃τ' ἔςιν

ἴση ἔσεται τῷ χ· μετενεχθείσης ἄρα τῆς ΑΟ ἐκ τῦ Α ἐπὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, τὸ σημεῖον Γ, ἐφ' ὃ τελευτᾷ, ἔσεται τὸ ζητέμενον.

Περὶ δὲ τῆς δευτέρας δυνάμεως τῦ χ, εἴτ' ὖν $-\frac{1}{2}\alpha - \surd(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \alpha\alpha)$, ἐὰν μετενεχθῇ ΒΔ ἐκ τῦ Δ ἐπὶ τὸ Ο' ἐπὶ τῆς ΑΔ προαχθείσης ΑΟ' τηνικαῦτα δυνήσεται $\frac{1}{2}\alpha + \surd(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \alpha\alpha)$· ἐπεὶ ἄρα ἡ δύναμις τῦ χ ἡ αὐτή ἐςι ποσότης θεωρυμένη λειπτικῶς, μετηνέχθω ΑΟ' ἐκ τῦ Α ἐπὶ τὸ Γ' ἐπὶ τῆς ΑΒ προαχθείσης ἐπὶ τὰ ἀντίθετα τοῖς προτέροις· ϗ δὴ εὑρεθήσεται δεύτερον σημεῖον Γ, ὡς εἶναι τὴν Γ'Α τῶν ΓΒ, ΑΒ μέσην ἀνάλογον.

577. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τῦτὶ δὲ τὸ πρόβλημα περιλαμβάνει ϗ τὴν τῆς εὐθείας κατ' ἄκρον ϗ μέσον λόγον τομήν· ὕτως ἡ ἤδη ἀποδεδομένη κατασκευὴ ταὐτόν πως δύναται τῇ ἀποδοθείσῃ (335)· ἀλλὰ καταφανές, ὡς ὁ μὲν Συμβολικὸς ὑπολογισμὸς ἄγει εἰς εὕρεσιν ταύτης τῆς κατασκευῆς· ἡ δὲ Γεωμετρία ὑποτίθησιν ἤδη εὑρημένην αὐτὴν, ϗ μόνον ἐμπεδοῖ αὐτῆς τὴν ἀλήθειαν.

578. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Μικρὸν ἐπιςήσασι τῇ, ἣν περιεπατήσαμεν, ὁδῷ ἐν τοῖς προεκτεθεῖσι προβλήμασι δῆλον αὐτίκα, ὅτι ἀεὶ μίαν ὡς ἄγνωςον ἐξελάβομεν εὐθεῖαν, ἥτις ἅπαξ γνωσθεῖσα ὑπηρέτησεν ἡμῖν εἰςεὕρεσιν ἁπασῶν τῶν ἄλλων, τηρήσασιν ἀκριβῶς τὰς τῦ προβλήματος θέσεις· τῦτὶ δὴ ϗ πρακτέον ἀείποτε εἶναι φαμέν· ἀλλὰ γὰρ τηρητέον ϗ τόδε· εἰσὶ γὰρ πολλάκις εὐθεῖαι, ὧν ἑκάςη γνωσθεῖσα ὐχ ἧττον διορίσειεν ἁπάσας τὰς ἄλλας· ἀλλ' ἐν ταύταις ἔςι καίτις, ἣ πολὺ συνθετωτέρας τὰς ἐξισώσεις ἀπεργάζεται· εἰς ὖν αἵρεσιν τῆς εὐμαρέςερον ἐπὶ τὸ τέλος ἂν ἀγαγέσης εὐθείας τίθεμεν ἐνταῦθα τόνδε τὸν κανόνα.

579. ,,Ἐὰν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν, ἢ τῶν ποσοτή-,,των, ὧν ὡς ἄγνωςος ἐκληφθεῖσα ἑκάςη δύναται ἐπίσης ,,συμβαλεῖν εἰς διορισμὸν ἁπασῶν τῶν ἄλλων, εὑρεθῶσι ,,δύω τὸν αὐτὸν τρόπον ἑκατέρα χρησιμεύεσα, ὡς εἰς ,,τὴν αὐτὴν φέρειν ἐξίσωσιν (μετὰ συμβόλων + ἢ —), ,,τηνικαῦτα δὴ ὑδετέρα τέτων χρηςέον, ἀλλ' ἐκληπτέον ,,ὡς ἄγνωςον ἄλλην ποσότητα, ἑκατέρας τῶν δυεῖν ἐπί-,,σης ἐξηρτημένην" ἐκληπτέον, δὸς εἰπεῖν, τὸ ἡμιάθροισμα, ἢ τὴν ἡμιδιαφορὰν, ἢ τὴν μέσην αὐτῶν ἀνάλογον κτλ. ἀεὶ γὰρ ἀφιξόμεθα εἰς ἐξίσωσιν ἁπλεςέραν, ἢ εἴπερ ἐχρώμεθα θατέρα τῶν δυεῖν ποσοτήτων. Τὸ δ' ἐφεξῆς πρόβλημα πολλὰ ἡμῖν ἐπιδαψιλεύσεται ὑποδείγματα.

580. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ΄. Ἀπὸ σημείε τε Δ, κειμένε (σχ. 31.) ἐν τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΙΑΕ, κ ἴσον ἀπέχοντος ἑκατέρας τῶν πλευρῶν ΙΑ, ΑΕ, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν τὴν ΔΒ, ὅπως τὸ μέρος ΓΒ, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ἐν τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΕΑΒ, ἴσον ὑπάρχῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

ΛΥΣΙΣ Α΄. Καταχθεισῶν τῶν καθέτων ΔΕ, ΔΙ ἀδιαφόρως ὡς ἄγνωςον δυνάμεθα ἐκλαβεῖν τὴν ΓΕ, ἢ ΑΒ, ΑΓ, ἢ ΙΒ, ΓΔ, ἢ ΔΒ· ἐὰν μὲν οὖν φέρε, ἐκλάβωμεν ὡς ἄγνωςον τὴν ΓΕ, τηνικαῦτα κληθείσης τῆς μὲν ΓΕ, χ, α δὲ ἑκατέρας τῶν δύω ἴσων εὐθειῶν ΔΕ, ΔΙ, ἅσπερ ἐκδεχόμεθα ὡς γνωςὰς, κληθείσης δὲ γ κ τῆς δεδομένης εὐθείας, ἣ δεῖ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ, ἕξομεν ΑΓ = ΑΕ — ΓΕ = $\alpha - \chi$· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΔΕΓ, ΓΑΒ προέρχεται ΓΕ : ΔΕ :: ΑΓ : ΑΒ

τετ' ἔςι $\chi : \alpha :: \alpha - \chi :$ ΑΒ $= \frac{\alpha\alpha - \alpha\chi}{\chi}$· ἀλλὰ διὰ

τὴν ἰδιότητα τε ὀρθογωνίε τριγώνε (349) ἔςιν ΑΓ^2 + ΑΒ^2 = ΒΓ^2· ἀντικαταςάσει ἄρα ἀντὶ τῶν εὐθειῶν τῶν

κατ' αὐτὰς συμβολικῶν δυνάμεων, ἕξομεν $(\alpha - \chi)^2 + (\frac{\alpha\alpha - \alpha\chi}{\chi})^2 = \gamma\gamma$, εἴτ' οὖν $\alpha\alpha - 2\alpha\chi + \chi\chi + \frac{\alpha^4 - 2\alpha^3\chi + \alpha^2\chi^2}{\chi\chi} = \gamma\gamma$, εἴτ' οὖν, ἀφανισμῷ τοῦ παρονομαστοῦ, μεταθέσειτε καὶ ἀναγωγῇ, $\chi^4 - 2\alpha\chi^3 + 2\alpha\alpha\chi\chi - \gamma\gamma\chi\chi - 2\alpha^3\chi + \alpha^4 = 0$, ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος, ἥτις οὐκ ἔστιν ἡ ἁπλουστέρα τῶν πρὸς ἐπίλυσιν τεινουσῶν τοῦ προβλήματος, πολλοῦ γε καὶ δεῖ.

Β. Ἐὰν δὲ ἀντὶ ΤΕ λάβωμεν ὡς ἄγνωστον τὴν ΙΒ, καὶ καλέσωμεν αὐτὴν χ, μιμούμενοι τὴν προεκτεθεῖσαν ἐπίλυσιν, ἕξομεν ἐξίσωσιν οὐδενὶ διενηνοχυῖαν τῆς προτέρας, πλὴν ὅτι ἐν ταύτῃ ἔσται $\chi - \alpha$ ἀντὶ $\alpha - \chi$, τοῦτ' ἔστιν ἀπολύτως τὴν αὐτὴν, εἴγε ταύτας τὰς ποσότητας τετραγωνίζειν αἰτεῖ ἡ φύσις τοῦ προβλήματος· εἴτε δὲ $\alpha - \chi$, εἴτε $\chi - \alpha$ τετραγωνισθεῖεν, ἡ αὐτὴ, ὡς δῆλον, προκύψει ποσότης· ὡσαύτως τῷ θεμένῳ εἰς ἄγνωστον τὴν ΑΒ οὐδεμία διαφορὰ ἔσται πρὸς τὸν λαβόντα ὡς τοιαύτην τὴν ΑΓ, ὅτι μὴ ἡ τῶν συμβόλων· ὡσαύτως ἐκ τῶν εὐθειῶν ΔΒ, ΔΓ ἡ ἑτέρα τῶν ἐξισώσεων τοῖς συμβόλοις τῆς ἑτέρας διοίσει· οὐδεμίαν ἄρα τούτων ληπτέον.

Γ. Ἀλλ' ἐὰν εἰς ἄγνωστον θῶμεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο εὐθειῶν ΔΒ, ΔΓ, καὶ τοῦτο δηλώσωμεν διὰ 2χ, ἕξομεν (Συμβ. Λογ. 442) $\Delta B = \chi + \frac{1}{2}\gamma$, καὶ $\Delta\Gamma\ \Gamma\chi - \frac{1}{2}\gamma$· ἀλλ' ἐκ τῶν παραλλήλων ΔΙ, ΓΑ, τῶν εἰς εὕρεσιν τῶν ΑΒ, ΑΓ, προκύπτουσιν αἱ ἐφεξῆς ἀναλογίαι ΔΓ : ΓΒ :: ΙΑ ἢ ΔΕ : ΑΒ, καὶ ΔΒ : ΓΒ :: ΔΙ : ΑΓ, τοῦτ' ἔστι $\chi - \frac{1}{2}\gamma : \gamma :: \alpha : AB$, καὶ $\chi + \frac{1}{2}\gamma : \gamma :: \alpha : A\Gamma$· ἄρα $AB = \frac{\alpha\gamma}{\chi - \frac{1}{2}\gamma}$ καὶ $A\Gamma = \frac{\alpha\gamma}{\chi + \frac{1}{2}\gamma}$. ἄρα, ἐπεὶ ἐν

τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΓΑΒ ἐστὶν $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$, ἕξομεν $\frac{\alpha^2\gamma^2}{(\chi-\frac{1}{2}\gamma)^2} + \frac{\alpha^2\gamma^2}{(\chi+\frac{1}{2}\gamma)^2} = \gamma\gamma$, εἴτ' οὖν, ἄρσει τῶν κλασμάτων, καὶ διὰ γγ διαιρέσει, $\alpha^2(\chi+\frac{1}{2}\gamma)^2 + \alpha^2(\chi-\frac{1}{2}\gamma)^2 = (\chi+\frac{1}{2}\gamma)^2 + (\chi-\frac{1}{2}\gamma)^2$· ἐκτελέσει δὲ τῶν σεσημειωμένων πράξεων, μεταθάσει τε καὶ ἀναγωγῇ, γενήσεται $\chi^4 - (\frac{1}{2}\gamma\gamma + 2\alpha\alpha)\chi^2 = \frac{1}{2}\alpha\alpha\gamma\gamma - \frac{1}{16}\gamma^4$, ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος μὲν, εὐμαρεστέρα δὲ τῆς πρὶν εἰς ἐπίλυσιν, ἅτε δὴ κατὰ τὰς δευτεροβαθμίους ἐπιλύεσθαι δυναμένη (*).

Δ'. Δυνατὸν δὲ εἰς ἁπλουστέρας ἔτι ἐξισώσεις ἀφικέσθαι, εἰ δυσὶν ἀγνώστοις χρησαίμεθα, ὧν ἡ μὲν ἐστὶν ἄθροισμα τῶν δύω εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ἁτέρα δὲ ἡ αὐτῶν διαφορὰ, τοῦτ' ἐστὶν εἰ θείημεν $AB + A\Gamma = 2\chi$, καὶ $AB - A\Gamma = 2\upsilon$· ὅθεν (Συμβ. Λογ. 442) $AB = \chi + \upsilon$, καὶ $A\Gamma = \chi - \upsilon$· καὶ ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΒΓ ἐστὶν $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$· ἐν δὲ τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΑΒΓ, ΙΒΔ, ΑΒ : ΑΓ :: ΙΒ : ΙΔ· ὅθεν προΐασιν ἐξισώσεις δύω ἀναγκαῖαι πρὸς διορισμὸν τῆς χ καὶ υ· ἀπὸ τῆς ἑτέ-

(*) Διαιρεθεῖσα γὰρ διὰ χ^2 ἡ ἐξίσωσις, δευτεροβάθμιος ἀποκαθίσταται (Συμβ. Λογ. 470 Πρόβ. β'.)ο ἀλλὰ, κἂν μὴ γένοιτο αὕτη ἡ διαίρεσις, ἡ ἐξίσωσις, φέρ' εἰπεῖν, $\chi^4 + \chi^2 = 20$ ἐπιλυθῆναι ἔχει κατὰ τὰ δευτεροβάθμια προβλήματα εἴτ' οὖν $\chi^4 + \chi^2 + \frac{1}{4} = 20 + \frac{1}{4}$· ὅθεν $\chi^2 + \frac{1}{2} = \sqrt{20 + \frac{1}{4}}$ καὶ $\chi^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{20 + \frac{1}{4}}$, καὶ $\chi = \pm \sqrt{(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{20 + \frac{1}{4}})}$· ὡσαύτως ἐπιλυθῆναι ἔχει καὶ πᾶσα ἐξίσωσις, ἧς ὁ πρῶτος ὅρος δείκτην ἔχει τοῦ κατὰ τὸν δεύτερον διπλάσιον, οἱ δὲ ἄλλοι πάντες ἄπισιν, οἷα ἐστὶν ἡ $\chi^6 + \pi\chi^3 - \rho = 0$, κτλ.

ρας δὲ ἀποφέρεται ἡ δύναμις τοῦ $\chi\chi$, ἧς ἀντικαταστάσης ἐν θατέρᾳ, προκύπτει ὑπὲρ τῆς υ ἐξίσωσις δευτεροβάθμιος· ἀλλὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦδε τοῦ λογισμοῦ τοῖς πρωτοπείροις ἀφέντας πρὸς ἄσκησιν, ἐπανιτητέον ἐπὶ τὴν καθ' ἡμᾶς ἐξίσωσιν.

Ἕξομεν οὖν $\chi^4 - (\frac{1}{2}\gamma\gamma + 2\alpha\alpha)\chi^2 + (\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha)^2 = (\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha)^2 + \frac{1}{2}\alpha\alpha\gamma\gamma - \frac{1}{16}\gamma^4 = \alpha\alpha\gamma\gamma + \alpha^4$· τὴν δὲ τετράγωνον ῥίζαν ἐξαγαγόντες (*), $\chi^2 - (\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha) = \pm\sqrt{(\alpha\alpha\gamma\gamma + \alpha^4)}$ ϗ ἑπομένως $\chi^2 = \frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha \pm \sqrt{(\alpha\alpha\gamma\gamma + \alpha^4)}$· ἐξαγαγόντες δὲ πάλιν τὴν τετραγώνειον ῥίζαν ἕξομεν τελευταῖον $\chi = \pm\sqrt{[\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha \pm \sqrt{(\alpha\alpha\gamma\gamma + \alpha^4)}]}$, ἢ $\chi = \pm\sqrt{[\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha \pm \alpha\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha)}]}$.

Τῶν δὲ τεττάρων τοῦ χ δυνάμεων, ὧν δίδωσιν ὁ διττὸς συνδυασμὸς τῶν συμβόλων $\pm$, μία μόνη ἐξικανοῖ πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προτεθέντος ζητήματος· τοῦτ' ἔστι $\chi = +\sqrt{[\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha + \alpha\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha)}]}$· ἡ δέ γε δύναμις $\chi = +\sqrt{[\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\alpha - \alpha\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha)}]}$ ἐπιλύει τὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΓΒ ὑπάρχῃ ἐν τῇ αὐτῇ γωνίᾳ, ἔνθα ϗ τὸ σημεῖον Δ (ὅρα σχ. 32)· ϗ τηνικαῦτα τὸ χ παρίστησιν οὐχὶ τὸ ἡμιάθροισμα, τὴν δὲ ἡμιδιαφορὰν τῶν δύω εὐθειῶν ΔΒ, ΔΓ· ῥᾳδίως δὲ τουτὶ ἐξελέγχεται κληθείσης 2χ ταύτης τῆς διαφορᾶς, ϗ τοῦ προβλήματος ἐπιλυθέντος, καθὰ ϗ πρότερον· ἕξομεν γὰρ ΔΒ $= \frac{1}{2}\gamma + \chi$, ϗ ΓΔ $= \frac{1}{2}\gamma - \chi$· ἐκ δὲ τῶν ΔΙ, ΓΑ παραλλήλων ΔΒ : ΓΒ :: ΔΙ : ΓΑ, ϗ ΔΓ : ΓΒ :: ΑΙ : ΑΒ, εἴτ' οὖν $\frac{1}{2}\gamma + \chi : \gamma :: \alpha :$ ΓΑ, ϗ $\frac{1}{2}\gamma - \chi : \gamma :: \alpha :$

(*) Ἀμέλει κατὰ τὴν προεκτεθεῖσαν σημείωσιν.

ΑΒ· ἄρα ΓΑ $=\frac{\alpha\gamma}{\frac{1}{2}\gamma+\chi}$, ϗ ΑΒ $=\frac{\alpha\gamma}{\frac{1}{2}\gamma-\chi}$· ἐπεὶ ἄρα τὸ τρίγωνον ΓΑΒ ἐϛιν ὀρθογώνιον, ἔσεται $\frac{\alpha^2\gamma^2}{(\frac{1}{2}\gamma+\chi)^2}+\frac{\alpha^2\gamma^2}{(\frac{1}{2}\gamma-\chi)^2}=\gamma\gamma$, γενομένων δὲ τῶν αὐτῶν, ἃ ϗ ἀνωτέρω, προκύψει $\chi^4-(\frac{1}{2}\gamma\gamma+2\alpha\alpha)\chi^2=\frac{1}{4}\alpha\alpha\gamma\gamma-\frac{1}{16}\gamma^4$, ἐξίσωσις ἀπολύτως ἡ αὐτὴ τῇ, ἣν εὕρομεν ἐπὶ τȣ̃ ἀθροίσματος τῶν δύω εὐθειῶν ΒΔ, ΓΔ (σχ. 31)· ἄρα ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις ἑκατέρᾳ ἀπόχρη περιπτώσει, ὧν θατέρᾳ μὲν τὰς ῥίζας τὸ ἄθροισμα, θατέρᾳ δὲ ἡ διαφορᾷ πορίζεται· ῥᾴδιον δὲ παντὶ συνιδεῖν τὰς δύω ταύτας ὑπάρχειν τὰς ἡμῖν ἤδη καταδειχθείσας, τῶν ἄλλων δύω ῥιζῶν λειπτικῶν τε ȣ̉σῶν, ϗ μόνον ἐπανηκȣσῶν περιπτώσεσιν ἀντιθέτοις, ἢ ταῖς θεωρηθείσαις ἐφ' ἑκάϛης ἐπιλύσεως.

581. Ἵνα δ' εὑρεθῶσιν, αἷς περιπτώσεσιν ἐπανήκȣσιν αἱ δύω ἕτεραι αὗται ῥίζαι, παρατηρητέον, ὡς ȣ̉δὲν διώρισαι ἐπὶ τȣ̃ ζητήματος, ἢ γȣ̃ν ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως, εἰ τὸ σημεῖον Δ (σχ. 31) κέοιτο, ὡς ἐν ἀρχῇ ὑποτέθειται, ἔνερθεν τῆς ΑΙ ϗ ἐν ἀριϛερᾷ τῆς ΑΕ, ἢ γȣ̃ν ἐκείνης μὲν ὕπερθεν, πρὸς δεξιὰν δὲ ταύτης, ὥσπερ φαίνεται ἐπὶ τῶν Α'Ι'' Α'Ε'· ἀλλὰ μὴν ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἡ ποσότης α πίπτȣσα ἐν τοῖς ἀντιθέτοις, ἢ τὸ κατ' ἀρχὰς, γίνεται λειπτική· θηρευθήσεται ἄρα ἡ ταύτῃ τῇ περιπτώσει συνᾴδȣσα ἐπίλυσις, τιθεμένης $-\alpha$ ἀντὶ $+\alpha$ ἐν τῇ προευρημένῃ ἐξισώσει $\chi^4-(\frac{1}{2}\gamma\gamma+2\alpha\alpha)\chi^2$ κτ. ἐπεὶ δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ȣ̉δὲν μεταβάλλεται, ἡ αὐτὴ ἐπιλύσει τὸ πρόβλημα κἂν ἑκατέρᾳ τῶν καινῶν τȣ́των περιπτώσεων· τῶν δύω ἄρα τȣ̃ χ δυνάμεων, ἡ μὲν τὸ ἄθροισμά ἐϛι τῶν

δύω εὐθειῶν ΔΕ^{I}, ΔΓ^{I} (σχ. 31)· ἡ δ' ἑτέρα ἡ αὐτῶν ὑπάρχει διαφορὰ (σχ. 32). πᾶς δέ τις ἐπεικῶς ὁρᾷ ὡς ἐν ταύτῃ τῇ νέᾳ θέσει, τῶν σημείων Β, Γ ἐκ τῶν ἀντιθέτων πιπτόντων, τό, τε ἄθροισμα, καὶ δὴ καὶ ἡ διαφορὰ, τῶν δύω εὐθειῶν ΔΒ^{I}. ΔΓ^{I} λειπτικὰ ὀφείλουσιν εἶναι, καθὰ δὴ καὶ ἡ ἐξίσωσις αὐτὰ ἀποδείκνυσι.

582. Ἵνα δὲ κατασκευάσωμεν τὴν προευρημένην ἐπίλυσιν, ληπτέον ἐπὶ τῆς ΕΑ προαχθείσης (σχ. 31, 32) $AN = \gamma$, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΙΝ, καὶ μετενεχθείσης ἐπὶ τὴν ΔΙ προαχθεῖσαν ἐκ τοῦ Ι εἰς τὸ Κ, ἐπὶ τῆς ΔΚ, ὡς διαμέτρου, γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΚΛΔ, συμβάλλον κατὰ τὸ Λ τῇ ΑΙ προαχθείσῃ· καὶ ἐκ τοῦ τῆς ΑΝ μέσου Η ἐπεζεύχθω ἡ ΙΗ, ἥτις μετηνέχθω ἐκ τοῦ Ι ἐς τὸ Μ (σχ. 31)· καὶ δὴ ἔσαι ἡ ΛΜ πρώτη δύναμις τοῦ χ· ἐπὶ δὲ τοῦ 32 σχήμ. κέντρῳ μὲν τῷ Λ, διαςήματι δὲ τῷ ΙΗ, μικροῦ τόξου γραφέντος, ὃ τέμνει τὴν ΙΚ κατὰ τὸ Μ, ἔσαι ἡ ΙΜ δευτέρα δύναμις τοῦ χ· καὶ ἐπείπερ ἐςι $B\Delta = \chi + \frac{1}{2}\gamma$, ἔσαι $B\Delta = \Lambda M + AH$ (σχ. 31)· καὶ $B\Delta = IM + AH$ (σχ. 32)· οὐκοῦν κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαςήματι δὲ τῇ οὕτως ὁρισθείσῃ ΒΔ, γεγράφθω τόξον τέμνον κατάτι σημεῖον τὸ Β τὴν ΙΑ προαχθεῖσαν· ἡ δὲ ΒΔ ἔσεται ἡ ζητουμένη εὐθεῖα· ἔςι γὰρ ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΙΑΝ (σχ. 31 καὶ 32). ΙΝ καὶ $IK = \sqrt{(IA^2 + AN^2)} = \sqrt{(\alpha\alpha + \gamma\gamma)}$, καὶ ἐπείπερ ἡ ΛΙ μέση ἐςὶν ἀνάλογος τῶν ΔΙ, ΙΚ, ἀποφέρεται $I\Lambda^2 = \Delta I \times IK = \alpha\sqrt{(\alpha\alpha + \gamma\gamma)}$· οὐκοῦν ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΙΑΗ ἔςιν ΙΗ, ἢ $MI = \sqrt{(IA^2 + AH^2)} = \sqrt{(\alpha\alpha + \frac{1}{4}\gamma\gamma)}$· ἐν δὲ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΛΙΜ (σχ. 31)· $\Lambda M = \sqrt{(MI^2 + I\Lambda^2)} = \sqrt{[\alpha\alpha}$ $\frac{1}{4}\gamma\gamma + \alpha\sqrt{(\alpha\alpha + \gamma\gamma)}] = \chi$, καὶ (σχ. 32) $IM = \sqrt{(\Lambda}$-

$M^2 - I\Lambda^2) = \sqrt{[\alpha\alpha + \frac{1}{4}\gamma\gamma - \alpha\sqrt{(\alpha\alpha + \gamma\gamma)}]} = \chi$.

583. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἰστέον δὲ ἐπὶ ταύτης τῆς ἐσχάτης δυνάμεως, ὡς ἐν τῇ ἡμῖν ἀποδοθείσῃ κατασκευῇ (σχ. 32) ὑποτίθεται ΙΗ $>$, ἢ γοῦν $=$ ΛΙ, εἰ δ' εἴη $<$, ὑπῆρχεν ἂν ἀδύνατον τὸ ζήτημα ἐπὶ τῆς ἐσχάτης περιπτώσεως, ὅπερ καὶ ἐκ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ καταφαίνεται· ἐπὶ γὰρ τῆς ἐκθέσεως $\chi = \sqrt{[\alpha\alpha + \frac{1}{4}\gamma\gamma - \alpha\sqrt{(\alpha\alpha+\gamma\gamma)}]} = \chi$, εἰ $\alpha\alpha + \frac{1}{4}\gamma\gamma$, ὅπερ ἐστὶν ΙΗ²· εἴη $< \alpha\sqrt{(\alpha\alpha+\gamma\gamma)}$, ὅπερ ἐστὶν ΙΛ², τὸ πρῶτον ὑπόρριζον ποσὸν ἔσεται λειπτικὸν, καὶ ἡ τοῦ χ δύναμις ἐπίπλαστος.

584. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Θέμενοι εἰς ἄγνωστον τὸ τῶν δυεῖν εὐθειῶν ΔΒ, ΔΓ ἄθροισμα (σχ. 31), ἢ τὴν αὐτῶν διαφορὰν (σχ. 32), ἐξίσωσιν ἔχομεν ἁπλουστέραν, ἢ εἴπερ ἐτιθέμεθα ΓΕ, ἢ ΑΓ, ἢ ΑΒ, ἢ ΙΒ· ἡ γὰρ τῶν ΔΒ, ΔΓ πρὸς τὰς ΙΒ, ΑΒ σχέσις ὁμοία ἐστὶ τῇ τῶν ΔΒ, ΔΓ πρὸς τὰς ΑΓ, ΓΕ, τοῦτ' ἔστιν ἐκεῖναι δι' ὁμοίων πράξεων ὁρισθῆναι δύνανται χρησαμένοις ταῖς ΙΒ, ΑΒ, ἢ ταῖς ΑΓ, ΓΕ· καθόλου δὲ εἰπεῖν, ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις ἐμπερικλείειν ὀφείλει πάσας τὰς σχέσεις τῆς ζητουμένης ποσότητος πρὸς τὰς, ἐξ ὧν ἤρτηται, τοσοῦτον ἀεὶ ἁπλουστέρα ἔσεται, ὅσον ἐλάττους ἔχει σχέσεις πρὸς τὰς λοιπὰς ἡ εἰς ἄγνωστον ληφθεῖσα ποσότης.

585. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η΄. Ἐν σφαίρᾳ (σχ. 33.) τῇ ΑΒΕΔ τῇ γεννωμένῃ ἐκ τῆς τοῦ ἡμικυκλίου ΑΒΕ περὶ τὴν ΑΕ διάμετρον περιαγωγῆς, ἐν ᾗ καὶ τομεὺς ὁ ΑΒΓ ἀπογεννᾷ τομέα σφαιρικὸν, ὃς σύγκειται ἔκ τε τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τοῦ γεννωμένου ἐκ τῆς περιαγωγῆς τοῦ ἡμιτμήματος ΑΒΠ, καὶ κώνου γεννωμένου ἐκ τοῦ ὀρθο-

γωνίȣ τριγώνȣ ΑΠΓ, εὑρεῖν τὸν τόπον, ἔνθα τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ἴσον ἔσεται τῷ κώνω.

ΛΥΣΙΣ α΄. Ἀναμνησέον ȣ̃ν (464), ὡς τομέως σφαιρικȣ̃ ἡ σερεότης ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ΒΑΔ ϗ $\frac{1}{3}$ ΑΓ· β΄. ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια εὑρίσκεται (454) πολλαπλασιαζομένης τῆς περιφερείας ΑΒΕΔ ἐπὶ τὸ ὕψος ΑΠ τȣ̃ τμήματος ΒΑΔ· ἐὰν ἄρα α : π ἐμφαίνῃ τὸν τῆς ἀκτῖνος πρὸς τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν λόγον, ϗ κληθῇ ΑΚ $= \beta$, ϗ ΑΠ$=\chi$, εὑρεθήσεται ἡ περιφέρεια ΑΒΔΕ διὰ τῆς ἀναλογίας $\alpha : \pi :: \beta :$ ΑΒΔΕ $= \frac{\pi\beta}{\alpha}$. ȣ̓κȣ̃ν ἡ ἐπιφάνεια τȣ̃ τμήματος ἔςαι $\frac{\varpi\beta\chi}{\alpha}$, ϗ δὴ ἡ

τȣ̃ τομέως σερεότης ἔςαι $= \frac{\varpi\beta\chi}{\alpha} \times \frac{1}{3}\beta = \frac{\pi\beta\beta\chi}{3\alpha}$.

γ΄. Εἰς εὕρεσιν δὲ τῆς σερεότητος τȣ̃ κώνȣ, πολλαπλασιασέον τὴν βάσιν, εἴτ᾽ ȣ̃ν τὸν κύκλον, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΒΠ, ἐπὶ $\frac{1}{3}$ τȣ̃ ὕψȣς ΚΠ· ἀλλ᾽ ἐπεὶ ΚΠ $=$ ΚΑ $-$ ΑΠ $= \beta - \chi$, ϗ ΚΒ $= \beta$ ἔςαι ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΒΠΚ, ΒΠ $= \surd(\Gamma B^2 - K\Pi^2) = \surd(\beta\beta - \beta\beta + 2\beta\chi - \chi\chi) = \surd(2\beta\chi - \chi\chi)$· εἰς δὲ εὕρεσιν τȣ̃ κύκλȣ, ȣ̃ ἀκτὶς ἡ ΒΠ, πολλαπλασιασέον τὴν περιφέρειαν ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν ἀκτῖνα· τὴν δὲ περιφέρειαν εὑρετέον διὰ τῆς ἀναλογίας $\alpha : \pi :: \surd(2\beta\chi - \chi\chi)$ πρὸς τέταρτον ὅρον, ὃς ἔςαι $\frac{\pi\surd(2\beta\chi - \chi\chi)}{\alpha}$. τȣ̃τον ȣ̃ν πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ τὴν ἡμίσειαν ἀκτῖνα $\frac{\surd(2\beta\chi - \chi\chi)}{2}$

ἕξομεν $\frac{\pi.(2\beta\chi - \chi\chi)}{2\alpha}$ ἐπιφάνειαν τῆς κωνικῆς βάσεως,

ἣν πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ τὸ τρίτον τȣ̃ ὕψȣς ΚΠ, εἴτ' ȣ̃ν ἐπὶ $\frac{\alpha - \chi}{3}$ ἕξομεν $\frac{\pi(2\beta\chi - \chi\chi)}{2\alpha} \times \frac{\alpha - \chi}{3}$ ςερεότητα τȣ̃ κώνȣ· ἀλλ' ἵνα ὁ κῶνος ἴσος εἴη τῷ τμήματι, ἀνάγκη πᾶσα τὸν τομέα, ὅς ἐςι τὸ ἄθροισμα ἑκατέρων, διπλάσιον ὑπάρχειν θατέρȣ τῶν δύω· ἀνάγκη ἄρα πᾶσα ὑπάρχειν $\frac{\pi\beta\beta\chi}{3\alpha} = 2\pi \times \frac{2\beta\chi - \chi\chi}{2\alpha} \times \frac{\beta - \chi}{3}$, ἢ $\frac{\pi\beta\beta\chi}{3\alpha} = \frac{\pi.(2\beta\chi - \chi\chi).(\beta - \chi)}{3\alpha}$, (ἐκθλίψει τȣ̃ 2 κοινȣ̃ ποιητȣ̃ τȣ̃τε ἀριθμητȣ̃ ϗ τȣ̃ παρονομαςȣ̃) ἐξίσωσις, ἢ ἐπιλύσει τὸ ζήτημα· δυνατὸν δὲ ἁπλȣςέραν ἀπεργάσασθαι τὴν ἐξίσωσιν, ἐξάγοντας 3α κοινὸν διαιρέτην, ϗ $\pi\chi$ κοινὸν πολλαπλασιαςὴν ἑκατέρȣ τῶν δύω μελῶν· ϗ δὴ ἀποληφθήσεται $\beta\beta = (2\beta - \chi).(\beta - \chi)$, ἢ $\chi\chi - 3\beta\chi = -\beta\beta$· ἐντεῦθεν ἄρα εὑρίσκεται κατὰ τȣ̀ς ἀλλαχόθι ἀποδοθέντας κανόνας $\chi = \frac{3}{2}\beta \pm \sqrt{(\frac{5}{4}\beta\beta)}$· ἀλλὰ τῶν δύω τȣ́των ἐπιλύσεων μόνη ἐξαρκεῖ ἡ $\chi = \frac{3}{2}\beta - \sqrt{(\frac{5}{4}\beta\beta)}$· ἐπεὶ γὰρ $\chi = \frac{3}{2}\beta + \sqrt{(\frac{5}{4}\beta\beta)}$ δύναται πλέον ἢ 2β, εἴτ' ȣ̃ν πλέον ἢ τὴν διάμετρον, ἡ καταδεικνυμένη ἐπίλυσις ȣ̓ συμβαίνει τῇ σφαίρᾳ.

Βȣλομένοις δὲ κατασκευάσαι τὴν ἐπίλυσιν $\chi = \frac{3}{2}\beta - \sqrt{(\frac{5}{4}\beta\beta)}$ ἀποδοτέον αὐτῇ τὸν τύπον $\chi = \frac{3}{2}\beta - \sqrt{(\frac{9}{4}\beta\beta)}$, ϗ λαβόντας ΑΜ $= \frac{3}{2}\beta$ γραπτέον ὡς ἐπὶ διαμέτρȣ τῆς ΑΜ ἡμικύκλιον τὸ ΑΟΜ, ϗ ἐναρμόσαντας τὴν χορδὴν ΑΟ $= \beta$ ἐπιζευκτέον τὴν ΟΜ, ἣν μετενεκτέον ἐκ τȣ̃ Μ ἐπὶ τὸ Π πρὸς τὸ Α· τὸ δὲ σημεῖον Π, εἰς ὃ ἀποτελευτᾷ, προσδιορίσει τὸ ὕψος ΑΠ $= \chi$· ϗ γὰρ τȣ̃ ΑΟΜ τριγώνȣ ὀρθογωνίȣ ὄντος, ἐςὶν ΟΜ, ἢ ΠΜ =

$\sqrt{(ΑΜ^2 - ΑΟ^2)}\sqrt{(\frac{9}{4}ββ - ββ)}$· ἄρα $ΑΠ = ΑΜ - ΠΜ = \frac{3}{2}α - \sqrt{(\frac{9}{4}ββ - ββ)} = χ$.

586. Ἡ δὲ δευτέρα ἐπίλυσις $χ = \frac{3}{2}β + \sqrt{(\frac{5}{4}ββ)}$, ὡς ἤδη εἴρηται, τῷ παρόντι ζητήματι ȣ̓ προσανήκει· προσανήκει δὲ, καθὰ ϗ ἡ πρώτη, ἑτέρῳ τοιȣ́τῳ ζητήματι, ὅπερ ἡ ἀνάγνωσις τῆς ἐξισώσεως $χχ - 3βχ = - ββ$, ἢ $3βχ - χχ = ββ$ παρέχεται (σχ. 34)· ἀμέλειτοι „εὐθείας δεδομένης τῆς ΑΝ εἰς τρία ἰσάλληλα μέρη διαιρεθείσης κατὰ τὰ σημεῖα Β, Δ, εὑρεῖν ἐπ' αὐτῆς σημεῖον τὸ Π, ὅπως τὸ τμῆμα ΑΔ μέσον ὑπάρχῃ ἀνάλογον πρὸς τά τȣ̃ Π ἀπὸ τῶν περάτων Α, Ν ἀποσήματα“ ϗ γὰρ ἐὰν κληθῇ β μὲν τὸ τρίτον μέρος ΑΔ τῆς ἐγνωσμένης εὐθείας ΑΝ, χ δὲ ἡ ΑΠ, ἀποφέρεται $ΠΝ = 3β - χ$· ἐκ δὲ τῶν τȣ̃ προβλήματος θέσεων πρόεισιν ἡ ἀναλογία $χ : β :: β : 3β - χ$, ὅθεν ἡ ἐξίσωσις $3βχ - χχ = ββ$, ἧς ῥίζαι ὡς ἀνωτέρω $χ = \frac{3}{2}β \pm \sqrt{(\frac{5}{4}ββ)}$, αἳ ἄμφω προΐασι διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς, εἴτ' ȣ̓̃ν ὑπὲρ τῆς $χ = \frac{3}{2}β + \sqrt{(\frac{5}{4}ββ)}$ μετενεχθήσεται ΜΟ ἐκ τȣ̃ Μ ἐπὶ τὸ Π πρὸς τὸ Ν, ϗ τηνικαῦτα ΑΠ ϗ ΑΠ' ἔσονται αἱ δύω τȣ̃ χ δυνάμεις.

587. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ μὲν ȣ̓̃ν Γεωμετρικὴ Ἀνάλυσις, ὅσον αὐτῆς περὶ τὴν ςοιχειώδη ἔχει Γεωμετρίαν, σχεδόν τι αὕτη, ἣν οἱ μελετῶντες, ϗ ἐξ ἑαυτῶν ὑποδείγματα τοῖς ἐντεθεῖσιν ἀδελφὰ ἐπιλύειν πειράσθωσαν· τὴν αὐτὴν δὲ ὑψηλοτέραν ὀψόμεθα ἐν τῇ ὑψηλῇ Γεωμετρίᾳ· ἤδη δὲ ῥητέον ἄττα περὶ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας πρὶν ἐκείνης ἐφάψασθαι.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Πρακτικὴ Γεωμετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ Χωροςαθμίσεως.

588. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δύω τόποι (Σχ. 35) ὁμόςαθμοι, ἢ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ εἶναι, λέγονται, ἐὰν ἴσον τȢ τῆς γῆς κέντρȢ Κ ἀπέχωσι· τὸ δ' εὑρίσκειν, εἰ δύω τόποι ἴσον ἀπέχȢσι τȢ τῆς γῆς κέντρȢ, ἢ γȢν, ὅση τῶν ἑκατέρȢ ἀποςάσεων ἐςὶν ἡ διαφορὰ, τȢτὶ καλεῖται χωροςάθμισις.

Ἐὰν Ȣν θεατὴς, ἐπὶ τȢ Δ καθήμενος, θεᾶται πρᾶγμα κατὰ τὸ Ε κείμενον διὰ τῆς εὐθείας ΔΕ, ἥτις ἅπτεται τῆς γηΐνης σφαίρας κατὰ τὸ Δ, ϗ ἰδίῳ ὀνόματι καλεῖται γραμμὴ ὁριζόντιος, Ȣτος κρινεῖ ὡς τὸ ὁρώμενον πρᾶγμα τῷ Δ ὁμόςαθμον· διὰ ταῦτ' ἄρα τὸ μὲν σημεῖον Ε καλεῖται φαινομένη ὁμοςαθμία, τὸ δὲ ο ἀληθής· ἵν' Ȣν ὁρισθῇ ἡ τῶν δύω τȢτων ὁμοςαθμιῶν διαφορὰ, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΔΕ παρέξει $ΚΕ^2 = ΚΔ^2 + ΔΕ^2$ (349)· ἐκȢν $ΚΕ = \sqrt{ΚΔ^2 + ΔΕ^2}$.

589. Ἐπεὶ τοίνυν ἡ τῆς γῆς ἀκτὶς ἐςὶ περίπȢ ποδῶν 19612344, ἐὰν τὸ μεταξὺ Δ ϗ Ε απόςημα ὑπο-

τεθῇ = μιᾷ λεύγῃ = 2282 ὀργιαῖς = 13692 ποσὶν, ἔςαι, $\sqrt{\text{ΚΔ}^2 + \text{ΔΕ}^2} = \sqrt{19612344^2 + 13692^2}$ = 19612348 ποσὶ σὺν περίπυ 9 δακτύλοις, ἀφ᾽ ὗ ἀφαιρεθείσης τῆς ΚΟ ἀκτῖνος καταλειφθήσονται 4 πόδες καὶ σχεδὸν 9 δάκτυλοι, δύναμις τῆς ΟΕ διαφορᾶς τῆς ἀληθοῦς ὁμοςαθμίας πρὸς τὴν φαινομένην· εὑρεθήσεται δὲ ἡ αὐτὴ καὶ ἀναγομένων τῶν λευγῶν εἰς ἔτι ἐλάττονα εἴδη· καὶ οὕτως ἐπὶ ἀποςήματος = 600 οργ. προκύψει διαφορὰ = 4 δακ., ἐπὶ δὲ, = 100, μία γραμμὴ + $\frac{1}{8}$, ἐπὶ δὲ, = 20 ὀργιαῖς, διαφορὰ ἔςαι ἐλάττων, ἢ ἡμίςιγμα.

590. Ἐν γένει ἄρα ἡ διαφορὰ τῆς φαινομένης ὁμοςαθμίας πρὸς τὴν ἀληθῆ ἐπὶ ἀποςήματος = 100 περίπυ ὀργιῶν, ἐκληπτέα ἐν τῇ πρακτικῇ = 0.

591. ΟΡΙΣΜΟΣ. Χωροςάθμη ἐςὶν ὄργανον, δι᾽ οὗ ἐξετάζεται ἡ δυοῖν τόπων ἀπὸ τοῦ τῆς γῆς κέντρου ἀπόςασις· παντοῖα μὲν οὖν ἐςιν εἴδη χωροςάθμης· ἣν δ᾽ ἡμεῖς ἁπλουςέραν τε καὶ εὐχρηςοτέραν τῶν ἄλλων κρίνομεν, ὑπάρχει, ἧς αὐτίκα τὴν κατασκευὴν ὑπογράψομεν.

592. Εἰλήφθω σίφων ὀρειχάλκειος ὁ ΑΒ, καὶ τοῖς πέρασιν αὐτοῦ Α, Β (σχ. 36) συγκεκολλήσθων σίφωνες δύω ὑέλινοι πρὸς ὀρθὰς γωνίας οἱ γδ, αζ ἀκριβῶς προσαρμοσθέντες, ὡς μὴ ἐκχέεσθαι τὸ ἐμβαλλόμενον ὕδωρ· ἐκεῖν συςαθήσεται ὁ δΑΒζ σίφων, συγκείμενος ἔκ τε τοῦ ΑΒ ὀρειχαλκείου, καὶ τῶν δγ, αζ ὑελίνων σιφώνων· τὸ δ᾽ αὐτῷ ἐνχεόμενον ὕδωρ, κατὰ τοὺς τῆς ὑδροςατικῆς νόμους, κἂν μὴ τὸ ὄργανον ἀκριβῶς ἔχῃ θέσιν κάθετον, ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ ἐφ᾽ ἑκατέρου τῶν ὑελίνων σιφώνων ἔςαι, εἴτ᾽ οὖν τὸ ὕψος αὐτοῦ ἐν ἑκατέρῳ ἴσον ἔςαι ἀπέχον τοῦ τῆς γῆς κέντρου· περιτίθενται δὲ τοῖς ὑελίνοις σίφωσι διὰ δα-

κτυλιδίων ϗ διόπτραι δύω, ὡς εἶναι δἰ αὐτῶν χρῆσθαι τῷ ὀργάνῳ εὐπετέςερον, ὡς δῆλον ἐκ τῶν εἰρησομένων ἔςαι· τȣτὶ ȣ̃ν τὸ ὄργανον ἔςιν, ἣν ἀνωτέρω εἴπομεν, ἡ χωροςάθμη.

593. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Χωροςαθμίσαι τὸ πρανὲς διάςημα ΑΒΟΗΜΥ.

ΛΥΣΙΣ. Εἰλήφθω δὴ πρῶτον τὸ ΑΟ (σχ. 37), διάςημα = 20 ὀργυιαῖς περίπȣ, ϗ τεθείσθω ἡ ΒΓΔ χωροςάθμη κάθετος τῷ ὁρίζοντι σχεδὸν κατὰ τὸ τȣ̃δε τȣ̃ διαςήματος μέσον Β.

Γινώσκεται δὲ, εἰ κάθετόν ἐςιν ἐπίπεδον τῷ ὁρίζοντι, διὰ νήματος μολύβδῳ κατὰ τὸ πέρας προσδεδεμένȣ· ϗ γὰρ τὸ τȣ̃ μολύβδȣ βάρος (ἢ ἑτέρȣτȣ βάρος ἔχοντος τῷ τȣ̃ νήματος πέρατι προσηρτημένȣ) ἐκτεῖνον τὸ νῆμα, καθ' ἣν ἐλεύθερον κάτεισιν εἰς τὸν ὁρίζοντα φορὰν, φέρεται πρὸς τὸ τῆς γῆς κέντρον, ἢ, ὃ ταὐτὸν, κάθετον τῷ ὁρίζοντι ἐφίςαται.

Στάθμης ȣ̃ν τεκτονικῆς τεθείσης πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι τῆς Αβ διὰ τῆς ΔΓδ ὀπτικῆς ἀκτῖνος διοπτευθήτω τὸ Δ· ἕτερος δέ τις σημειȣ́τω τὸ δ σημεῖον, ἐν ᾧ περατȣ̃ται ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς, ϗ τῆς Αδ ςάθμης ἀφαιρείτω τὸ ἐγνωσμένον τȣ̃ ὀργάνȣ ὕψος ΒΕ, τὸ δὲ κατάλοιπον ΑΚ ἔςιν ἡ διαφορὰ τȣ̃ ὑψώματος τῶν τόπων Β, Α.

Εἶτα ἐκ τȣ̃ Γ ληφθείσης ὡς ὀπτικῆς ἀκτῖνος τῆς ΓΔΖ, τῆς ςάθμης τε τεθείσης κατὰ τὸ Ο, τὸ ΖΟ ἀφῃρήσθω τȣ̃ ΒΕ, τὸ δὲ ΒΙ δείκνυσι τὴν διαφορὰν τῶν Ο, Β.

Τεθείσης ἑξῆς τῆς χωροςάθμης τῷ Η ἀπέχοντι τȣ̃ Ο ὀργυιὰς περὶ τὰς 10, τῆς δὲ ςάθμης ἐν τῷ Ο, ϗ εἶτα ἐν τῷ Μ, εὑρεθήσεται, ὡς πρότερον, ἡ διαφορὰ τῶν Η, Ο τόπων, ϗ ἡ τῶν Μ, Η· τῆς δὲ πράξεως ἐπαναληφθείσης μέχρι τȣ̃ Υ, ϗ τῶν μερικῶν διαφορῶν συναφθεισῶν,

προκύψει τέλως ἡ ὁλικὴ διαφορὰ τȣ̃ ὕψȣς τῶν Υ, Α τόπων. Ο. Ε. Π.

594. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δῆλον ȣ̃ν, ὡς εἰ κατ' ἀνάγκην παραλλὰξ ἐν ἀνόδοις ϗ καθόδοις τὰ τῆς πράξεως τελεσθῆναι δέοι, ἐπάναγκες κατέχειν τὸν κατάλογον τῶν μερικῶν διαφορῶν τῶν ἀνόδων ϗ τῶν καθόδων, ϗ ταύτας ἀφαιρεῖν ἀπ' ἐκείνων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Πρακτικῆς Μηκομετρίας.

595. Δυνάμεθα καταμετρῆσαι ἐπὶ τῆς γῆς ἢ μῆκος, ἢ ἐπιφάνειαν· τὸ δὲ μῆκός ἐςιν ἀεὶ εὐθεῖα γραμμή· ȣ̓κȣ̃ν ὅταν ἐξῇ περιπατῆσαι εὐθεῖαν, μετρȣ̃μεν αὐτὴν ἐφαρμόζοντες ἅπαξ, ἢ πολλάκις, μῆκος ἐγνωσμένον, φέρ' εἰπεῖν, ὀργυιάν.

596. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Διάςημά τι μετρῆσαι, καθ' ἓν μόνον πέρας προσβάσιμον, ποταμȣ̃ φέρε, ἢ λίμνης, ἥτȣ τοιȣ̃τȣ τὸ πλάτος.

ΛΥΣΙΣ. Κείσθω μετρῆσαι τὸ πλάτος ΠΔ (σχ. 38) λίμνης τινός· ἐν τῷ Π ȣ̃ν ἑςὼς ὁ Γεωμέτρης προσβλεψάτω σημείῳ τινὶ τῷ Δ πέραν τῆς λίμνης· ϗ πηξάτω δύω ῥάβδȣς τὰς Π, Τ, ὡς ἂν εἴη αἰσθητὸν τὸ αὐτῶν ἀπόςημα πρός γε τὸ ΠΔ διάςημα, ϗ ἐν ὀργυιαῖς μετρήσας τὸ ΠΤ ἀπόςημα, τιθέτω ἐν τῷ Π τὸ τȣ̃ γραφομέτρȣ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ὁρίζοντι, ϗ μετρείτω τὴν ὑπὸ ΔΠΤ γωνίαν (87)· ὡσαύτως τὸ γραφόμετρον ἐν τῷ Τ θεὶς, μετρείτω τὴν ὑπὸ ΠΤΔ· τέλος ζητησάτω τὴν ΠΔ πλευρὰν, ἢ γράφων ἐπὶ χάρτȣ τρίγωνον ὅμοιον τῷ κα-

τὰ γῆν ΠΔΤ (219), ἢ διὰ τῆς κλίμακος ἀναλογικῶς αὐτὴν πορίζόμενος (279), ἢ διὰ τῆς τριγωνομετρίας (516), λαμβάνων πρῶτον τὴν γωνίαν Δ = 180° — Π — Τ (210), ϗ ἐν ἀριθμοῖς συνιςῶν τὴν ἀριθμητικὴν τῶν τριῶν μέθοδον (516, 519) Δ. ΠΤ : ΤΠ. Δ.

597. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἡ ΠΤ γνωςὴ πλευρὰ τοῦ τριγώνου, ἥτις ὀνομάζεται βάσις τῆς πράξεως, ὀφείλει ἔχειν λόγον τινὰ πρὸς τὴν δι' αὐτῆς ζητουμένην πλευρὰν ἐπαισθητὸν, εἴτ' οὖν ὑπάρχειν αὐτῆς τὸ γοῦν πεμπτημόριον· ἄλλως γὰρ, ἀπάτη ἥτισοῦν τῷ τῶν γωνιῶν μέτρῳ παρεισφρήσασα λεληθότως, ϗ μάλα ἐπαισθητὴ ἔσεται πρὸς τὴν ζητουμένην πλευράν.

Πολλάκις μέντοι τό,τε τῆς γῆς ἀνώμαλον, ϗ ἄλλα πλεῖςα οὐκ ἐῶσι μετρηθῆναι δι' ὀργυιᾶς τὴν βάσιν τὴν τῆς πράξεως· ἐν ταύτῃ οὖν τῇ περιπτώσει χρήζοντες τῆς ὅλης βάσεως ΤΔ, ἣν ὀργυιᾷ μετρῆσαι ἀδύνατον, λαμβάνομεν ὡς βάσιν ἄλλην πλευρὰν τὴν ΒΤ, ϗ ἐπὶ τῶν περάτων Β, Τ, πράττομεν, καθ' ὃν εἴρηται τρόπον πρὸς λύσιν τοῦ ΒΤΔ τριγώνου, ϗ εὕρεσιν τῆς ΔΤ πλευρᾶς· δυνατὸν δὲ ἀεὶ ἐπαναλαμβάνειν τὰς πράξεις, ζητοῦντας διὰ βάσεως ἥττονος βάσιν μείζονα.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Σημειωτέον μέντοι, ὡς ὅσῳ μᾶλλον ἂν πολλαπλασιασθῶσιν αἱ τοιάιδε πράξεις, τοσούτῳ ἔλαττον ἐφιξόμεθα τῆς ἀκριβείας τοῦ ἀποτελέσματος.

598. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Γραμμὴν εὐθεῖαν, ἢ τὸ ΑΒ (σχ. 39) διάςημα, τὸ καθ' ἑκάτερον τῶν περάτων ἀπροσπέλασον, καταμετρῆσαι.

ΛΥΣΙΣ. Ἐμπεπήχθωσαν δύω ῥάβδοι αἱ Π, Ε, ϗ ὀργυιᾷ μετρηθήτω τὸ αὐτῶν ἀπόςημα ΠΕ, ϗ ἐν τῷ Π εἰλήφθωσαν διὰ τοῦ ἡμικυκλίου αἱ γωνίαι ΑΠΒ, ΑΠΕ,

ΒΠΕ· ἐν δὲ τῷ Ε αἱ γωνίαι ΒΕΠ, ΑΕΠ· Τριγώνȣ ȣ̃ν τȣ̃ ΒΠΕ γνωςῶν ὄντων τῆς ΠΕ πλευρᾶς ϗ τῶν πρὸς αὐτῇ γωνιῶν Π, Ε, ἑπομένως δὲ ϗ τῆς Β γωνίας, εὑρίσκεται ἡ ΒΠ (516)· ὡσαύτως (210) τȣ̃ ΑΠΕ τριγώνȣ γνωςῶν ὄντων τῆς ΠΕ πλευρᾶς, ϗ τῶν γωνιῶν Π, Ζ, ϗ Α ἑπομένως, εὑρίσκεται ϗ ἡ ΑΠ· ἐντεῦθεν ἄρα τριγώνȣ τȣ̃ ΑΒΠ, δύω πλευρῶν τῶν ΑΠ, ΒΠ ϗ τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας Π γινωσκομένων, εὑρεθήσεται (522) ἡ ΑΒ πλευρὰ, εἴτ' ȣ̃ν τὸ ζητȣ́μενον διάςημα.

599. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ λύσις τȣ̃δε τȣ̃ προβλήματος χορηγεῖ τὸν τρόπον, καθ' ὃν παράλληλος ἄγεται εὐθεία ἀπροσπελάσῳ τῇ ΑΒ, ὡς ὅτε παράλληλον σειρὰν πυροβόλων ὅπλων θεῖναι βȣλόμεθα τῇ κατ' ἐνώπιον ἐπ' εὐθείας ἱςαμένῃ ἐχθρικῇ ςρατιᾷ· ϗ γὰρ τριγώνȣ τȣ̃ ΑΒΠ γνωςῶν ὄντων τῶν πλευρῶν ΑΠ, ΠΒ, ϗ τῆς Π γωνίας, γνωσθήσεται (522) ἡ ὑπὸ ΑΒΠ γωνία· ἀχθεῖσα ȣ̃ν διὰ τȣ̃ Π ἡ ΠΕ εὐθεῖα, μετὰ τῆς ΒΠ ποιήσασα τὴν ὑπὸ ΒΠΕ = ΑΒΠ, παράλληλος ἔςαι τῇ ζητȣμένῃ (137)· τέλος δὲ ἡ τῇ ΓΟ ἀνεγερθεῖσα κάθετος, ἔσεται τȣ̃το ϗ τῇ ΟΒ

600. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὕψος τόπȣ τȣ̃ Δ καλεῖται ἡ αὐτȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ τῆς γῆς κέντρȣ ἀπόςασις ΔΚ (σχ. 35)· ȣ̓κȣ̃ν ἡ ὑπεροχὴ ὕψȣς τόπȣ τȣ̃ Ε ὑπὲρ τὸ τȣ̃ Δ ἐςὶ ΚΕ — Κο = οΕ· ἐὰν ȣ̃ν κληθῇ ὕψος τȣ̃ τόπȣ Ε ἡ οΕ ὑπεροχὴ, τὸ Ηο ὕψος (σχ. 40) πύργȣ τινὸς ἐκληφθήσεται ὡς προσιτὸν εἰ μόνον ἡ γῆ, εἴτ' ȣ̃ν ἡ ὁριζόντιος γραμμὴ ΔΟ, ἐπαισθητῶς ȣ̃σα ἐπιμήκης πρὸς τὸ Ηο ὕψος, ἐκμετρηθείη δι' ὀργιᾶς (597)· ἀλλὰ τὸ βΓ ὕψος αὐτȣ̃ τȣ́τȣ τȣ̃ πύργȣ μέχρι τȣ̃ ἀεροδείκτȣ, ἢ τὸ ΓΔ ὕψος ὄρȣς τινὸς (σχ. 42), ἔςαι ἀπροσέγγιςον.

601. ΠΡΟΒΛΗΒΑ Γ΄. Προσιτὸν εὑρεῖν ὕψος (40).

ΛΥΣΙΣ. Κείσθω τὸ ΗΠ ὕψος πύργȣ τινός· ἐκεῖν ἐμπεπήχθω ῥάβδος ἡ Κα, ϗ μετρηθήτω τῇ ὀργυιᾷ τὸ ΑΠ διάςημα, ϗ τεθήτω κατὰ τὸ Κ τὸ ἐπίπεδον τȣ͂ γραφομέτρȣ κάθετον τῷ ὁρίζοντι, ϗ εἰλήφθω ἡ ΗΚο γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ δυεῖν ὀπτικῶν ἀκτίνων τῶν ΚΗ, ΚΟ· ἡ μὲν ȣ͂ν ο ὀρθή ἐςι· γνωσθείσης ȣ͂ν ϗ τῆς Κ, κἀκ τȣ́τȣ ϗ τῆς Η (212), εὑρεθήσεται διὰ τῶν ἡμιτόνων ἐκ τῆς ἀνολογίας Η. Δο : Δ. ΗΟ (516, 519)· συναφθέντος δὲ τῇ ΗΟ ϗ τȣ͂ μέρȣς οΠ, ὃ δι᾽ ὀργυιᾶς, πήχεως, κτ., μετρηθῆναι δύναται, ἕξομεν τὸ ζητȣ́μενον. Ο. Ε. Π.

602. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Εὑρεῖν τὸ ἀπρόσιτον ὕψος τȣ͂ ΓΔ ὄρȣς (σχ. 42).

ΛΥΣΙΣ. Ἐμπεπήχθωσαν δύω ῥάβδοι Ι, Τ ϗ μετρηθήτω τὸ αὐτῶν ἀπόςημα· α΄. ȣ͂ν τεθήτω ἐν αὐτοῖς τὸ γραφόμετρον, ὡς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τȣ͂ ΙΤΓ τριγώνȣ, ϗ εἰλήφθων αἱ γωνίαι ΓΙΤ, ΙΤΓ. β΄. τεθέντος ἐν τῷ Ι φέρ᾽ εἰπεῖν τȣ͂ γραφομέτρȣ πρὸς ὀρθὰς τῷ ὁρίζοντι, μετρηθήτω ἡ ΓΙΔ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ὀπτικῆς ὁριζοντίȣ γραμμῆς ΙΔ, ϗ τῆς ὀπτικῆς ἀκτῖνος ΙΓ τῆς πρὸς τὴν κορυφὴν τȣ͂ ὄρȣς φερομένης.

Τριγώνȣ ȣ͂ν τȣ͂ ΙΓΤ γνωςῶν ὄντων τῆς ΙΤ πλευρᾶς, ϗ τῶν δύω γωνιῶν Ι, Τ, ϗ ἑπομένως τῆς Γ (210), εὑρεθήσεται τὸ ἀπὸ τȣ͂ Ι μέχρι τῆς κορυφῆς τȣ͂ ὄρȣς ἀπόςημα διὰ τῆς ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν μεθόδȣ (516) Γ. ΤΙ : Τ. ΓΙ.

Τριγώνȣ τοίνυν τȣ͂ ΙΔΓ γνωςῆς ȣ̓́σης τῆς ΙΓ πλευρᾶς, ϗ τῆς ὑπὸ ΓΙΔ γωνίας μετρηθείσης, τῆς δὲ Δ ὀρθῆς ȣ̓́σης, τῆς ὑπὸ τȣ͂ ΓΔ ὕψȣς πρὸς ὀρθὰς ἱςαμένȣ τῷ

ὁρίζοντι ϗ τῆς ΙΔ ὁριζοντίȣ περιεχομένης, γνωσθήσεται ϗ ἡ Γ γωνία· εὑρεθήσεται τοίνυν ἡ ζητȣμένη ΓΔ πλευρὰ ἐκ τῆς μεθόδȣ Δ. ΙΓ : Ι. ΓΔ. Ο. Ε. Π.

603. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Καὶ ἄλλως τὸ πρόβλημα τόδε ἐπιλυθήσεται· ἔςω γὰρ ἐπὶ χάρτȣ ἡ ΙΤ = ΙΤ τῇ ἐπὶ τῆς γῆς, ϗ ἐκ τῶν περάτων Ι, Τ ὑπὸ γωνίας τὰς ΓΤΙ, ΤΙΓ τὰς ἐπὶ τῆς γῆς εὑρεθείσας ἤχθωσαν δύω εὐθεῖαι· συςαθήσεται ἓν τὸ ΙΤΓ τρίγωνον· ϗ δὴ τεθείσθω ἡ ΙΓ πλευρὰ ἐπὶ τῆς κλίμακος, ϗ ὅτως ἀποληφθήσεται τὸ μεταξὺ τῆς ῥάβδȣ Ι ἀπόςημα ϗ τῆς τȣ̃ ὄρȣς κορυφῆς· τέλος δὲ ἐκ τȣ̃ Ι πέρατος συνεςάσθω ἡ ἐπὶ τῆς γῆς εὑρεθεῖσα ὑπὸ ΓΙΔ γωνία διὰ τῆς ἀπεράντȣ ΙΔ, ϗ ἐςάσθω ἐκ τȣ̃ Γ κάθετος τῇ ἀπεράντῳ ΙΔ ἡ ΓΔ, ἥτις ἐπιτεθεῖσα τῇ κλίμακι σημανεῖ τὸ τȣ̃ ὄρȣς ὕψος.

604. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ὑποτέθειται (σχ. 40, 42) ἐν τοῖς δυσὶ φθάσασι τῶν προβλημάτων ἡ ὑπὸ τȣ̃ ὕψȣς ϗ τῆς ὁριζοντίȣ γραμμῆς περιεχομένη γωνία ὀρθὴ, ὅπερ ἐςὶν ἀληθῶς προδηλότατον· ἔςω γὰρ (σχ. 35) Κ τὸ κέντρον τῆς γῆς· αἱ ἀληθεῖς δὲ ὁμαςαθμίαι ο, Δ σὺν τῷ Κ συνιςᾶσι τρίγωνον ἰσοσκελὲς, ȣ̔ αἱ δύω ἴσαι πλευραὶ ΔΓ, οΓ εἰσὶ δύω τῶν τῆς γῆς ἀκτίνων· ἀλλ᾽ ἡ διαφορὰ οΞ τῆς ἀληθȣ̃ς ὁμοςαθμίας πρὸς τὴν φαινομένην ȣ̓δέποτε μὲν ἔςαι μείζων ἢ ἡμίςιγμα ἐπὶ ὕψȣς προσιτȣ̃, ὃ μετρεῖν πρόκειται (589), πόδες δ᾽ εὐάριθμοί τινες ἐπὶ ὕψȣς ἀπροσίτȣ· ȣ̓κȣ̃ν ἐπαυξήσει τὴν γηΐνην ἀκτῖνα Κο μόνον ἀπειροςῷ τινι μεγέθει· ἄρα τὸ ΚΔΕ τρίγωνον καὶ ȣ̔́τω προφανῶς ἔςαι ἰσοσκελές· ἀλλ᾽ ἐπεὶ τὸ (σχ. 40, 42) Δι, ἢ ΔΙ ἀπόςημα, ἀφ᾽ ȣ̔ ἔθος μετρεῖσθαι τὸ προσιτὸν, ἢ ἀπρόσιτον ὕψος, ἀνεπαίσθητόν ἐςιν ὡς πρὸς τὴν γηΐνην ἀκτῖνα, ἡ ὑπὸ ΔΚο (σχ. 35) γωνία, ὑφ᾽ ἣν αὕτη ὑπο-

τείνει, ὡς ἀπειροςὴ ἐκληπτέα, ϗ ἑκατέρα τῶν δύω γωνιῶν Δ, ὃ ἔςαι $= \frac{180}{2} = 90°$ (210), εἴτ' ἒν ἑκατέρα ἐκληπτέα ὡς ὀρθή.

605. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Εὑρεῖν τὸ ὁριζόντιον ἀπόςημα δύω τόπων κειμένων ἐπὶ τȣ͂ πρανȣ͂ς.

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν τὸ διάςημα μὴ ᾖ ἀξιόλογον, ὡς ὅτε πρόκειται μετρῆσαι τὸ μῆκος ἢ πλάτος μικρȣ͂ τινος τμήματος τῆς γῆς, ἵν' εὑρεθῇ (σχ. 43) ἡ ΒΠ εὐθεῖα, τὸ ὁριζόντιον ἀπόςημα τῆς Α κορυφῆς ἀπὸ τȣ͂ Β σημείȣ, προσηρμόσθω τῷ πέρατι ὀργιᾶς γνώμων ϗ ςάθμη τεκτονικὴ, ϗ διατεθείσθω ὁριζοντικῶς ἡ ὀργιὰ διὰ τȣ͂ γνώμονος, ϗ τῆς ςάθμης, ὡς ὁρᾶται ἐν τῷ ΒοΔ σχήματι, ϗ μεμετρήσθω διὰ τῆς ὀργιᾶς, ἀναβαίνȣσιν ἐκ τȣ͂ Β ἐπὶ τὸ Α, ἡ ὁριζόντιος ΒΠ, ἥτις ἰσȣ͂ται τοῖς μέρεσιν οΔ, κτλ.· ἀλλ' ἡνίκ' ἂν προκέηται μέγατι ἀπόςημα, ὡς τὸ ΙΔ (σχ. 42) τὸ μεταξὺ τῆς Γ κορυφῆς ὄρȣς τινὸς, ϗ τȣ͂ τόπȣ Ι, ἐν ᾧ ἡ θέσις τῆς γῆς ἥκισα ἐπιτρέπει τὴν ἀνωτέρω πρᾶξιν· τότε δὴ εὑρήσομεν τὸ ὕψος Γ διὰ τȣ͂ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΙΔΓ (602)· κἀν τȣ́τῳ εὑρεθήσεται ϗ ἡ ζητȣμένη ὁριζόντιος γραμμὴ ΙΔ (516). Ο. Ε. Π.

606. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ΄. Μετρῆσαι τὸ ὄρȣς τινὸς πρανὲς Γη.

ΛΥΣΙΣ. Τȣ͂ ὕψȣς ΓΔ ϗ τῆς ὁριζοντίȣ ΙΔ εὑρεθέντων (602, 605), ζητείσθω, κατὰ τὴν χρείαν πηγνυμένων δύω ῥάβδων τῶν Ι, ο, διὰ τῆς ἐπιλύσεως τȣ͂ Ιοη τριγώνȣ τὸ τῆς ὁριζοντίȣ μέρος Ιη, ȣ̔͂ τινος ἀπὸ ΔΙ ἀφαιρεθέντος, καταλείπεται ἡ Δη· Τριγώνȣ ȣ͂ν ὀρθογωνίȣ τȣ͂ ΓΔη, ἐγνωσμένων τῶν τὴν Δ ὀρθὴν γωνίαν περι-

εχȣσῶν πλευρῶν, ἔςαι ἡ ταύτην ὑποτείνȣσα Γη $= \sqrt{(\eta\Delta^2 + \Delta\Gamma^2)}$ (349).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Ἰχνογραφίας.

607. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.** *Πίνακα γεωγραφικὸν σχεδιάσαι.*

ΛΥΣΙΣ. Μετρηθείσης ἀκριβῶς μιᾶς βάσεως (σχ. 44) τῆς ΟΠ, εἰλήφθωσαν πρὸς τῷ Ο διὰ τȣ̃ γραφομέτρȣ πᾶσαι αἱ γωνίαι ΖΟΠ, ΕΟΠ, ΔΟΠ, κτ., ἃς συνιςῶσι μετὰ τῆς ΟΠ πάντες οἱ ἐκ τῶν Ο, Π ὁρώμενοι τόποι· ὡσαύτως πρὸς τῷ Π εἰλήφθωσαν πᾶσαι αἱ γωνίαι ΖΠΟ, ΕΠΟ, ΔΠΟ, κτ· ἐντεῦθεν ȣ̃ν προκύψȣσι τρίγωνα τὰ ΠΟΖ, ΠΟΕ, κτ., ἐν οἷς γνωςά εἰσι μία πλευρὰ ἡ ΟΠ, ϗ δύω αἱ πρὸς αὐτῇ γωνίαι Ο, Π· ζητȣμένων ȣ̃ν ϗ τῶν λοιπῶν ἑκάςȣ τριγώνȣ, ϗ ἐπὶ χάρτȣ συνιςαμένων (379) ὁμοίων τȣ́τοις τριγώνων (219), ἐκτεθήσεται ἡ ἑκάςȣ τόπȣ θέσις ὡς πρὸς τὴν ΟΠ βάσιν· τὰ αὐτὰ δὲ γενέσθαι δύναται ϗ ὑπὲρ τῶν τόπων τῶν ἔνερθεν τῆς ΟΠ κειμένων.

Εἰς δὲ ὁρισμὸν τῆς θέσεως τȣ̃ Α τόπȣ διὰ τὰς ΑΘΠ λίαν ἀμβλείας γωνίας, ϗ διὰ τὰς λίαν ὀξείας ΑΠΟ, αὐτὰς μὲν διὰ τȣ̃ γραφομέτρȣ ἥκιςα μετρȣ̃μεν, διορίζομεν δὲ ταύτην τὴν θέσιν διὰ τῆς προευρημένης προσεχȣ̃ς πλευρᾶς ΒΟ τȣ̃ ΒΑΟ τριγώνȣ, λαμβάνοντες ἐκ μὲν τȣ̃ Ο τὴν ὑπὸ ΒΟΑ γωνίαν, ἐκ δὲ τȣ̃ Β τὴν ὑπὸ ΟΒΑ.

Ὁπόταν τόπος ὁ Η παρατηρητέος ᾖ ἐκ δύω ἑτέρων τόπων Τ, Δ, ὧν εἴληπται ἡ θέσις, ὁρᾷν αὐτὸν μὴ

δυνάμενοι ἐκ τῶν Ο, Π, λαμβάνομεν κατὰ τὸ Δ ϗ Τ τὰς γωνίας ΤΔΗ, ΗΤΔ, ϗ ἀγομένης ἐπὶ τοῦ πίνακος τῆς ΔΤ εὐθείας, συνιςάσθωσαν ἐπ᾽ αὐτὴν αἱ ἐπὶ τῆς γῆς εὑρεθεῖσαι γωνίαι ΤΔΗ, ΗΤΔ, τὸ δὲ σημεῖον τῆς κοινῆς διατομῆς Η ἐμφανεῖ ἐπὶ τοῦ πίνακος τὴς θέσιν τοῦ Η τόπου.

608. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ συχνάκις παροπηδοῦσα ταῖς δε ταῖς πράξεσιν ἀπάτη γίνεται μάλιςα, ἡνίκ᾽ ἂν ἡ γωνία, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ μετρηθησομένη πλευρὰ, ἢ λίαν ἀμβλεῖα, ἢ λίαν ὀξεῖα· τούτου χάριν ἐπὶ τῆς πράξεως, ὅσον ἔνεςι, φεύγομεν τῶν τοιῶνδε γωνιῶν τὴν καταμέτρησιν.

Δυνατὸν ἔτι θέσθαι (σχ. 45) ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ τοῦ πίνακος, ὅσους ἂν βουλώμεθα τόπους, ἀοράτους μὲν ἐκ τῶν Ο, Π, ὁρατοὺς μέντοι ἐκ δύῳ ἤδη τεθέντων τόπων.

609. Σανίδιον ΑΒ ἐςὶ μικράτις σανὶς κυκλικὴ, ἢ τετράγωνος, λίαν ὁμαλὴ, ἐφ᾽ ἧς τίθεται κανὼν κινητὸς, ὅμοιος σχεδόντι τῷ τοῦ γραφομέτρου, ὃς ἐνταῦθα δρομεὺς ὀνομάζεται, ἐπ᾽ αὐτὸ δὲ χάρτης κολλᾶται τῷ σφαγιςικῷ κηρῷ, ἵν᾽ ἔχοιεν εὐμαρῶς ἄγεσθαι ἐπ᾽ αὐτοῦ αἱ ὧν δεόμεθα εὐθεῖαι.

610. Ἄλλη Μέθοδος. Τῷ σανιδίῳ. Δυνάμεθα εὑρεῖν τὴν θέσιν τῶν τριῶν τόπων Τ, Ζ, Π· ἐκτεθείσθω γὰρ ἡ Οη ἐπὶ τοῦ σανιδίου ἐμφαίνουσα τὴν ΟΗ βάσιν, ϗ περιέχουσα τοσαῦτα μέρη ὅμοια τῆς γεωμετρικῆς κλίμακος, ὁσάκις φέρ᾽ εἰπεῖν ἡ ΟΗ βάσις περιέχει τὰς 100 ὀργυιάς· τεθείσθω δὲ τὸ τοῦ σανιδίου ἐπίπεδον ὁριζοντικῶς ἐπὶ τοῦ ο πέρατος τῆς ΟΗ βάσεως, ὥςε τὴν ἐπὶ τοῦ σανιδίου εὐθεῖαν οΗ διευθύνεσθαι πρὸς τὴν ΟΗ βάσιν· εἶτα ἑνὸς τῶν περάτων τοῦ δρομέως τιθεμένου ἐπὶ τοῦ ο πέρατος τῆς οη εὐθείας, διευθυνέσθω ἐκ διαδοχῆς πρὸς τοὺς τόπους

Τ, Ζ, Π, ϗ ἤχθωσαν πρὸς τὸν δρομέα ἐπὶ χάρτȣ αἱ εὐθεῖαι ΤΟ, ΖΟ, ΠΟ, αἵτινες γίνονται δο, χο, πο.

Μεταβεβιβάσθω εἶτα τὸ σανίδιον ἐπὶ τȣ̃ Η, ϗ τεθήτω ὡς ϗ πρότερον, ϗ ἐπιτεθήτω ἓν πέρας τȣ̃ δρομέως ἐπὶ τȣ̃ η, ϗ διευθυνθήτω ὁ δρομεὺς ἐκ διαδοχῆς πρὸς τȣ̀ς τόπȣς Τ, Ζ, Π· αἱ ȣ̃ν εὐθεῖαι δη, χη, πη, αἱ κατὰ μῆκος τȣ̃ δρομέως ἀγόμεναι, τέμνȣσαι τὰς ἐκ τȣ̃ ο ἀχθείσας εὐθείας, παρέξȣσι τὰ σημεῖα δ, χ, π, ὧν ἡ θέσις ἡ αὐτὴ ἔςαι τῶν τόπων Τ, Ζ, Π· ϗ γὰρ ἕκαςον τῶν ἐπὶ τȣ̃ σανιδίȣ τριγώνων, ἔχον δύω γωνίας ο, η, ἴσας ταῖς ἀντιςοίχοις Ο, Η, ἐν τῷ μεγάλῳ τριγώνῳ ΗΟΤ, τῷ ἐπὶ τῆς γῆς, ἀναγκαίως αὐτῷ ἔςαι ὅμοιον.

611. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὁ ἐπαρχίας τινὸς πίναξ, ȣ̓δὲν ἕτερόν ἐςιν, ἢ θέσις ὁριζοντικὴ τῶν κυριωτέρων τόπων αὐτῆς, τȣτέςιν ἡ θέσις, ἣν εἶχον ἂν πρὸς ἀλλήλȣς, εἰ ἦσαν ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ· τȣ́τȣ δὴ χάριν ἵνα λάβωμεν τὰς γωνίας, αἵτινες παριςῶσι τὴν θέσιν τῶν διαφόρων τόπων, κατέχειν δεῖ τὸ τȣ̃ γραφομέτρȣ ἢ τὸ τȣ̃ σανιδίȣ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ὁρίζοντι· ἐντεῦθεν ἄρα αἱ ὀπτικαὶ ἀκτῖνες, αἱ διὰ τῶν διόπτρων παραλλήλως τῷ τȣ̃ γραφομέτρȣ, ἢ σανιδίȣ, ἐπιπέδῳ πρὸς δύω ῥάβδȣς διαγόμεναι, τμηθήσονται ἐν σημείοις, ἃ δύνȣνται ἀσφαλῶς θεωρηθῆναι ὡς κείμενα ἐπὶ τῆς ὁριζοντίȣ θέσεως (604). Τοιγαρȣ̃ν, ἵνα τȣ̃ γραφομέτρȣ, ἢ τȣ̃ σανιδίȣ, παραλλήλως τεθέντος τῷ ὁρίζοντι, ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς ἔμπης διευθύνηται πρὸς τὴν κορυφὴν Α ὄρȣς τινός, τὴν μᾶλλον ἀπέχȣσαν τȣ̃ ὄμματος διόπτραν δεήσει εἶναι ἄλις ὑψηλὴν, ϗ τοσȣ́τῳ μᾶλλον, ὅσῳ μᾶλλον ἀλλήλων ἀποςήσονται.

612. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Χωρίον ςχεδιάσαι ἐν ἐπιπέδῳ κείμενον, ϗ ἀπρόσιτον ὄν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκτὸς τȣ̃ (σχ. 46) ΟΗΤΠ ἐπιπέδȣ εἰλήφθω βάσις ἡ ΑΒ, ϗ μετρείσθωσαν διὰ τȣ̃ γραφομέτρȣ πᾶσαι αἱ γωνίαι ΤΒΑ, ΠΒΑ, κτ., ὡς ἐν τῷ προεκτεθέντι ὑποδείγματι (607)· εἶτα ἐπὶ τῆς μικρᾶς βάσεως ΑΒ ἐν τῷ χάρτῃ ληφθείσης συνεςάτωσαν τρίγωνα ΑΒΤ, ΑΒΠ, κτ., ὅμοια τοῖς ἐπὶ τῆς γῆς μεγάλοις τριγώνοις ΑΒΤ, ΑΒΠ, κτλ.· ὅθεν ἔςαι ἡ θέσις τῶν γωνιῶν Η, Π, Τ, Ο, αἵτινες εἰσὶν ἐπὶ τῆς γῆς· ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν κορυφῶν Η, Π, Τ, Ο δὶ εὐθειῶν, προκύψει τὸ ζητȣ́μενον ἐπίπεδον ΗΠΤΟ.

613. Διὰ τȣ̃ σανιδίȣ· Ἤχθω μικρὰ εὐθεῖα (σχ. 47) ἐπὶ τȣ̃ σανιδίȣ ἡ δΒ, ϗ τιθέσθω τοδὶ τὸ ὄργανον ἐπὶ τȣ̃ Α ὥςε τὴν δΒ εὐθεῖαν, ἔχȣσαν τὸ πέρας αὐτῆς ἐπὶ τȣ̃ Α, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἶναι τῇ ἐπὶ τῆς γῆς βάσει ΑΒ· ϗ διοπτευθήτωσαν αἱ κορυφαὶ Η, Π, Ο, Τ, ϗ ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΗΑ, ΠΑ, ΟΑ, ΤΑ, αἵτινες γίνονται ἐπὶ τȣ̃ σανιδίȣ ηδ, πδ, οδ, χδ, ὡς ἀδιόριςοι· τεθείσθω εἶτα τὸ σανίδιον ἐπὶ τȣ̃ Β πέρατος, τὸ μὲν Β ἔχον ἐπὶ τȣ̃ Β, τὸ δὲ δ διατεῖνον πρὸς τὸ Α, ϗ ἤχθωσαν παρὰ τὸν δρομέα, ἥκȣσαι πρὸς τὰ σημεῖα Η, Π, Ο, Τ, αἱ εὐθεῖαι ΗΒ, ΠΒ, ΟΒ, ΤΒ, αἵτινες τέμνȣσαι τὰς προτέρας ἐν τοῖς σημείοις η, π, ο, χ, παρέξȣσι τὸ ζητȣ́μενον ἐπίπεδον.

614. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἵνα σχεδιασθῇ ἐπιπεδόντι ὁριζοντικὸν, τὸ τȣ̃ γραφομέτρȣ, ἢ τȣ̃ σανιδίȣ, ἀεὶ δεῖ εἶναι παράλληλον τῷ ὁρίζοντι.

615 ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Χωρὶς προσιτȣ̃ δὶ ἐνίων τῶν αὐτȣ̃ πλευρῶν μόνον, ȣ̓ μὴν δὲ ϗ ἐν τοῖς αὐτȣ̃ ἐσωτετρικοῖς μέρεσιν, εἴτ' ȣ̓̃ν (σχ. 48) λίμνης τῆς ΑΒΓΔΕΖ, τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσαι.

ΛΥΣΙΣ. Μετρηθήτω διὰ τῆς ὀργυιᾶς μία πλευρὰ τῆς λίμνης ἡ ΑΒ· καὶ δὴ ἐπίτε τῆς γῆς ϗ τȣ̃ χάρτȣ μεθοδευέσθω διὰ τȣ̃ γραφομέτρȣ, ἢ τȣ̃ σανιδίȣ, ὡς εἴπερ αἱ γωνίαι Ζ, Ε, Δ, Γ, ἦσαν τόπων θεατῶν, ὧν πρȣ̈́κειτο σχεδιάσαι τὸν γεωγραφικὸν πίνακα (607, 610)· ληφθήσης ȣ̃ν ȣ̈́τως ἐπὶ τȣ̃ χάρτȣ τῆς θέσεως τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, κτλ., ἐπεζεύχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, ΓΔ, κτ· ὅθεν προκύψει τὸ ἐπίπεδον τῆς λίμνης.

616. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Χωρὶς τȣ̃ ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 49) τȣ̃ ἐπὶ πρανȣ̃ς κειμένȣ, ȣ̃ τὰ ἔσω ὑπάρχει προσβάσιμα, τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσαι.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τȣ̃ γραφομέτρȣ ληφθέντος τινὸς ἐσωτερικȣ̃ σημείȣ τȣ̃ Ι, μετρηθήτωσαν αἱ ὑπὸ ΑΙΟ, ΟΙΖ, κτλ. γωνίαι, ϗ διὰ τῆς ὀργυιᾶς μετρηθήτωσαν αἱ εὐθεῖαι ΙΑ, ΙΟ, κτλ.· ἐκτεθεισῶν δὲ ἐπὶ τȣ̃ χάρτȣ τῶνδε τῶν γωνιῶν διὰ τȣ̃ ἀναγωγέως, ϗ τῶν εὐθειῶν διὰ τῆς γεωμετρικῆς κλίμακος, ἐπεζεύχθωσαν τὰ πέρατα Α, Ο, κτλ., διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΟ, κτλ., ὅθεν προκύψει τὸ τῆς γῆς ἐπίπεδον.

Τȣ̃ σανιδίȣ τεθέντος ἐν τῷ Ι, ϗ τȣ̃ δρομέως ἐκ διαδοχῆς διευθυνομένȣ πρὸς τὰς γωνίας Α, Ο, κτλ., ἤχθωσαν εὐθεῖαι πέρας μὴ ἔχȣσαι αἱ ΙΑ, ΙΟ, κτλ., ϗ ἐκτελεσθήτω ἡ πρᾶξις, ὡς πρότερον.

Ἄλλως. Μετρηθείσης τῆς ΟΖ πλευρᾶς ὡς βάσεως, σχεδιασθήτω τὸ ἐπίπεδον τῆς γῆς, ὡς εἰ ἦσαν ἀπρόσιτα τὰ ἐν αὐτῷ μέρη (615).

617. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Σχεδιάσαι τὸ ὁριζοντικὸν ἐπίπεδον χωρίȣ κατὰ τȣ̃ πρανȣ̃ς κειμένȣ.

ΛΥΣΙΣ. Γενέσθω ἀπολύτως, ὡς εἰ τὸ χωρίον ἦν

ἐπίπεδον, κατεχομένȣ ἀεὶ τȣ̃ ἐπιπέδȣ τȣ̃ γραφομέτρȣ, ἢ τȣ̃ σανιδίȣ παραλλήλως τῷ ὁρίζοντι (613 κτλ.).

618. Ἵνα μέντοι σχεδιασθῇ τὸ ὁριζοντικὸν ἐπίπεδον ὄρȣς, εἰλήφθω ἡ θέσις τῶν σημείων, ἃ περιέχȣσι τὴν αὐτȣ̃ ὁριζόντιον περίμετρον, ἢ κατὰ τὴν μέθοδον τȣ̃ πίνακα γεωγραφικὸν σχεδιάζειν (607), ἢ ἐκδεξαμένοις τὰς διαφόρȣς προσόψεις τȣ̃ ὄρȣς ὡς ἀπροσίτȣς (612), ϗ λαϐȣ̃σι τὰ ἰδιαίτερα ἐπίπεδα αὐτῶν τῶν προσόψεων διὰ τῶν ἐπὶ τȣ̃ ἐπιπέδȣ διαφόρων βάσεων, ἢ ἐκδεξαμένοις ἑκάστην τῶν προσόψεων ὡς χωρίον προσιτὸν διὰ μιᾶς μόνης πλευρᾶς (615), ἢ ἅμα χρησαμένοις ἁπάσαις ταῖς δε ταῖς μεθόδοις, καθ' ἣν ἑκάστη πρόσοψις παρίστησι χρῆσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Σύνοψις τῆς ἐχυροποιΐας.

619. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἐπίπεδον ἐπὶ χάρτȣ δοθὲν κατὰ γῆς σχεδιάσαι, εἴτ' ȣ̃ν τὸ ἀκονόνιστον ἐπίπεδον (σχ. 50) αβγδεζ.

ΛΥΣΙΣ. α΄. Εἰλήφθω σημεῖον τὸ Ι ἐν τῷ μέσῳ τȣ̃δε τȣ̃ ἐπιπέδȣ, ϗ τεθέντος ἐπ' αὐτὸ ἑνὸς πέρατος τȣ̃ δρομέως διοπτευθήτωσαν ἐκδιαδοχῆς πᾶσαι αἱ γωνιαι α, β, γ, κτ., ϗ προσηλωθήτωσαν ἐν τῇ γῇ ἐν ταῖς δειχθείσαις φοραῖς αἱ ῥάϐδοι Α, Β, Γ, κτλ.

β΄. Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς κλίμακος διὰ τȣ̃ διαϐήτȣ ἑκάστη εὐθεῖα Ια, Ιβ, κτλ., ϗ ἐὰν ἐπὶ τῆς κλίμακος ᾖ Ια = 100 φέρ' εἰπεῖν, γενέσθω ἐπὶ τῆς γῆς ΙΑ = 100 ὀργυιαῖς· ταὐτὸ δὲ γενέσθω κἀπὶ τῶν ἄλλων εὐθειῶν Ιβ, Ιγ, κτλ.

γ΄. Τέλος δὲ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, κτλ.· τὸ δὲ ΑΒΓΔΕΖ ἔςαι σχῆμα ὅμοιον τῷ ἐπὶ τȣ̃ χάρτȣ δοθέντι· τὰ γὰρ Ιαβ, ΙΑΒ τρίγωνα διὰ τὴν Ι κοινὴν γωνίαν ϗ διὰ τὰς ἀναλόγȣς πλευρὰς Ια, Ιβ, ΙΑ, ΙΒ, εἰσὶν ὅμοια (337)· ὁμοίως δὲ ϗ τὰ ἄλλα τρίγωνα.

620. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τȣ̃ ἀριθμȣ̃ τῶν πλευρῶν δοθέντος, ϗ τῆς ἀκτῖνος, κανονικὸν πολύγωνον ἐπὶ τῆς γῆς συςῆσαι, ἐχυροποιΐᾳ, ἢ ἄλλῳ τῳ, συντελȣ̃ν.

ΛΥΣΙΣ. Κείσθω ἐχυροποιῆσαι (σχ. 51) τὸν τόπον Ι ϗ δὴ περὶ τὸ Ι, ὡς περὶ κέντρον, προκείσθω συςῆσαι ἑξάγωνον κανονικὸν ἐπὶ ἀκτῖνος ΙΑ = 180 ὀργ.

α΄. Ἐν παντὶ ἑξαγώνῳ κανονικῷ ἡ πρὸς τῷ Ι κέντρῳ παντὸς τριγώνȣ τȣ̃ ΙΑΒ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ δύω πλαγίων ἀκτίνων ΙΑ, ΙΒ, ἔςιν = 60° (396)· ἐκ τȣ̃ Ι ȣ̃ν διοπτευθείσης διὰ τȣ̃ δρομέως πρὸς τὸ δοκȣ̃ν μιᾶς ἀκτῖνος, ἐμπεπήχθω ῥάβδος κατὰ τὸ Χ· παρεκλιθέντος δὲ τȣ̃ δρομέως μοίραις 60 ἐμπεπήχθω ἐνταῦθα κατὰ τὴν φορὰν ΙΨ ἄλλη ῥάβδος· ἐκ δὲ τȣ́τȣ πάλιν παρεκκλίσεως 60 ἄλλων μοιρῶν γινομένης, ἐμπεπήχθω ἄλλη ῥάβδος κατὰ τὴν Ικ φορὰν, ϗ ȣ̃τως ἐφεξῆς.

β΄. Ἐκ δὲ δὴ τȣ̃ Ι μετρηθεισῶν ἐπὶ τῆς ΙΧ ὀργυιῶν 180, ϗ ἐπὶ τῆς ΙΨ δὲ, κἀπὶ τῶν ἄλλων εὐθειῶν, προκύψȣσιν αἱ εὐθεῖαι ΙΑ, ΙΒ, ΙΟ κ. τ. λ., ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΟ κ. τ. λ. γενήσεται ἑξάγωνον κανονικὸν τὸ ΑΒΟΔΕΖ, κατεσκευασμένον ἐπ' ἀκτῖνος = 180 ὀργυιαῖς κατὰ τὴν ζήτησιν, ὃ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον (249).

Εἰς δὲ κατασκευὴν κανονικȣ̃ πενταγώνȣ, παρατηρηθήτω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία παντὸς τριγώνȣ

τȣ̃ ἐν αὐτῷ ἐςιν $= 72°$ (249)· ταδ᾽ ἄλλα διαπεπράχθω, ὡς ἀνωτέρω.

Ὑπὲρ δὲ τετραγώνȣ τελείȣ γενέσθω ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ὑπὸ ΧΙΖ γωνία $= 90°$, ϗ $= 120°$ ὑπὲρ τριγώνȣ (249), ϗ τὰ λοιπὰ πεπράχθω, ὡς ϗ πρότερον.

Ὑπὲρ δὲ κανονικȣ̃ ἑπταγώνȣ, ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία ἐςὶν $= 50° + 25^{I} + 42^{II}$ κ. τ. λ., διὰ τȣ̃ γραφομέτρȣ τὰ τῆς πράξεως ȣ̓κ ἂν ἐξακριβωθείη· ταυτὸν δὲ νοητέον ϗ περὶ παντὸς ἄλλȣ κανονικȣ̃ πολυγώνȣ, ȣ̔ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία Ι ȣ̓κ ἂν εἴη ἐν ὁλοσχερέσι μοίραις ἐκδηλȣμένη· ὑπὲρ δὲ ὀκταγώνȣ γενέσθω ἡ γωνία $= 45$, ὑπὲρ ἐννεαγώνȣ $= 40°$, ὑπὲρ δεκαγώνȣ $= 36°$ κ. τ. λ. (249).

621. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν δὲ μὴ ἐξῇ ἐκ τȣ̃ μέσȣ τȣ̃ ἐχυροποιηθησομένȣ τόπȣ κατασκευάσαι πολύγωνα, διαπραξόμεθα τὰ ἑξῆς.

ά. Ἀναμνηςέον, ὡς ἐν γένει ἑκάςη ἐσωτερικὴ γωνία κανονικȣ̃ πολυγώνου ἴση ἐςὶ δὶς τοσαύταις ὀρθαῖς πλὴν τεσσάρων, ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον, διαιρεθείσαις τῷ ἀριθμῷ τῶν πλευρῶν (267)· ἐντεῦθεν τριγώνȣ μέν ἐςιν $= 60°$, τετραγώνȣ δὲ $= 90°$, πενταγώνȣ δὲ $= 108°$, ἑξαγώνȣ δὲ $= 120°$, ἑπταγώνȣ δὲ $= 128° + 34^{I}$ κτ., ὀκταγώνȣ δὲ $= 135°$ ϗ τὰ ἑξῆς.

β΄. Ἐὰν ȣ̃ν ζητῆται κανονικὸν ἑξάγωνον, ςὰς ἐν τῷ σημείῳ Α, εἰλημμένῳ περὶ τὸν ἐχυροποιηθησόμενον τόπον, προσήλȣ ῥαβδίον ἐπὶ τῆς τȣ̃ δρομέως φορᾶς ΑΒ· ςρέψας δὲ τὸν δρομέα πρὸς τὸ Ζ, ἕως ἂν διαδράμῃ μοίρας $120°$, προσήλȣ ἕτερον ῥαβδίον ἐπὶ τὴν ΑΖ φοράν.

Παρατηρȣ̃ντι δὲ, ὡς τὸ ἐν ἑξαγώνῳ κανονικῷ τρίγωνον ἐςὶν ἰσόπλευρον (251), γενέσθω ἑκάςη πλευρὰ

AB, AZ ἴση τῇ ἀκτῖνι = 180 ὀργυιαῖς· τῶν δὲ δύω πλευρῶν AB, AZ ὕτως ὁριθεισῶν, συνεςάτωσαν ἐπὶ τῶν κατ' αὐτὰς περάτων B, Z δύω νέαι γωνίαι ἑκατέρα = 120° διὰ τῶν νέων πλευρῶν BO, ZE, ὧν ἑκατέρα γενέσθω = 180 ὀργυιαῖς, ᾗ ἑξῆς ὡσαύτως· ἐντεῦθεν συςαθήσεται ἐπὶ τῆς γῆς ἑξάγωνον κανονικὸν ἐπὶ τῆς αἰτηθείσης ἀκτῖνος.

Ἐν παντὶ δὲ ἄλλῳ κανονικῷ σχήματι ὁριςέον τριγωνομετρικῶς, ὅσον δεῖ εἶναι τὸ μῆκος ἑκάςης πλευρᾶς, τῦ τῆς ἀκτῖνος δεδομένυ μήκυς.

622. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθω κατασκευάσαι κανονικὸν πεντάγωνον ἐπὶ ἀκτῖνος τῆς IA = 180 ὀργυιαῖς· ἐπεὶ ὖν ἡ ἐσωτερικὴ ὑπὸ BAZ γωνία τῦ πενταγώνυ ἐςὶν = 108° (267), ἡ ὑπὸ BAI γωνία τῦ ABI τριγώνυ ἡμίσεια αὐτῆς ἔςαι, εἴτ' ὖν 54°, ἡ δὲ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία AIB = 72° (249). Τριγώνυ ὖν τῦ IBA γνωςῶν ὄντων τῶν τε δύω γωνιῶν A, I ᾗ τῆς πλευρᾶς IB = IA = 180 ὀργυιαῖς, ἡ συνήθης τῶν τριῶν μέθοδος (516) συνημ. A : IB : : συνημ. I : AB ἐκδηλώσει τὸ μῆκος, ὃ ἀπονεμηθῆναι δεῖ ἑκάςῃ πλευρᾷ AB, AZ κ. τ. λ. τῦ πενταγώνυ· τὰ δὲ λοιπὰ, ὡς πρότερον, διαπραχθήσεται.

Ὁ ρ ι σ μ ο ί.

623. Ὑποτεθείσθω τὸ ἡμιεξάγωνον (σχ. 52) ABΓΔ ἥμισυ ἐπιπέδυ, ἐν γῇ γενομένης ἐχυροποιΐας· τὸ μὲν ὖν ABΓΔ καλεῖται π ο λ ύ γ ω ν ο ν ἐ ξ ω τ ε ρ ι κ ὸ ν, τὸ δὲ χβΤδ, π ο λ ύ γ ω ν ο ν ἐ σ ω τ ε ρ ι κ ό ν· ᾗ γ ρ α μ μ ὴ μ ὲ ν τ ῆ ς β ά σ ε ω ς καλεῖται μία τις πλευρὰ BΓ τῦ ἐξωτερικῦ πολυγώνυ· π ύ ρ γ ο ς δὲ, ὅλον τὸ μέρος BEτκZ· ἡ

δὲ γραμμὴ ΒΕ, ἡ ΒΖ προπύργιον· ἡ δὲ δύω πύργυς διακρίνυσα γραμμὴ κο, χόρτος.

624. Ἡ κΖ γραμμὴ καλεῖται πλευρόν.

625. Γωνία ἠλαττωμένη ἐςὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΖ ἡ ὑπὸ τῆς βάσεως ΒΓ καὶ ἑνὸς προπυργίυ ΒΖ περιεχομένη, γωνία δὲ πλευρώδης, ἡ ὑπὸ δύω προπυργίων τῶν ΒΕ, ΒΖ περιεχομένη· κέκληται δὲ ὕτως ὡς φρυρυμένη ὑπὸ τῶν δύω προπυργίων Μο, ΠΡ.

626. Γωνία πλευρῦ ἐςιν ἡ Ζκο ἡ ὑπὸ τῦ πλευρῦ Ζκ καὶ τῦ χόρτυ κο περιεχομένη· γωνία δὲ νώτυ, ἡ ΒΖκ ἡ περιεχομένη ὑφ᾽ ἑνὸς προπυργίυ τῦ ΒΖ, καὶ ἑνὸς πλευρῦ τῦ Ζκ.

627. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. *Δοθέντος τῦ κανονικῦ πολυγώνυ, καθ᾽ ὃ πρόκειται κατασκευάσαι ἐχυροποιΐαν τινὰ, ἐπὶ χάρτυ, λογίσασθαι δὶ αὐτῦ τὰς γωνίας καὶ τὰς γραμμὰς τῆς ἐπὶ τῆς γῆς κατασκευασθησομένης ἐχυροποιΐας.*

ΛΥΣΙΣ. Ε῎ςω ὖν ἑξάγωνον τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔ· α΄. γενέσθω ἡ γραμμὴ τῆς βάσεως ΒΓ $=$ 180 ὀργυαῖς περίπυ ὑπὲρ μετρίας ἐχυροποιΐας· καὶ ἐςάσθω κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς ἡ κάθετος ΗΙ, ἥτις ἔςω ἴση τῷ ἑκτημορίῳ τῆς ΒΓ ὑπὲρ ἑξαγώνυ, τῷ πεμπτημορίῳ ὑπὲρ πενταγώνυ, τῷ ὀκτημορίῳ ὑπὲρ ὀκταγώνυ κ.τ.λ.· διὰ δὲ τῦ Ι διήχθωσαν πέρας μὴ ἔχυσαι αἱ εὐθεῖαι ΒΙο, ΓΙκ.

β΄. Τριγώνυ ὖν τῦ ΒΗΙ, γνωςῶν ὄντων τῆς πλευρᾶς ΒΗ $= \frac{180}{2} =$ 90 ὀργυαῖς, καὶ τῆς ΗΙ $= \frac{180}{6} =$ 30 ὀργυαῖς, καὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας Η, πρὸς εὕρεσιν τῆς ἠλαττωμένης γωνίας ΗΒΙ φημὶ: τὸ τῶν δύω πλευρῶν ΒΗ, ΗΙ ἄθροισμα 120 ἐςὶ πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν 60, ὡς ἡ ἁπτομένη τῦ ἡμιαθροίσματος 45° (212) τῶν δύω γωνιῶν

Β, Ι πρὸς τὴν χ ἀπτομένην τῆς ζητȣμένης ἡμιδιαφορᾶς τῶν δε τῶν γωνιῶν (499)· ἥτις διὰ τῆς μεθόδȣ τῶν τριῶν εὑρίσκεται $= 26° + 34'$· ἐκȣ̃ν ἐςὶν ἡ ἠλαττωμένη γωνία ΗΒΙ $= \frac{20}{2}° - 26° - 34'$ (210) $= 18° + 26'$ ἀφαιρȣμένης ȣ̃ν τῆς $18° + 26'$ ἀπὸ $60°$ ἡμίσεως τῆς γωνίας Β τȣ̃ πολυγώνȣ, ἔςαι κατάλοιπον $41° + 34'$ ἡμιγωνία πλευρώδης ΖΒβ· ἄρα ὅλη ἡ πλευρώδης γωνία ἐςὶν $= 83° + 8' =$ ΖΒΕ.

γ΄. Ἐπιλυθέντος δὲ τȣ̃ ΒΗΙ τριγώνȣ εὑρεθήσεται α΄. ἡ γωνία Ι $= 71° + 34'$· ἄρα ἡ ΒΙΓ $= 143° + 8'$· β΄. ἡ ΒΙ $=$ 94 ὀργυιαῖς + ποσὶ 5.

δ΄. Ἀπονεμηθέντος ȣ̃ν τῷ προπυργίῳ ΖΒ μήκȣς περὶ τὰ δύω ἑπτημόρια τῆς ΒΓ, ἢ 51 ὀργ. ϗ ἀχθείσης τῆς ΖΜ, ἡ ΖΙ, ἢ ΜΙ ἴση ἔςαι 94 ὀργυιαῖς ϗ 5 ποσὶ — 51 ὀργυιῶν, εἴτ' ȣ̃ν ἴση 43 ὀργυιαῖς ϗ 5 ποσί. Τριγώνȣ ȣ̃ν ἰσοσκελȣ̃ς τȣ̃ ΖΜΙ, γωνία μὲν ἡ Ζ ἴση ἐςὶ τῇ ἡμιηλαττωμένῃ ΖΒΗ (132)· δυνατὸν ἄρα γινωσκομένης ϗ τῆς ΖΙ, τῆς γωνίας Ι $= 143° + 8°$, τῆς γωνίας Μ $=$ Ζ εὑρεῖν τὴν ΖΜ ἐκ τῆς ἀναλογίας Μ . ΖΙ : Ι . ΖΜ $=$ 83 ὀργυιαῖς ϗ ποδὶ 1.

ε΄. Γενομένων ΖΟ ϗ Μκ $=$ ΖΜ, ϗ ἀχθέντων τῶν πλευρῶν Μο, Ζκ ἕως τῶν περάτων ο, κ, ναιμὴν ϗ τȣ̃ χόρτȣ οκ, ἔςαι Ιο $=$ 83 ὀργ. + 1 ποδ. — ΖΙ $=$ 39 ὀργ. + 2 ποσί· ἐκ δὲ δὴ τῶν ὁμοίων ἰσοσκελῶν τριγώνων ΖΜΙ, Ικο ἐςὶ ΖΙ . ΖΜ : Ιο . κο $=$ 74 ὀργυιαῖς + 3 ποσὶ $=$ τῷ χόρτῳ.

ϛ΄. Εἰς δὲ εὕρεσιν τῆς Ζκο γωνίας τȣ̃ πλευρȣ̃, τριγώνȣ ἰσοσκελȣ̃ς τȣ̃ ΖΜκ γινώσκεται ἡ γωνία Μ $=$ Γ (132) $=$ τῇ ἠλαττωμένῃ γωνίᾳ Β $= 18° + 26'$· ἄρα ἡ ὑπὸ Μκ

$$Z\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha = \frac{180^\circ - 18^\circ - 26'}{2}\ (206,\ 210) = 80^\circ +$$

$47'$· συναφθείσης δὲ τὴν Iκο γωνίας τῇ ἠλαττωμένῃ γωνίᾳ Γ = Β, ἀποληφθήσεται ἡ γωνία τῦ πλευρῦ Zκο = $99^\circ + 13'$· εὑρεθήσεται δὲ αὐτὸ τὸ πλευρὸν Zκ ἐπιλυομένȣ τῦ τριγώνȣ ZκM, ϗ μεθόδȣ γινομένης κ. ZM : M. Zκ = 26 ὀργυαῖς + 3 ποσί· ἐκ δὲ τῦ Zκο τριγώνȣ ἀποληφθήσεται ἡ γωνία τῦ νώτȣ BZκ = κ + ο (216) = $99^\circ + 13' + 18^\circ + 26' = 117^\circ + 39'$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ χωρομετρίας.

628. Κείσθωσαν δύω δένδρα (Σχ. 53) δ, ζ ἐπὶ τῆς κορυφῆς ὄρȣς τινὸς τῦ ΘΠ, ȣ τὸ ὑπὲρ τὸν HO ὁρίζοντα ὕψος ἐςὶν ἡμισείας λεύγης· τὰ δὲ δένδρα ἀλλήλων ἀπέχȣσιν ὀργυὰς 3· ἐὰν ȣν ἐπινοηθῶσι κατιόντα κατὰ τὰς φορὰς δK, ζK τῆς βαρύτητος, συμπεσȣνται ἐν τῷ τῆς γῆς κέντρῳ K· ȣκȣν τὸ τριῶν ὀργυῶν διάςημα, τὸ ταῦτα ὁρίζον, ὁλοσχερῶς ἀφανισθήσεται μετὰ τὸ διαδραμεῖν τὰ δένδρα λεύγας 1433, διὰ τὸ τὴν τῆς γῆς ἀκτῖνα ὅτι ἔγγιςα ἰσȣσθαι λεύγαις $1432\frac{1}{2}$.

629. Ἐὰν δὲ μόνον κατέλθωσι μέχρι τῦ ὁρίζοντος HO, προσπελάσȣσιν ἀλλήλοις τῇ ποσότητι, ἧπερ ἡ HO ἐςὶν ἐλάττων τῆς δζ· ἀλλὰ δK : KH :: δζ : HO, ἢ 1433 : $1432\frac{1}{2}$:: 3 ὀργυαὶ : χ· μεθόδου γενομένης τῶν τριῶν HO ἰσȣται τῇ δζ — $\frac{1}{955}$ ὀργυᾶς· ȣκȣν τὰ δύω δένδρα δ, ζ κατελθόντα μέχρι τῦ ὁρίζοντος, εἴτ' ȣν δια-

δραμόντα τὸ ἡμισείας λεύγης ὕψος τȣ͂ ὄρȣς προσεγγίζȣσιν ἀλλήλοις τῷ $\frac{1}{955}$ ὀργυᾶς, ὅπερ ȣ̓δὲ γραμμὴν ὅλην συνίςησιν.

630. Ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ τὸ ΘΠ ὄρος ἐπικαλυπτόμενον δένδρεσι, τρεῖς ὀργυὰς ἀπέχȣσιν ἀλλήλων, πρὸς ὀρθὰς ἐφεςηκόσι τῷ ὁρίζοντι κατὰ τὰς εὐθείας δΚ, ζΚ, ἐπινοηθῶσι δὲ κατιόντα μέχρι τȣ͂ ὁριζοντικȣ͂ διαςήματος ΗΟ, ὃ περιλαμβάνει τὸ ὄρος, ἀλλήλοις ἅπαντα προσεγγίζȣσι σχεδὸν μιᾷ γραμμῇ.

631. Δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν τοσαῦτα μικρȣ͂ δεῖν ὁιόντε εἶναι φυτεῦσαι δένδρα, τόσȣς οἰκοδομήσασθαι οἴκȣς κτλ., ἐπὶ τȣ͂ ὁριζοντικȣ͂ διαςήματος ὄρȣς τινὸς, ὅσα κἀπὶ τῆς ἐπικαμπȣ͂ς αὐτȣ͂ ἐπιφανείας.

632. Ἐντεῦθεν ἄρα χώρας μετρȣ͂ντες οἱ Γεωμέτραι τὴν ὁριζοντικὴν αὐτῶν ἐπιφάνειαν μόνον ἐκτιμῶσι, ϗ ταύτην ἀεὶ μετρεῖν εἰώθασι· ἐντεῦθεν ἄρα ȣ̓ χρῶνται τῇ ἐκμετρήσει γῆς ἀνάντους, ἢ κατάντους, ἀλλὰ μόνον ἐν λόγῳ τῆς ὁριζοντικῆς αὐτῆς ἐπιφανείας· ϗ τȣ͂τ᾽ ἔςιν, ὃ εἴωθεν ἀεὶ καταμετρεῖσθαι.

633. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Καταμετρῆσαι τὴν ὁριζοντικὴν χωρίȣ ἐπιφάνειαν.

Τ ῷ σ α ν ι δ ί ῳ. Σχεδιάσαντες τὸ ὁριζοντικὸν ἐπίπεδον τȣ͂ χωρίȣ (617), λογιȣ́μεθα τὸ ἐμβαδὸν κατὰ τάδε.

Ἔςω τὸ ἐπὶ χάρτȣ ἐσχεδιασμένον τȣ͂ χωρίȣ ἐπίπεδον τὸ ἀκανόνιςον πεντάγωνον (σχ. 54) ΑΟΠΡΧ· ά. διῃρήσθω εἰς τρίγωνα διὰ τῶν κατεςιγμένων ΑΡ, ΑΠ· β΄. εἰλήφθω διὰ τῆς κλίμακος ἡ κατεςιγμένη ΑΡ, ὡς τεθῆναι ἔχȣσα εἰς κοινὴν βάσιν τῶν δύω προσεχῶν τριγώνων ΑΡΧ, ΑΡΠ, ϗ ἐπ᾽ αὐτῆς ἠγέρθω ὡς ὕψος τȣ͂ ΑΧΡ τριγώνȣ κάθετος ἡ Χδ, ἡ δὲ ΠΓ κάθετος, ὡς ὕψος τȣ͂

ΑΠΡ τριγώνε· τέτων δὲ τῶν δύω καθέτων τῇ κλίμακι μετρηθεισῶν, ἔςαι τὸ μὲν ΑΡΧ τρίγωνον $= \frac{\text{ΑΡ} \times \text{δΧ}}{2}$, τὸ δὲ ΑΠΡ $= \frac{\text{ΑΡ} \times \text{ΠΤ}}{2}$ (285, 321).

Τὸ δὲ τρίτον τρίγωνον ΑΠΟ, μετρηθείσης τῇ κλίμακι τῆς ΑΟ βάσεως, ϗ τε Πη ὕψες, ἔςαι $= \frac{\text{ΑΟ} \times \text{Πη}}{2}$.

Τὸ δὲ τῶν τριῶν τέτων τρίγωνων ἄθροισμα ἐκδηλώσει τὴν ὁλικὴν τε χωρίε ἐπιφάνειαν, ἣν ἔδει μετρῆσαι.

634. ΑΛΛΩΣ. Ἵνα μετρηθῇ ἡ ἐπιφάνεια τε τριγωνικε χωρίε (σχ. 55) ΑΒΓ, μετρηθήτω πρῶτον τῇ ὀργυιᾷ ἡ ΑΓ ὡς βάσις· ἐπ' αὐτῆς δὲ προαχθείσης ἠγέρθω κάθετος ἡ ΒΖ ὡς ὕψος, ϗ μετρηθήτω τῇ ὀργυιᾷ, ϗ πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὴν ΑΓ βάσιν· τὸ δὲ τε γινομένε ἥμισυ ἔςαι ἡ ἐπιφάνεια τε τριγώνε (285, 288).

635. Ἐὰν δὲ εὐχερέςερον ᾖ, ὡς βάσιν μὲν λαβεῖν τὴν ΑΒ εὐθεῖαν, ὡς δὲ ὕψος τὴν ΓΔ κάθετον, ἔςαι ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια $= \frac{\text{ΑΒ} \times \text{ΓΔ}}{2}$.

636. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἰεὶ δ' ἀναμνηςέον ἐπὶ τῆς χωρομετρίας, ὡς εἰ τὸ πρὸς καταμέτρησιν τρίγωνον ΒΓΔ (σχ. 56) κεκλιμένον εἴη ἐπὶ τε ὁρίζοντος, ἡ αὐτε μὲν ἐπιφάνεια ἥκιςα, τε δ' ἀντιςοιχεντος ΒΓδ ὁριζοντικε τριγώνε, μετρηθήσεται· μετρητέον ἒν τῇ ὀργυιᾷ, βάσιν μὲν τὴν ΒΓ, ὕψος δὲ τὸ Γδ, καθ' ὃν προείρηται τρόπον (605)· ταὐτὸν δὲ νοητέον ἐν γένει περὶ πάσης κατάντες ἐπιφανείας.

637. Ἐὰν τὸ πρὸς καταμέτρησιν προκείμενον χω-

ρίον παραλληλόγραμμον ᾖ, μετρητέον διὰ τῆς ὀργυᾶς τὴν βάσιν, καὶ τὸ ὕψος· τὸ δ᾽ ὑπὸ τούτων γινόμενον ἐκδηλώσει τὴν αὐτοῦ ἐπιφάνειαν.

638. Εἀν δὲ τὸ καταμετρηθησόμενον χωρίον κανονικὸν ᾖ πολύγωνον, ὃ σπανιώτατα ξυμβαίνει· ά. δύω κάθετοι, ἐκ τῶν μέσων δύω πλευρῶν συναντηθεῖσαι ἀλλήλαις, ἐμφανοῦσι τὸ αὐτοῦ κέντρον· β΄. διὰ τῆς ὀργυᾶς μία πλευρὰ μετρηθεῖσα πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν εἰς εὕρεσιν τῆς τοῦ πολυγώνου περιμέτρου· γ΄. ἐκ τοῦ κέντρου μιᾷ πλευρᾷ καθέτου ἀχθείσης, καὶ τῇ ὀργυᾷ μετρηθείσης, δι᾽ αὐτῆς πολλαπλασιασθήτω τὸ τῆς περιμέτρου ἥμισυ· ὅθεν θηρευθήσεται ἡ τοῦ πολυγώνου ἐπιφάνεια (297).

639. Ἐν γένει μέντοι, ἐὰν ἡ πρὸς καταμέτρησιν ἐπιφάνεια (σχ. 54) μήτε παραλληλόγραμμον ᾖ, μήτε κανονικὸν πολύγωνον, οἵα ἡ ΑΟΠΡΧ, διηρήσθω εἰς τρίγωνα τὰ ΑΠΟ, ΑΠΡ, ΑΡΧ· καὶ διὰ τοῦ γνώμονος, ἢ τοῦ γραφομέτρου, ἠγέρθωσαν κάθετοι, καὶ τῇ ὀργυᾷ μετρηθήτωσαν αἱ Χδ, ΠΤ ἐπὶ τὴν κοινὴν τοῖς δυσὶ τριγώνοις ΑΡΧ, ΑΠΡ βάσιν ὡς ὕψη αὐτῶν τῶν τριγώνων, εἶτα ἠγέρθω ἡ Πη κάθετος ὡς ὕψος τοῦ ΑΟΠ τριγώνου (287)· τέλος δὲ πολλαπλασιασθήτω ἡ ἑκάστου τριγώνου βάσις ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ εὑρεθέντος ὕψους (285).

640. Ὅταν μὲν οἱ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος ἐκδηλοῦντες ἀριθμοὶ ἀμιγεῖς περιέχωσι ποσότητας, τουτέστιν ὀργυὰς μόνας κτ., ἄπονος ὅλος ὑπάρχει ὁ πολλαπλασιασμός· ἐὰν γὰρ τὸ μὲν ἥμισυ τῆς (σχ. 55) ΑΓ βάσεως ᾖ = 12 ὀργυαῖς· τὸ δὲ ΒΖ ὕψος = 12 ὀργυαῖς, εὐχερῶς πάνυ ἡ ἐπιφάνεια εὑρεθήσεται περιέχουσα 144 τετραγωνικὰς ὀργυάς.

641. Ἡνίκα μέντοι ὁ τὴν βάσιν, ἢ τὸ ὕψος, ἢ ϗ ἀμφότερα, ἐκδηλῶν ἀριθμὸς ὑπάρχει συμμιγὴς, περιέχων ἅμα ὀργυὰς ϗ πόδας, ἢ ὀργυὰς ϗ πόδας ϗ δακτύλȣς, ὁ τȣτων πολλαπλασιασμὸς πολύπλοκός τις καθίςαται.

642. Εὕρηνται δὲ εἰς τȣ̃το δύω μέθοδοι γενικαὶ, ἑκατέρα θατέρᾳ εἰς βάσανον συμβάλλȣσαι· ἀμφότεραι δὲ τῷ τȣ̃ μείζονος εἴδȣς τετραγώνῳ ὑποτιθέασι μέρη τȣ̃ ἐλάττονος εἴδȣς, ἐμφαινόμενα τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ τȣ̃ ἐκδηλȣ̃ντος, ποσάκις τῷ μείζονι γραμμικῷ εἴδει ἐμπεριέχεται τὸ ἔλαττον γραμμικὸν εἶδος (280)· ȣ̃τος δὲ ὁ τῶν μερῶν ἀριθμὸς ἐςιν ὁ ἐνυποτεθεὶς τῇ τετραγωνικῇ ὀργυᾷ, ἢ τῷ τετραγωνικῷ ποδὶ κτ. ἐπὶ τȣ̃ ὑποςρωθέντος πίνακος (Ἀριθμ. 155)· δέδεικται δὲ (280) ὡς τὸ πρᾶγμα ȣ̃τως ὑπάρχειν ὀφείλει (σχ. 57)· ἡ γὰρ τετραγωνικὴ ὀργυὰ ΑΗΒΠ περιέχει ἐξ ἀνάγκης 36 πόδας τετραγωνικȣ̀ς, ἐμφαινομένȣς ὑπὸ τȣ̃ ἀπὸ 6 τετραγώνȣ· ὁ δὲ τετραγωνικὸς ποῦς περιέχει ἀναγκαίως (280) δακτύλȣς τετραγωνικȣ̀ς 144, ὅς ἐςιν ὁ ἀπὸ 12 γραμμικῶν δακτύλων τετράγωνος· ἐντεῦθεν ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ὀργυὰ περιέχει ἀναγκαίως δακτύλȣς τετραγωνικȣ̀ς $144 \times 36 = 5184$, τετράγωνος ἀπὸ 72, ὃς ἐκδηλοῖ, πόσȣς ἡ ὀργυὰ περιέχει γραμμικȣ̀ς δακτύλȣς.

Οὐκȣ̃ν διχῶς ἄντις εὕροι, πόσα φέρ᾽ εἰπεῖν σίγματα τετραγωνικὰ περιέχει ὀργυὰ ἡ τετράγωνος· ά. ἀναγομένης τῆς γραμμικῆς ὀργυᾶς εἰς σίγματα 10368, ϗ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ τȣ̃δε τετραγωνιζομένȣ· β΄. εἰδότες, ὡς ἡ μὲν τετράγωνος ὀργυὰ περιέχει 36 πόδας τετραγωνικȣ̀ς, τȣ́των δὲ ἕκαςος 144 δακτύλȣς τετραγωνικȣ̀ς, τῶν δὲ ἕκαςος, 144 τετραγωνικὰς γραμμὰς, τȣ́των δὲ ἑκάςη, 144 σίγματα τετραγωνικὰ, πολλαπλασιάζομεν τρὶς

ἐκ διαδοχῆς τὸν 36 ἐπὶ 144, τὸ δὲ ἔσχατον γινόμενον 107495424 ἰσωθήσεται τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ 10368, ὡς πρότερον εὕρηται· ἐντεῦθεν δῆλον, ὡς οἱ δύω ȣ̈τοι τρόποι ἀμοιβαδὸν ἀλλήλοις εἰς βάσανον συμβάλλȣσι.

643. Ἐὰν δὲ γνῶναι βȣλώμεθα, ὅτι ἀληθῶς ἡ τετραγωνικὴ ὀργυὰ περιέχει τὰ εἰρημένα τετραγωνικὰ ςίγματα, ἐννοήσωμεν (σχ. 57) τὴν ΠΗ βάσιν ȣ̓χὶ συγκειμένην ἐκ ποδῶν 6, ἀλλ' ἐκ ςιγμάτων 10368, ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ΒΠ ὕψος· καὶ δὴ ȣ̈τως ἡ τετραγωνικὴ ὀργυὰ, ἀντὶ τȣ̃ περιέχειν ἓξ παραλληλόγραμμα ἐκ ποδῶν 6 ἕκαςον σύνθετον, περιέξει παραλληλόγραμμα 10368 ἕκαςον ἐκ ςιγμάτων τετραγωνικῶν 10368, εἶτ' ȣ̃ν περιέξει ςίγματα τετραγωνικὰ 10368 × 10368 = 107495424.

644. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπεὶ δὲ τὸ θεωρεῖν εἶδος ἀνώτερον ἐν ἐπιφανείᾳ, διῃρημένον εἰς μέρη εἴδȣς ἧττονος, ἀεὶ παρέχει πράξεις ἀριθμητικὰς ἅλις μακροσκελεῖς, ἐπενοήσαν οἱ Γεωμέτραι ἐπιτομωτέραν τινὰ μέθοδον, ἐν τῇ πρακτικῇ ἀεὶ πρὸ τῶν ἄλλων αὐτὴν ἐγκρίναντες, ἣν καὶ ἡμῖν σιγῇ παρελθεῖν ἥκιςα ἔδοξεν.

645. Ἐὰν τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς (σχ. 58) ΑΒ ΓΔ τὸ ΔΓ ὕψος μόνον διαιρεθῇ εἰς ἓξ ἰσάλληλα μέρη Δζ, ζϑ, κτ., εἰς ἓξ δηλονότι πόδας, εἷς πȣ̃ς Δζ τȣ̃ ὕψȣς παρέξει ἓν παραλληλόγραμμον ΑΔεζ, ὃ καλεῖται πȣ̃ς τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, καὶ ἔςι προδήλως τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ΑΒΓΔ τὸ ἑκτημόριον· ἐὰν ȣ̃ν βάσις ἡ ΑΔ μιᾶς ἢ πλειόνων ὀργυῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ὕψος ἑνὸς, ἢ πλειόνων ποδῶν, ἢ τ' ἀνάπαλιν, προκύψȣσιν ἐντεῦθεν πόδες τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· ΑΔ φέρε

μία ἔσα ὀργυὰ, πολλαπλασιαθεῖσα ἐπὶ Δη = 3 ποσὶ, παρέξει τρεῖς πόδας τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

646. Ἐὰν ἔν ἐπινοηθῇ εἷς πὲς ὁ Δζ διῃρημένος εἰς 12 δακτύλες, ἕκαςος δάκτυλος, οἷον ὁ Δυ, παρέξει παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔτυ, ὃ ἔςαι $\frac{1}{12}$ τῦ ποδὸς τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ΑΔεζ· τουτὶ δὲ τὸ παραλληλόγραμμον καλεῖται δάκτυλος τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

Ἐὰν δὲ ληφθῇ ἓν δωδεκατημόριον μόνον τῦ Δυ δακτύλε, καὶ πολλαπλασιαθῇ ἐπὶ τὴν ΑΔ ὀργυὰν, τετὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἔςαι $\frac{1}{12}$ τῦ δακτύλε τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ΑΔτυ· ὃ καλεῖται γραμμὴ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· τέλος δὲ $\frac{1}{12}$ τῦδε τῦ ἐχάτε ὕψες, ἢ $\frac{1}{144}$ τῦ δακτύλε Δυ παρέξει μετὰ τῆς ΑΔ βάσεως παραλληλόγραμμον, ὃ καλεῖται ςίγμα τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

647. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ά. Τὸ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ςίγμα ἐςὶ δωδεκατημόριον τῆς γραμμῆς τῆς αὐτῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· ἡ δὲ γραμμὴ τῦ δακτύλε, ὁ δὲ, τῦ ποδὸς· αὐτὸς δὲ, τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, εἰσὶ δωδεκατημόρια.

648. β'. 1 ποῦς Δχ, πολλαπλασιαθεὶς ἐφ' ἕνα πόδα Δζ, δίδωσι προδήλως $\frac{1}{6}$ τῦ δακτύλε τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ΑΔεζ, κ.τ.λ. καὶ δὴ τὸ διπλῦν τῦ δακτύλε ΑΔτυ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, εἴτ' ἔν δύω δακτύλες τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· ἐντεῦθεν ἄρα, ὅταν παριςᾶται γινόμενόν τι ἐκ ποδῶν, τὸ διπλῦν αὐτῦ παρέξει δακτύλους τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, ἃι καταγραφήσονται ἐν τῷ χώρῳ τῶν δακτύλων τύτων.

649. γ'. 1 πῦς, πολλαπλασιαθεὶς ἐφ' ἕνα δάκτυλον, παρέξει $\frac{1}{12}$ τῦ γινομένε ὑπὸ πόδος, ἐφ' ἕνα πολ-

λαπλασιαθέντος, εἴτ' ἓν $\frac{1}{12}$ τῶν δύω δακτύλων τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, ἢ 2 γραμμὰς τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· ἔχοντες τοίνυν γινόμενόν τι ὑπὸ ποδῶν ϗ δακτύλων, διπλασιάζομεν αὐτὸ ϗ τίθεμεν ἐν τῷ χώρῳ τῶν γραμμῶν τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

650. δʹ. 1 δάκτυλος, πολλαπλασιαθείς ἐφ' ἕνα δάκτυλον, ὀφείλει παρέχειν $\frac{1}{12}$ τȣ̃ ἤδη προκύψαντος πολλαπλασιασμȣ̃ τȣ̃ 1 ποδὸς ἐφ' ἕνα δάκτυλον, εἴτ' ἓν τῶν δύω γραμμῶν, ταὐτὸν εἰπεῖν δύω ςίγματα τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, ὅταν ἓν ᾗ γινόμενόν τι ὑπὸ δακτύλων, ϗ δακτύλων, λαμβάνοντες τὸ διπλȣ̃ν τȣ̃δε τȣ̃ γινομένȣ, τίθεμεν ἐν τῷ χώρῳ τῶν ςιγμάτων τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

Ε῎ςωσαν ἓν ἤδη 20 ὀργυαὶ ϗ 5 πόδες ϗ 9 δάκτυλοι βάσεως ἐφ' ᾧ πολλαπλασιαθῆναι ἐπὶ 6 ὀργυὰς ϗ 4 πόδας ϗ 7 δακτύλȣς ὕψȣς.

20	5	9		
6	4	7		
τετραγ. ὀργ.	πόδες τῆς τετ. ὀργ.	δάκ. τῆς τετ. ὀρ.	γραμ. τῆς τετ.	ςίγ. τῆς τετρ.
120	30	54	ὀρ	ὀρ
	80	40	72	
		140	70	126
141	4	6	8	6

20 Ὀργυαὶ πολλαπλασιαθεῖσαι ἐπὶ 6 ὀργυὰς διδȣ̃σιν 120 τετραγωνικὰς ὀργυὰς (283), αἳ γεγράφθωσαν.

5 Πόδ. πολλαπ. ἐπὶ 6 ὀργ. διδοῦσι 30 πόδας τετραγωνικῆς ὀργυᾶς (645), οἳ γεγράφθωσαν.

9 Δάκτυλ. πολλαπ. ἐπὶ 6 ὀργ. διδῦσι 54 δακ. τετρ. ὀργ. (640) οἳ γεγράφθωσαν.

20 Ὀργ. πολλαπ. ἐπὶ 4 πόδ. διδῦσι 80 πόδ. τετρ. ὀργ. (645), οἳ γεγράφθωσαν.

5 Πόδ. πολλαπ. ἐπὶ 4 ποδ. διδῦσιν 20, ὧν τὸ διπλῦν ἐςὶ 40 δακ. τετραγ. ὀργ. (648), οἳ γεγράφθωσαν.

9 Δάκτ. πολλαπ. ἐπὶ 4 πόδ. διδοῦσι 36, ὧν τὸ διπλῦν ἐςιν 72 γραμ. τετραγ. ὀργ. (649), αἳ γεγράφθωσαν.

20 Ὀργυαὶ πολλαπ. ἐπὶ δακ. 7 παρέχυσιν 140 δακτ. τετρ. ὀργ. (646), οἳ γεγράφθωσαν.

5 Πόδες πολλαπ. ἐπὶ 7 δακ. διδῦσι 35, ὧν τὸ διπλῦν 70 γραμαὶ τετραγ. ὀργ. (649), αἳ γεγράφθωσαν.

9 Δάκτ. πολλαπ. ἐπὶ 7 δάκτ. διδῦσιν 63, ὧν τὸ διπλῦν ἐςιν 126 σίγμ. τῆς τετρ. ὀρ. (650), ἃ γεγράφθωσαν.

Οὐδὲν ὖν λοιπὸν, ἢ συνάψαι ὡς ἔθος (Ἀριθμ. 209) ταύτας τὰς ποσότητας, ἀναμιμνησκομένους μόνον, ὅτι διαιρεῖν δεῖ διὰ 12, ἵνα, τὰ μὲν σίγματα εἰς γραμμὰς, αἱ δὲ, εἰς δακτύλυς, οἱ δὲ, εἰς πόδας, ἀναχθῶσιν, ἵν' εἰς ὀργυὰς δ' ἀναχθῶσιν οἱ πόδες, διὰ 6.

Συνάψει ὖν προκύψυσιν ἐπὶ τῦ προτεθέντος ὑποδείγματος 141 ὀργυαὶ τετραγωνικαὶ, ϗ 4 πόδες, ϗ 6 δάκτυλοι, καὶ 8 γραμμαὶ, καὶ 6 σίγματα τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Σαφὲς δὲ, ὅτι ἕκαςον εἶδος ἀναχθήσεται κἀνταῦθα εἰς τὰ μείζονα· ϗ γὰρ 80 πόδες φέρε τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς συμπληρῦσι 13 ὀργυὰς τε-

τραγωνικὰς, ϗ 2 πόδας τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· ϗ δὴ γραφήσονται, 13 μὲν ὀργυαὶ ἐν τῷ χώρῳ τῶν ὀργυῶν, 2 δὲ πόδες ἐν τῷ οἰκείῳ αὐτῶν χώρῳ.

651. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Τὸ πέρας, πρὸς ὃ ἄγουσι τῶν προεκτεθεισῶν ἑκατέρα μέθοδος (642), διαπιστοῖ ἡμᾶς σαφέστερον περὶ τῶν συντιθέντων μερῶν ἐπιφανείας, ὡς τετραγώνου θεωρουμένης, εἴτ' οὖν ὡς οὔσης τετραγώνου ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γραμμικῶν μερῶν, ἃ περιέχει ἡ πλευρὰ ταύτης τῆς ἐπιφανείας· πάρεστι γὰρ ἐντεῦθεν ὁρᾶν ὡς ὁ τετραγωνικὸς ποῦς ὀφείλει περιέχειν δακτύλους τετραγωνικοὺς 144, ὃς ἐστι τετράγωνος ἀπὸ 12 τοῦ ἐκδηλοῦντος, ὅσα περιέχει δακτυλιαῖα μέρη γραμμικὰ ὁ ποῦς.

Ἡ μέντοι τρίτη μέθοδος, ἐπεὶ τοῖς αὐτοῖς ὀνόμασι καλεῖται τὰ τοῦ ἐν ἐπιφανείᾳ μέτρου μέρη, οἷς ϗ τὰ ὁμώνυμα μέρη τοῦ γραμμικοῦ μέτρου (ἥτε γὰρ τετραγωνικὴ ϗ ἡ γραμμικὴ ὀργυὰ πόδας ἓξ περιέχουσιν ἐνταῦθα, ϗ ὁ ποῦς δὲ ὁ τετράγωνος δακτύλους 12, ὅσους περιέχει ϗ ὁ γραμμικὸς κ. τ. λ.), τῷ κοινωνικῷ βίῳ μᾶλλον καθέστηκε χρήσιμος· ἐργάτης τις, φέρ' εἰπεῖν συνθέμενος ἐπὶ λίτραις 20 ἐργάσασθαι ἑκάστην ὀργυὰν διήνυσεν οἰκοδομῶν 141 ὀργυὰς, ϗ 4 πόδας, ϗ 6 δακτύλους, ϗ 8 γραμμὰς, ϗ 6 στίγματα· τελέσαι οὖν αὐτῷ ὀφείλω α. εἰκοσάκις 141 λίτρας· β΄. $\frac{2}{3}$ τῶν 20 λιτρῶν· γ΄. $\frac{1}{2}$ λίτρας ὑπὲρ ἑνὸς ποδός· δ΄. $\frac{2}{3}$ ὑπὲρ ἑνὸς δακτύλου· ε. $\frac{1}{2}$ ὑπὲρ γραμμῆς μιᾶς.

652. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Αὕτη δὲ ἡ τρίτη μέθοδος οὐδὲν ὅλως διενήνοχε τῆς τῶν συμμέτρων μερῶν, πλὴν ὅτι αὕτη τῇ τετραγωνικῇ ὀργυᾷ ὑποτίθησι μέρη ὁμώνυμα τοῖς τῆς κατὰ γραμμὴν ὀργυᾶς, ϗ ὅτι, τῆς ὑποθέσεως ταύτης τηρηθείσης, ὁ λογισμὸς ἐπιτομώτερον ἐκτελεῖται.

653. Ἐὰν εἰδέναι βουλώμεθα πόσοις μέρη τῆς τετραγωνικῆς ὀργυιᾶς, εὑρεθέντα διὰ τῆς τρίτης μεθόδου, ἰσοδυναμοῦσι τετραγωνικοῖς μέρεσι, συλλογιζόμεθα οὕτως· εἷς ποὺς τετραγωνικῆς ὀργυιᾶς ἰσοδυναμεῖ 36 ποσὶ τετραγωνικοῖς, διαιρεθεῖσι διὰ 6, εἴτ' οὖν 6 ποσὶ τετραγωνικοῖς· εἷς δάκτυλος τετραγωνικῆς ὀργυιᾶς ἴσος ἐστὶ 584 δακτ. τετρ. διαιρεθεῖσι διὰ 72, εἴτ' οὖν ἴσος 72 δακ. τετ. ὁ γὰρ δάκτυλος ἐστιν $\frac{1}{72}$ τῆς ὀργυιᾶς· μία δὲ γραμμὴ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυιᾶς ἴση ἐστὶ τῷ $\frac{746496}{864} = 864$ γραμμαῖς τετραγωνικαῖς, εἴγε ἡ γραμμὴ ἐστιν $= \frac{1}{864}$ τῆς ὀργυιᾶς (Ἀριθμ. 149)· ἓν σίγμα τῆς τετραγωνικῆς ὀργυιᾶς ἐστιν $= \frac{107495424}{10368} = 10368$ τετραγωνικοῖς σίγμασιν· ἐπεὶ τὸ σίγμα ἐστιν $= \frac{1}{10368}$ τῆς ὀργυιᾶς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ πρακτικῆς Στερεωμετρίας.

654. Ἐὰν κυβικῆς ὀργυιᾶς τῆς ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 57) τμηθῇ ἡ ὕπερθεν βάσις ΑΟΕΖ, εἴτ' οὖν ἡ τετραγωνικὴ ὀργυιὰ, εἰς ἓξ καὶ τριάκοντα τετραγωνικοὺς πόδας, εἷς ποὺς ὁ ΑΙ τῶν ἐν τῷ ὕψει ΑΒ παράξει στερεὸν τὸ ΑΙΟτυΕΖ, συγκείμενον ἐκ ποδῶν κυβικῶν ἕξ· ἡ ἄρα κυβικὴ ὀργυιὰ περιέξει κυβικοὺς πόδας $6 \times 36 = 216$.

655. Ὡσαύτως, ἐπείπερ ὁ τετραγωνικὸς ποὺς ΑδτΡ περιέχει 144 τετραγωνικοὺς δακτύλους, ἕκαστος τῶν δακτύλων Αν, τῶν ἐν ἑνὸς κυβικοῦ ποδὸς ὕψει ΑΙ, παράξῃ στερεὸν τὸ ΑνλγδΡ 144 κυβικῶν δακτύλων· ὁ κυβικὸς ἄρα ποὺς ἔσται σύνθετος ἐκ κυβικῶν δακτύλων $144 \times 12 = 1728$· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ὁ μὲν κυβικὸς δάκτυλος περιέχει κυ-

βικὰς γραμμὰς 1728· ἡ δὲ κυβικὴ γραμμὴ, κυβικὰ σίγματα 1728.

656. Ἐν γένει δὲ κυβικόν τι στερεὸν περιέχει κυβικὰ μέρη, ἐκδηλέμενα ὑπὸ τȣ̃ κύβȣ τȣ̃ ἀριθμȣ̃, τȣ̃ δηλȣ̃ντος ὅσα κατὰ μῆκός τι μέτρον ὁμώνυμον τῷ στερεῷ περιέχει τοιάδε κατὰ μῆκος μέρη· ἕτως ὁ ἀριθμὸς τῶν κυβικῶν ποδῶν, τῶν τῇ κυβικῇ ὀργυᾷ ἐμπεριεχομένων, ἐστὶ 216 κύβος τȣ̃ 6· καὶ γὰρ ἡ κατὰ μῆκος ὀργυὰ περιέχει 6 πόδας κατὰ μῆκος· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν κυβικῶν δακτύλων τῶν ἐμπεριεχομένων τῷ κυβικῷ ποδὶ ἐστὶν 1728, κύβος τȣ̃ 12.

657. α΄. Ὥστε εὑρεῖν ἔξεσαι πόσα σίγματα φέρ' εἰπεῖν κυβικὰ περιέχει ἡ κυβικὴ ὀργυὰ διττῶς, ἢ πολλαπλασιαζομένȣ τρὶς ἐξῆς τȣ̃ 216 ἀριθμȣ̃ τῶν ἐν αὐτῇ κυβικῶν ποδῶν ἐπὶ 1728. β΄. ἢ κυβιζομένȣ τȣ̃ 10368 ἀριθμȣ̃ τῶν κατὰ μῆκος σιγμάτων, ἃ περιέχει ἡ κατα μῆκος ὀργυά. ἑκατέρως ȣ̃ν εὑρεθήσεται ἡ κυβικὴ ὀργυὰ περιέχȣσα κυβικὰ σίγματα 1114512556032.

658. Ἵν' ἀναχθῇ εἶδός τι κατώτερον εἰς τὸ ἀμέσως ἀνώτερον, αἱ κυβικαὶ φέρε γραμμαὶ εἰς κυβικȣ̀ς πόδας, διαιρετέον τὸν τὸ κατώτερον εἶδος ἐκδηλȣ̃ντα ἀριθμὸν διὰ 1728, ἐξαιρȣμένων τῶν κυβικῶν ποδῶν, ἢ διαιρεῖν δεῖ διὰ 216, ἵν' ἀναχθῶσιν εἰς κυβικὴν ὀργυάν (Ἀριθ. 169. Γ΄.).

659. Οὗτός ἐστιν ὁ ἀριθμὸς τῶν μερῶν, ἃ προλαβόντες ἐξεθέμεθα ἐν τῷ πίνακι τῶν κυβικῶν μέτρων (Ἀριθμ. 156), προσφυέστατα ἔχων τῇ, ἣν συνελάβομεν, ἰδέᾳ τȣ̃ στερεȣ̃ ὡς κύβȣ θεωρȣμένȣ· ἐξεθέμεθα δὲ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ καὶ δύω γενικὰς μεθόδȣς τȣ̃ λογίζεσθαι ταῦτα τὰ μέρη, ἢ τὴν τȣ̃ στερεȣ̃ χωρητικότητα (Ἀριθ. 217.) κτλ.

660. Ἀλλὰ γὰρ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ τῶνδε τῶν κυβικῶν με-

ρῶν ἀεὶ ἄυξοντος (Ἀριθ. 156), ἀναγκαίως ἑκατέρα μέθοδος μακρὰ καθίςαται ϗ ἐπίπονος· ταῦτ' ἄρα ἐπινενοήκασι περὶ τέτε, καθὰ δὴ ϗ περὶ τε τῶν ἐπιφανειῶν μέτρε (644), τρίτην τινὰ μέθοδον, ἣν οἵτε Γεωμέτραι ϗ οἱ Μηχανικοὶ ἀεὶ προκρίνεσι τῶν ἄλλων ἐπὶ τῆς πράξεως.

661. Ὑποτεθείσθω γὰρ ἡ τετραγωνικὴ ὀργυὰ ΛΜΚχ τετμημένη (Σχ. 58.) εἰς ἓξ πόδας τετραγωνικῆς ὀργυᾶς (645) αὕτη οὖν πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ τὴν τοῦ ὕψους ὀργυὰν ΜΘ παρέξει τὴν κυβικὴν ὀργυὰν ΛΜΘΗΠΚ· πολλαπλασιασθεῖσα δὲ ἐφ' ὕψος ἑνὸς ποδὸς τε ΜΤ, παρέξει ςερεὸν τὸ ΛΜΤοΖχΚ, ὅπερ καλεῖται πες τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς, καὶ ἔςι προδήλως $\frac{1}{6}$ τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς· πολλαπλασιασθεῖσα δὲ ἐπὶ Μα = ἑνὶ δακτύλῳ ὕψες, παρέξει ςερεὸν τὸ ΛΜαχιΚτ, ὅ ἔςιν $\frac{1}{12}$ τε ποδός τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς, ϗ παρὰ τετο καλεῖται δάκτυλος τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς· πολλαπλασιασθεῖσα δὲ ἐφ' ὕψος = ι γραμμῇ, ἀποδώσει ςερεὸν = $\frac{1}{12}$ τε δακτύλε τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς, ϗ ὅτως ἑξῆς.

662. Τὸ γινόμενον ὑπὸ ποδῶν ἐπὶ πόδας, διπλασιασθὲν, παρέξει δακτύλες τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς· τὸ δ' ὑπὸ ποδῶν ἐπὶ δακτύλες, γραμμὰς τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς· τὸ δ' ὑπὸ δακτύλων ἐπὶ δακτύλες, σίγματα, καθ' ὃν δὴ λόγον δέδεικται κἀπὶ τῶν ἐπιφανειῶν (648. κτλ.).

663. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Οἰκίσκε τινὸς, ἔχοντος μῆκος μὲν 4 ὀργυὰς ϗ 1 πόδα, πλάτος δὲ 2 ὀργυὰς ϗ 5 πόδας, ὕψος δὲ τέλος 1 ὀργυὰν, ϗ 2 πόδας, ϗ 4 δακτύλες, πόση ἐςὶν ἡ χωρητικότης;

α. Ζητηθήτω ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως, ἢ τὸ ἔδαφος τε οἰκίσκε κατὰ τὴν τρίτην τῶν περὶ ἐπιφανειῶν ἀποδοθεισῶν μέ-

ϑοδον (244, κτλ.), ἢ δὴ εὑρεθήσεται 11 ὀργυ. τετραγωνικῶν, 4 ποδ. ἢ 10 δακτύλων τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς

11 ὀργ. τετραγ.	4 πόδ.	10 δακτ. τετρ. ὀρ.		
1	2	4		
ὀργ. κυβ.	πόδ. τῆς κυβ. ὀρ.	δακτ. τῆς κυβ. ὀρ.	γραμ. τῆς κυβ. ὀργ.	σιγμ. κυβ. ὀρ.
11	4	10		
	22	16	40	
		44	32	80
16	2	4	6	8

β΄. Τὸ γινόμενον ὑπὸ 11 ὀργυῶν τετραγ. ἢ μιᾶς ὀργ. ὕψες δίδωσιν 11 ὀργ. κυβικὰς· τὸ δὲ ὑπὸ 4 ποδῶν ἢ μιᾶς ὀργυᾶς, 4 πόδας τῆς κυβ. ὀργ. τὸ δὲ ὑπὸ 10 δακτύλων ἢ 1 ὀργυᾶς, 11 ποδ. τῆς κυβ. ὀρ. ἑξῆς δὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ 19 ὀργ. ἢ 2 ποδ. δίδωσιν 22 ποδ. τῆς κυβ. ὀργ. τὸ δὲ ὑπὸ 10 δακτύλων ἢ 2 ποδῶν, 40 γραμμὰς τῆς κυβ. ὀργ· τέλος δὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ 11 ὀργ. ἢ 4 δακτ. δίδωσι 44 δακτύλες τῆς κυβικ. ὀργ. τὸ δ᾽ ὑπὸ 4 ποδ ἢ 4 δακτ., 32 γραμμὰς τῆς κυβ. ὀργ· τὸ δ᾽ ὑπὸ 10 δακτ. ἢ 4 δακτ. 80 σίγματα τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς (662).

Συνήφθωσαν δὲ ὡς ἔθος (Ἀριϑ. 209), διαιρεμένε ἑκάσε εἴδες διά 12, τῶν δε ποδῶν διὰ 6, πρὸς τὴν ἐπὶ τὰ μείζω τῶν εἰδῶν ἀναγωγὴν· ἢ δὴ εὑρεθήσεται ὁ οἰκίσκος περιέχων 16 κυβικὰς ὀργυὰς, ἢ 2 ποδ. ἢ 4 δακτ. ἢ 6 γραμ. ἢ 8 σίγμ. τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς.

664. ΣΧΟΛΙΟΝ. Πάντα τὰ ἐπὶ τῆς τρίτης μεθόδε τῆς τῶν ἐπιφανειῶν καταμετρήσεως (651, 652) παρατηρηθέντα κατὰ λέξιν ἐφαρμοσέον ἐνταῦθα· τιθεμένων μόνον ἐν κύβοις τῶν

δυνάμεων, αἵπερ ἐκεῖθι ἐν τετραγώνοις ἐτίθεντο. ὅτως εὑρεθήσεται ἡ δύναμις ποδὸς τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς ἐν ποσὶ κυβικοῖς, διαιρουμένου τοῦ 216 διὰ 6 (661), ἴση ποσὶ κυβικοῖς 36· ἡ δὲ τῶ δακτύλυ τῆς κυβικῆς ὀργυᾶς, διαιρυμένυ τῶ 373248 διὰ 72, κ) ἑξῆς ὡσαύτως (Ἀριθ. 149, 156).

Περὶ Μετρητικῆς ῥάβδου.

665. Ἐπινοηθήτω κύλινδρος ὁ ΑΒΓΔΕ (σχ. 59), οὗ ἡ χωρητικότης ἀκριβῶς ἐςὶ φέρ᾽ εἰπεῖν ςάμνος, καὶ γεγράφθω ἡ τῆς βάσεως αὐτῦ διάμετρος ΑΓ (σχ. 60) ἐπὶ πίνακος ὁμαλῦ ἴση τῇ ΒΑ, κ) ὑψέσθω ἐπὶ τῦ Β πέρατος αὐτῆς κάθετος ἡ ἀπέραντος ΒΜ· κ) εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΜ ἡ Βι = ΒΑ, κ) ἐπεζεύχθω ἡ ιΑ, ἣ δὴ ἔςαι διάμετρος βάσεως κυλίνδρυ νέου, ὃς, ἰσοϋψὴς ὢν τῷ προτέρῳ, περιέξει δύω ςάμνυς· τῶν γὰρ δύω τύτων κυλίνδρων ἰσοϋψῶν ὄντων, αἱ ςερεότητες ἔσονται ὡς αἱ βάσεις, εἴτ᾽ ὖν ὡς αἱ ἐπιφάνειαι τῶν κύκλων, οἵτινές εἰσιν αὐτῶν βάσεις (422), αἱ δὲ εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ΒΑ, ιΑ τετράγωνα (398)· ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ιΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐςι τῦ ἀπὸ ΒΑ (349)· ὁ κύλινδρος ἄρα ὁ ἔχων βάσιν, ἧς ἐςὶ διάμετρος ἡ ιΑ, διπλῦς ἔςαι τῦ κυλίνδρυ ΑΒΓΔΕ· περιέχει δὲ ἐκεῖνος ςάμνον, ὑκῦν ὗτος περιέξει δύω.

Ἐπιτεθείσθω δὲ ἡ ιΑ ἐπὶ τῆς ΒΜ, κ) δὴ προκύψει Β2 κ) ἐπεζεύχθω ἡ Α2, ἥτις ἔςαι διάμετρος βάσεως ἄγγυς τριῶν ςάμνων περιεκτικῦ· κ) γὰρ $A2^2 = AB^2 + B2^2$· ὑκῦν ἡ ἐπιφάνεια τῦ κύκλυ, ὗ διάμετρος ἡ Α2 ἴση ἐςὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ ΑΒ, βάσεως ὄντος κυλίνδρυ, ὃς περιέχει ςάμνον, συνάμα τῇ ἐπιφανείᾳ τῦ διάμετρον τὴν Β2 ἔχοντος κύκλυ, ὅς ἐςὶ

βάσις κυλίνδρȣ περιέχοντος δύω ςάμνȣς· ἄρα A2 ἐςὶ διάμετρος κυλίνδρȣ, τρεῖς περιέχοντος ςάμνȣς, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως.

666. Ἐκ τῆς τȣ͂ σχήματος κατασκευῆς, ἡ B1 = BA ἐμφαίνει ἓν μέτρον· B2 = A1, δύω· B3 = A2, τρία, ϗ ὕτως ἑξῆς ὑποτιθεμένȣ τῷ κυλίνδρῳ, ȣ͂ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων αὔξȣσι τῷ εἰρημένῳ λόγῳ, ὕψȣς ἀεὶ τȣ͂ αὐτȣ͂, ὃ εἶχε τὸ ἐν ἀρχῇ ληφθὲν ἄγγος, τὸ ἑνὸς μέτρȣ περιεκτικόν.

667. Οὐκȣ͂ν κατασκευασθήτω ῥάβδος σιδηρᾶ, ἢ ξυλίνη, ἡ βΓ, ἥτις ὐδὲν ἀλλ' ἢ παραλληλεπίπεδον κυρίως ἐςὶ λίαν ἐπίμηκες, ἔχον μῆκος ἀνάλογον τοῖς ἄγγεσιν, ἢ κάδοις, τοῖς πρὸς καταμέτρησιν ἀεὶ προβαλλομένοις· ἐγκεχαράχθω δὲ ἡ ῥάβδος βΓ τιθεμένων ἐπ' αὐτῆς ἀκριβῶς τῶν κατατομῶν B1, B2 κτλ. αἳ ἐσημειώθησαν ἐπὶ τȣ͂ πίνακος· ὅθεν προκύψȣσιν ἐπὶ τῆς ῥάβδȣ β1, β2, β3 κτλ. ὅσῳ δὲ πλεονάκις ἡ ὑποτείνȣσα λαμβάνεται ἐπὶ τῆς BM πλευρᾶς, ϗ ὅσῳ πληθύνονται αἱ κατοτομαὶ B1 κτ. ἐπὶ τῆς BΓ ῥάβδȣ, τοσȣ́τῳ ἐπιτηδειοτέρα γίνεται ἡ ῥάβδος πρὸς καταμέτρησιν μεγάλων ἄγγεων· καλέσομεν δὲ τȣτὶ τὸ ἐπίμηκες εὐθύγραμμον βΟΓΙ πλευρὰν τῶν βάσεων.

668. Εἰλήφθω εἶτα τὸ AE ὕψος τȣ͂ κυλίνδρȣ, ὅσπερ, ἐκ τῆς διαμέτρȣ BA, ἓν μέτρον περιέχει, ϗ διπλασιασθήτω, τριπλασιασθήτω κτ. κατὰ τὰ μῆκος ἑτέρας ῥάβδȣ, ἥτις κληθήσεται πλευρὰ τῶν μηκῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Αὐτόθεν κατάδηλον, ὡς αἱ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τῶν βάσεων κατατομαὶ, ὅσῳ ἄνισιν ἐς τὸ M, τοσȣ́τῳ ἐλάττȣς γίνονται, ϗ ἑπομένως, ὅσῳ ἀναβαίνȣσιν ἐπὶ τὸ Γ· ϗ γὰρ ἡ ὑπεροχὴ τȣ͂ A2, ἥτις ἐςὶ ῥίζα τρι-

πλϐ τετραγώνϐ, ὑπὲρ τὴν ΙΑ ϐκ ἔϛιν ϐ̈τω μεγάλη, ὡς ἡ τῆς ΙΑ αὐτῆς ῥίζης ϐ̈σης τετραγώνϐ διπλϐ̃ ὑπὲρ τὴν ΒΑ = ΒΙ ῥίζαν τετραγώνϐ περιέχοντος ἓν μέτρον· ἀλλὰ γὰρ αἱ κατατομαὶ, τὰ μήκη ἐκδηλϐ̃σαι, ἀεὶ ὀφείλϐσιν εἶναι αἱ αὐταὶ· αἱ γὰρ ϛερεότητες δύω κυλίνδρων, τὴν αὐτὴν ἐχόντων βάσιν, εἰσὶν ἁπλῶς ὡς τὰ μήκη (460).

Ἡ τοίνυν ῥάϐδος, ἡ ἑκατέρωθεν, ὡς εἴρηται, κατατετμημένη ἐϛὶν, ὃ καλεῖται μετρητιμὴ ῥάϐδος, ᾗ χρησόμεθα ϐ̈τω.

669. Καίτοι ἡ διάμετρος κάδου παντὸς οἰνοδόχου ἀεὶ μείζων ἐϛὶ κατὰ τὸ μέσον, ἢ κατὰ τὰς δύω αὐτοῦ βάσεις τὰς κυκλικὰς, θεωρείσθω μέντοι ὡς κύλινδρος ἀκριϐὴς, ἔχων ἀμέλει τὴν αὐτὴν διάμετρον διὰ παντὸς τοῦ μήκϐς, τοιάνδε μέντοι, οἵαν εἶναι μέσην μεταξὺ τῆς κατὰ τὸ μέσον, ϗ τῆς κατὰ τὰς βάσεις· εἰλήφθω ϐ̃ν διὰ τῆς ῥάϐδϐ ταύτης ἐκ τϐ̃ τῆς πλευρᾶς τῶν βάσεων μέρϐς ἡ διάμετρος τϐ̃ ἄγγϐς, ϗ δὴ εὑρεθήσονται, ἐξ ὑποθέσεως τῆς ῥάϐδϐ ἐμϐαπτιζομένης τῷ ἄγγει διὰ τῆς κατὰ τὸ μέσον γινομένης ὀπῆς, δι᾿ ἧς ὁ οἶνος, ἢ ἕτερόν τι ὑγρὸν ἐγχέεται, καὶ καθέτϐ ἐφιϛαμένης τῇ ἐσωτερικῇ αὐτϐ̃ κοιλότητι, 30 κατατομαὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τῶν βάσεων· εἰλήφθω εἶτα ὁ ἀριθμὸς τῶν αὐτῶν κατατομῶν, αἳ ἐμπεριέχονται τῇ ῥάβδῳ, εἰς τὰς βάσεις τεθείσῃ τϐ̃ κάδου· ϗ δὴ εὑρεθήσονται κατατομαὶ 28· τὸ δὲ ἡμιάθροισμα τϐ́των τῶν δύω ἀριθμῶν, εἴτ᾿ ϐ̃ν 29, ἔϛαι ἡ μέση διάμετρος, ἥτις ἐμφαίνει 29 μέτρα, ἀποδοθέντος τῷ κάδῳ τϐ̃ μήκϐς τϐ̃ κυλινδρικϐ̃ ἄγγϐς, ᾧ ἐχρησάμεθα πρὸς κατασκευὴν τῆς ῥάϐδϐ, τϐ̃ ἐκδηλϐμένϐ διὰ μιᾶς τῶν ἴσων κατατομῶν τῶν σεσημειωμένων ἐπὶ τῆς τῶν μηκῶν πλευρᾶς· ϐ̓κϐ̃ν μετρη-

θήτω ὁ ἀριθμὸς τῶν δε τῶν ἴσων κατατομῶν, αἳ ἂν ἐμβαπτισθείησαν τῷ κάδῳ κατὰ μῆκος· καὶ δὴ εὑρεθήσονται ἐξ ὑποθέσεως 20· ἐντεῦθεν ἄρα συμπερανθήσεται, ὡς ὁ κάδος οὗτος ἐξισοῦται 20 κάδοις, ἢ κυλίνδροις, ἔχουσιν ἅπασι, διάμετρον μὲν ἴσην τῇ ἑαυτοῦ μέσῃ, μῆκος δὲ μίαν μόνην κατατομὴν, ἣ ἐμφαίνει τὸ ὕψος ἄγγους ἑνὸς μέτρου· ἐπεὶ δὲ ἕκαστος τούτων τῶν κάδων, ἢ κυλίνδρων, περιέχει 29 μέτρα, ὁ προτεθεὶς περιέξει 29 × 20 = 580.

ΥΨΗΛΟΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Η̉

Περὶ τῶν Καμπύλων γραμμῶν.

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τῶν τοῦ Κώνου τομῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ γενέσεως αὐτῶν.

Ὑψηλοτέρα καλεῖται Γεωμετρία ἡ περὶ τὰς τῶν καμπύλων γραμμῶν ἀσχολουμένη ἰδιότητας, ἐπιστήμη δήπου, ὅσον εὐρεῖα, τοσοῦτον ἔχουσα καὶ τὸ χρήσιμον· τῶν δὲ καμπύλων αἱ μᾶλλον θρυλλούμεναι, καὶ τῇ Μαθηματικωτέρᾳ Φυσικῇ λίαν συμβάλλουσαι, εἰσὶν αἱ καλούμεναι Κωνικαὶ τομαί, περὶ ἃς ἴσμεν οὐ βραχύτι μοχθήσαντας τοὺς πάλαι Γεωμέτρας· τούτων οὖν καὶ ἡμεῖς τὰς κυριωτέρας ἐκθέμενοι ἰδιότητας, καὶ τῆς τῶν ἄλλων θεωρίας ἀκροθιγῶς ὕστερον ἐφαψόμεθα.

1. Κῶνος ἅπας δι' ἐπιπέδου πενταχῶς ἂν ἔχοι διχῇ τμηθῆναι.

Ἢ γὰρ τὸ τέμνον ἐπίπεδον (σχ. 61) ΑΒΓ διὰ τῆς τοῦ Κώνου κορυφῆς Α διήκει, καὶ τῇ βάσει ΒΜ′ ΓΜ′ τοῦ

κώνȣ, εἴτε πρὸς ὀρθὰς, εἴτε πλαγίως, ἐφέςηκε· ϗ δὴ ἡ ἐντεῦθεν προϊȣ̃σα τομὴ ΑΒΓ ἀεὶ ἔςαι τρίγωνον· ὅπερ καθ' ἑαυτὸ δῆλον· ἢ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, μὴ διὰ τῆς κορυφῆς διῆκον, κατά τινα τῶν ἐφεξῆς τεσσάρων τρόπων τὸν κῶνον τέμνει.

2. α'. Ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον δΜΤΜ παράλληλον ᾖ τῇ τȣ̃ κώνȣ βάσει ΒΜ' ΓΜ', ἡ γινομένη τομὴ ΜΜΤ ἔςαι κύκλος, ὡς ἐν τῶν τȣ̃ κώνȣ ςοιχείων ὑπάρχȣσα (Γεωμ. 444).

3. β'. Ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον δΜΤΜ κεκλιμένον ᾖ τῇ τȣ̃ κώνȣ βάσει ΗΜη, ποιῇ δὲ μετὰ τῆς βάσεως γωνίαν ἐλάττονα (σχ. 62), ἢ τὴν ὑπὸ μιᾶς τȣ̃ κώνȣ πλευρᾶς ΑΓ ϗ τῆς βάσεως περιεχομένην, ἡ καμπύλη ΗΜΜη ἔσεται καμπύλη πρὸς ἑαυτὴν ἀνακάμπτȣσα (*), ἥτις Ἔλλειψις ὀνομάζεται· ἐπεὶ ȣ̃ν ὁ κύκλος δΜΜΤ (σχ. 16) ȣ̓κ ἂν γένοιτο ἔλλειψις ΗΜηΜ (σχ. 62), εἰμὴ τὸ πρὶν τῇ βάσει παράλληλον ἐπίπεδον δΜΤΜ βραχύτι αὐτῇ προσκλιθείη, θεωρηθῆναι δύναται ὁ κύκλος ὡς ἔλλειψις, ἧς τὸ ἐπίπεδον ἀπειροςόντι τῇ βάσει προσκέκλιται.

4. γ'. Ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ΤΜδ διήκῃ ἐκ διαδοχῆς διὰ πασῶν τῶν πρὸς τὴν βάσιν ΒΜ' ΓΜ' τȣ̃ κώνȣ γενέσθαι δυναμένων ἐγκλίσεων (ὅθεν προκύψȣσι πᾶσαι αἱ ποικίλαι ἐλλείψεις, αἱ ἐκ τȣ̃ κώνȣ προελθεῖν δυνάμεναι) ἔστ' ἂν τέλος ȣ̈τω προσκλιθείη, ὡς ϗ μία τῶν τȣ̃ κώνȣ πλευρῶν ΑΒ· ὥσπερ κλίσεως ἔχει τὸ ἐπίπεδον ΗπΜ'Μ'·

(*) *Καλῶ δὲ ἀνακάμπτȣσαν καμπύλην, ἧς οἱ κλῶνες ΗΜη, ΗΜη, ἀπὸ τȣ̃ Η ἀρχόμενοι, συνίασιν ἀλλήλοις καθ' ȣ̃ν σημεῖον τὸ η.*

σαφὲς τηνικαῦτα τὸ τέμνον ἐπίπεδον παράλληλον τῇ τȣ͂ κώνȣ πλευρᾷ ΑΒ γίνεσθαι, ȣ̓δ᾽ αὐτῇ συμπεσεῖν ποτε δύνασθαι· ϗ δὴ ὅσῳ μᾶλλον ὁ κῶνος ἂν προαχθείη, τοσȣ́τῳ οἱ κλῶνες ΗΜ′, ΗΜ′ τῆς εὐτεῦθεν ἀπογεννωμένης τομῆς ἀποχωρȣ͂σιν ἀλλήλων· ἔσεται ἄρα αὕτη τομὴ ἄπειρος, ἣ καλεῖται Παραβολή.

5. Ἐπεὶ τοίνυν ȣ̓κ ἂν γένοιτο παραβολὴ, εἰμὴ τὸ πρὶν ἐπὶ μιᾶς τῶν τȣ͂ κώνȣ πλευρῶν κεκλιμένον ἐπίπεδον (σχ. 62), ϗ ἐντεῦθεν ἔλλειψιν προάγον, παραλλήλως ἀχθείη μιᾷ τινι πλευρᾷ· τῇ ΑΒ (σχ. 61), θεωρηθῆναι δύναται ϗ ἡ παραβολὴ ὡς ἔλλειψις, συνισαμένη ἐπὶ ἐπιπέδȣ ἀπειροσόντι προσκεκλιμένȣ τῇ τȣ͂ κώνȣ πλευρᾷ ΑΒ, ὥσπερ ἔλλειψις ἑπομένως, ἥτις ȣ̓δύναται συμπεσεῖν τῇ τȣ͂ κώνȣ πλευρᾷ ΑΒ, εἰμὴ μετὰ διάςημα ἄπειρον, κἀντεῦθεν ἐξ ἀνάγκης καθισαμένη ἄπειρος.

6. δ΄. Τέλος δὲ, ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ΗπΜ′Μ′, τὸ πρὶν τῇ πλευρᾷ ΑΒ παράλληλον (σχ. 16), ἐγγίζῃ μᾶλλον τȣ͂ εἶναι κάθετον τῇ βάσει ΒΓ, ἢ ἡ πλευρὰ, εἴτ᾽ ȣ͂ν ποιῇ τὴν ὑπὸ ΗΠΒ γωνίαν μείζονα τῆς ὑπὸ ΗΒΠ, οἷον τὸ ΗπΜ (σχ. 64), ἢ ϗ κάθετον αὐτῇ ἐφεςήκῃ· ἡ ἐντεῦθεν παραγομένη τομὴ ϗ αὐτὴ ἄπειρος γίνεται· καλεῖται δὲ ὅμως Ὑπερβολή· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ κῶνος ἕτερος ὁ ΑδΔ, κατὰ τὴν κορυφὴν Α συνημμένος τῷ πρώτῳ, ϗ αὐτῷ ἴσος, τὸ τέμνον ἐπίπεδον προαχθὲν ἔςγ᾽ ἐπ᾽ αὐτὸν, ϗ τεμὸν κἀκεῖνον, ἀπογεννήσει νέαν ὑπερβολὴν ἴσην τῇ προτέρᾳ τὴν ηΧχ, ἥτις ἀκȣ́ει Ἀντικειμένη ὑπερβολή.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Δῆλον ἄρα ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων κωνικῶν τομῶν μόνα τὸ τρίγωνον ϗ ἡ ὑπερβολὴ δύναται ἔχειν ἀντικειμένην τομὴν, εἴτ᾽ ȣ͂ν, ὧν τὸ ἐπίπεδον προ-

αγόμενον ἐς τὸν κατὰ κορυφὴν ἀντικείμενον κῶνον, παράγει τομὴν τῇ προτέρᾳ ἴσην· κἂν γὰρ ἀεὶ ἐπὶ πάσης τομῆς δύω νοηθῶσιν οἱ κῶνοι ἴσοι ϗ κατὰ κορυφὴν συνημμένοι, ὅτε μὴν τὸ τὸν κύκλον, ὁδὲ τὸ τὴν παραβολὴν, ὁδὲ τὸ τὴν ἔλλειψιν παράγον ἐπίπεδον δύναται προαχθῆναι ἐς τὸν ἕτερον κῶνον, ὁδ' ἅψασθαι αὐτοῦ, μήτιγε τεμεῖν, ὡς παντὶ τῷ ϗ μικρὸν ἐπιςήσαντι προφανές.

7. Ἡ εὐθεῖα (σχ. 61, 62, 64) Ηπ, περὶ ἣν δύναται ἡ τομὴ περιαχθῆναι, Ἄξων ἀκούει· τὸ δὲ σημεῖον Η, ἢ τὰ Η, η, δι' ὧν ὁ ἄξων συνάπτεται τῇ τομῇ, Κορυφὴ, ἢ Κορυφαὶ τῆς τομῆς· αἱ δὲ τῷ ἄξονι κάθετοι ΠΜ, πΜ, Τεταγμέναι ἐπὶ τὸ ἄξονα· ὅλη δέ τις εὐθεῖα ἡ ΠΜΜ, Διπλῆ Τεταγμένη· Ἀποτετμημένη δὲ μέρος τοῦ ἄξονος τὸ ΗΠ τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Η καί τινος τεταγμένης τῆς ΠΜ ἀπολαμβανόμενον· οὐκοῦν ἡ ΗΠ ἐςιν ἀποτετμημένη ὑπὸ τεταγμένης τῆς ΠΜ, ἡ δὲ Ηπ ὑπὸ τῆς πΜ· Συναποτετμημέννη δὲ, θάτερον μέρος τοῦ ἄξονος τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ϗ τῆς ἑτέρας κορυφῆς η ἀπολαμβανόμενον (σχ. 62)· ὅτως οὖν ηΠ συναποτετμημένη ἐςὶ τῇ ΗΠ ὑπὸ τεταγμένης τῆς ΠΜ.

8. Οὐκοῦν παραβολὴ ἡ ΗΜ'Μ' (σχ. 16), μίαν μόνην ἔχουσα κορυφὴν Η, ἀμοιρεῖ συναποτετμημένων· ὑπερβολῆς δὲ (σχ. 64), τῶν δύω κορυφῶν Η, η, πρός γε τὴν αὐτὴν τεταγμένην ΠΜ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κειμένων, ἥτε ἀποτετμημένη ΠΗ ϗ ἡ συναποτετμημένη Πη ἐπὶ τῶν αὐτῶν λογιωθήσονται.

9. Εἰώθασι δὲ, διὰ μὲν υ τὰς τεταγμένας ΠΜ, διὰ δὲ χ τὰς ἀποτετμημένας ΗΠ, ἐμφαίνειν· δύω δὲ διάφοροι τεταγμέναι ἐκδηλοῦνται διὰ υ, Υ, διὰ δὲ χ, Χ δύω διάφοροι ἀποτετμημέναι.

10. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Συνέκθεσιν* ποσότητος ἀποκαλῶ τὴν αὐτῆς ταύτης μετ' ἄλλων ποσοτήτων συνεπιπλοκήν· ὅτως 2υ, $\frac{\upsilon}{2}$, υ^2, $\upsilon^2 + \upsilon$ τέτταρες διάφοροι συνεκθέσεις παρίςανται τῆς τεταγμένης υ.

11. Λόγος *ἄτρεπτος* ἐν τῇ αὐτῇ τομῇ ἐςιν, ὃν ἔχει ὡρισμένη τις καὶ μόνιμος συνέκθεσις τῶν τεταγμένων πρὸς ὡρισμένην καὶ μόνιμον συνέκθεσιν τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτετμημένων· εὑρίσκεται δὲ ὅτος διὰ τῆς ἀνιχνεύσεως τῆς φύσεως καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῆς τομῆς.

Ἡ ἐξίσωσις δὲ ἡ τῦτον τὸν λόγον ἐκτιθεῖσα καλεῖ. *ἐξίσωσις τῆς τομῆς*· ὅτως (σχ. 63) ἐν τριγώνῳ τῷ ΗΔΜ ληφθείσης ὡς ἄξονος τῆς Ππ, διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΗΠΜ, ΗπΜ, ἔςαι ΠΜ : πΜ : : ΗΠ : Ηπ (Α)· ἀλλ' αἱ κάθετοι ΠΜ, πΜ εἰσὶ τεταγμέναι ἐπὶ τὸν ἄξονα (7), ϗ ΗΠ ἐςὶν ἀποτετμημένη ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΠΜ, ἡ δὲ Ηπ ὑπὸ τῆς πΜ· ἄρα ἐν τριγώνῳ αἱ τεταγμέναι εἰσὶν ὡς αἱ ὑπ' αὐτῶν ἀποτετμημέναι· ἔσω ὖν $\text{ΠΜ} = \upsilon$, ϗ $\pi\text{Μ} = \Upsilon$, ϗ $\text{ΗΠ} = \chi$, ϗ $\text{Η}\pi = \text{Χ}$· ὖκῦν ἡ ἀναλογία Α γενήσεται $\upsilon : \Upsilon : : \chi : \text{Χ}$· ἄρα (Συμϐ. Λογ. 250) $\upsilon = \frac{\Upsilon \times \chi}{\text{Χ}}$ (Β)· τοιγαρῦν ἡ Β ἐξίσωσις, ἥτις παρίςησι τὸν λόγον τινὸς συνεκθέσεως τῆς τεταγμένης υ (ἥτις συνέκθεσις ἐνταῦθα ἡ αὐτὴ υ ἐςὶ, εἴτ' ὖν $\upsilon \times 1 = \upsilon$), ὃν ἔχει πρὸς τὴν ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένην (ἔςι δὲ ὁ λόγος ὗτος ἡ ἰσότης τῆς τεταγμένης, καθ' ἣν αὕτη ἰσῦται τῷ πηλίκῳ τῷ προκύπτοντι ἐκ τῆς διαιρέσεως τῦ γινομένυ ὑπὸ τῆς ἀποτετμημένης ϗ ἑτέρας τεταγμένης, διὰ τῆς Χ ἀποτετμημένης ὑπὸ τῆς συςοίχυ αὐτῇ τεταγμένης), ἐςὶν ἡ τῦ τριγώνυ ἐξίσωσις.

12. Ὡσαύτως ἐπὶ τᾶ κύκλȣ, διὰ τὴν τῷ ἄξονι κάθετον ΠΜ, ϗ ἐπ' αὐτὸν τεταγμένην, ἔςι (Συμϐ. Λογ. 248, καὶ Γεωμ. 343) ΠM^2 (υ^2) $=$ ΠΗ $\times$ Πη (Ρ)· ἔςω ἆν Ηη $= 2\alpha$, ϗ ΗΠ $= \chi$· ἑπομένως ἔςαι Πη $= 2\alpha - \chi$· ἡ δὲ Ρ ἐξίσωσις ἔςαι $\upsilon^2 = 2\alpha\chi - \chi^2$, ἥτις ἔςαι τᾶ κύκλȣ.

13. Καὶ αἱ μὲν τᾶτε τριγώνȣ ϗ τᾶ κύκλȣ κυριώτεραι ἰδιότητες ἐκ τῆς ςοιχειώδȣς Γεωμετρίας ἐγνώσθησαν· τὰς δὲ τῆς παραϐολῆς, ϗ ἐλλείψεως, ϗ ὑπερϐολῆς, ἑξῆς ἂν εἴη ἐκθέσθαι.

14. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἐν παραϐολῇ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ' αὐτῶν ἀπὸ τῆς διαμέτρȣ πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, εἴτ' ἆν $\Pi M^2 : \pi M'^2 ::$ ΗΠ : Ηπ (σχ. 61).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω κύκλος ὁ δΤΜΜ παράλληλος τῇ βάσει ΒΓΜ'Μ', ϗ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἐςάσθω τῷ κύκλῳ τῷδε κάθετον· αἱ ἆν διάμετροι Τδ, ΒΓ τῶν δύω κύκλων, αἵ εἰσιν ἅμα ϗ ςοιχεῖα τᾶ τριγώνȣ, ἔσονται παράλληλοι· ἄρα αἱ ἐν τοῖς δυσὶ κύκλοις τεταγμέναι ΠΜ, πΜ', κάθετοι ἆσαι ταῖς διαμέτροις Τδ, ΒΓ, ἔσονται ὡσαύτως ϗ τοῖς τριγωνικοῖς ςοιχείοις Τδ, ΒΓ, ϗ ἑπομένως ἁπάσῃ γραμμῇ τᾶ τριγωνικᾶ ἐπιπέδȣ, εἴτ' ἆν τῇ ΗΠπ, ἐφ' ἣν ταῦτα πίπτȣσι (Γεωμετρ. 400)· ἐπεὶ γὰρ ΗΠπ ϗ Τδ ἀμφότεραί εἰσιν, ὡς εἴδομεν, ἐπὶ τᾶ ΑΒΓ τριγωνικᾶ ἐπιπέδȣ, ἡ ΠΜ, κάθετος ἆσα τῇ Τδ κατὰ τὸ σημεῖον Π, καθ' ὃ τέμνȣσιν ἀλλήλας αὗται αἱ δύω γραμμαὶ, ἔςαι κάθετος ϗ τῇ ΗΠπ· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ πΜ' κάθετος ἐφέςηκε τῇ ΗΠπ κατὰ τὸ π· ἐχέτω ἆν ἡ ἀπὸ τᾶ Η ἀρχομένη παραϐολὴ ΗΜ'Μ' τὸ ἑαυτῆς ἐπίπεδον κάθετον τῷ ἐπιπέδῳ τᾶ ΑΒΓ τριγώνȣ. ά. τοίνυν ὁ

ἄξων ΗΠπ, παράλληλος ὢν κατὰ τὴν τῆς παραβολῆς ἰδιότητα τῇ πλευρᾷ ΑΒ, διελεύσεται ἀναγκαίως διὰ τῶν σημείων Π, π τῦ ΗΠπ τριγωνικῦ ςοιχείυ· β΄. αἱ τεταγμέναι ΠΜ ἐν τοῖς κύκλοις, ἃς καθέτυς εἴδομεν κατὰ τὰ Π, π τῷ τριγωνικῷ ςοιχείῳ ΗΠπ, ἔσονται κάθετοι ϗ τῷ τῆς παραβολῆς ἄξονι ΗΠπ· ὐκῦν αἱ ἐν τοῖς κύκλοις τεταγμέναι ΠΜ, πΜ΄, ἔσονται ὐδὲν ἧττον τεταγμέναι κἀν τῇ παραβολῇ (7).

Παρὰ ταῦτα, διὰ τὴν φύσιν τῦ κύκλυ, ἐςὶ $ΠΜ^2 = δΠ \times ΠΤ$ (Συμβ. Λογ. 248, ϗ Γεωμετρ. 343) ϗ $πΜ'^2 = πΓ \times Βπ$· ἄρα $ΠΜ^2 : πΜ'^2 :: δΠ \times ΠΤ : πΓ \times Βπ$· ἀλλά, διὰ τὸν τῇ ΑΒ πλευρᾷ παράλληλον ἄξονα, ΗΠπ, ἐςὶ $ΠΤ = Βπ$· ὐκῦν $ΠΜ^2 : πΜ^2 :: δΠ \times Βπ : πΓ \times Βπ$, ϗ δὴ $ΜΠ^2 : πΜ'^2 :: δΠ : πΓ$ (Συμβ. Λογ. 247).

Τελευταῖον δὲ ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΗΠδ, ΗπΓ, ἐςὶ $δΠ : πΓ :: ΗΠ : Ηπ$· ἄρα $ΜΠ^2 : πΜ'^2 :: δΠ : πΓ$· ἐςὶ δὲ, ὡς εἴδομεν, ϗ $δΠ : πΓ :: ΗΠ : Ηπ$· ἄρα $ΠΜ^2 : πΜ'^2 :: ΗΠ : Ηπ$. Ο. Ε. Δ.

15. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἐν ἐλλείψει (σχ. 62) τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν συςοιχύσῶν ἀποτετμημένων ϗ συναποτετμημένων, εἴτ' ὖν $ΠΜ^2 : πΜ'^2 :: ΗΠ \times ηΠ : Ηπ \times ηπ$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἁπάντων ἀνελλειπῶς προκατασκευασθέντων, ὥσπερ ἐπὶ τῦ προσεχῶς ἐκτεθέντος θεωρήματος, ἔςαι ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΗΠδ, ΗπΤ, $Πδ : πΤ :: ΗΠ : Ηπ$, ἐν δὲ τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ηΠΟ, ηπχ, $ΠΟ : πχ :: ηΠ : ηπ$· πολλαπλασιασθεισῶν δὲ τύτων τῶν δύω ἀναλογιῶν ἐπ' ἀλλήλας (Συμβ. Λογ. 262), ἔςαι $Πδ \times ΠΟ : πΤ \times πχ :: ΗΠ \times ηΠ : Ηπ \times ηπ$· διὰ δὲ

τὴν φύσιν τȣ̃ κύκλȣ ἐςὶ $ΠΜ^2 = Πδ \times ΠΟ$, ϗ $πΜ'^2 = πΤ \times πχ$ (Γεωμ. 343)· ἄρα $ΠΜ^2 : πΜ^2 :: ΗΠ \times ηΠ : Ηπ \times ηπ$. Ο. Ε. Δ.

16. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἐν ὑπερβολῇ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνά εἰσιν, ὡς τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν συςοιχȣσῶν ἀποτετμημένων ϗ συναποτετμημένων, εἴτ' ȣ̃ν $ΠΜ^2 : πΜ^2 :: ΗΠ \times ηΠ : Ηπ \times πη$.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἔςω κύκλος ὁ ΤΜΜΟ παράλληλος τῇ βάσει ΒΜΜΓ, ϗ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κάθετον τῇ βάσει, ἡ δὲ ὑπερβολὴ ΗΜΜ κάθετος τῷ τȣ̃ τριγώνȣ ἐπιπέδῳ· ὡς ϗ ἀνωτέρω, δείκνυται ὅτι ἡ ΠΜ κοινή ἐςι τεταγμένη ἔντε τῷ κύκλῳ ϗ ἐν τῇ ὑπερβολῇ.

β΄. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΗΠΤ, ΗπΒ, ἔςιν $ΗΠ : ΠΤ :: ΗΠ : πΒ$· ἐν δὲ τοῖς ηΠΟ, ηπΓ ὁμοίοις ϗ αὐτοῖς τριγώνοις ἔςιν $ηΠ : ΠΟ :: ηπ : ΠΓ$· πολλαπλασιασμῷ δὲ, $ΗΠ \times ηΠ : ΠΤ \times ΠΟ :: Ηπ \times ηπ : πΒ \times πΓ$· ἀλλὰ, διὰ τὴν κυκλικὴν ἰδιότητα, ἔςι $ΠΜ^2 = ΠΤ \times ΠΟ$, ϗ $πΜ^2 = πΒ \times πΓ$· ἄρα $ΗΠ \times ηΠ : ΠΜ^2 :: πΒ \times πΓ : πΜ^2$· ἄρα (Συμβ. Λογ. 242) $ΠΜ^2 : πΜ^2 :: ΗΠ \times ηΠ : πΒ \times πΓ$. Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ φύσεως τῶν Κωνικῶν τομῶν ἐν ἐπιπέδῳ καταγεγραμμένων.

17. Πᾶσα καμπύλη (σχ. 66, 67, 68) ΗΜΜ, ΗΜΜη, ἐν ᾗ δύω ἀποςήματα, καθ' ἃ ἀπέχȣσι δύω τινὰ σημεῖα αὐτῆς Η, μ, ἀπό τινος ἐντὸς κειμένȣ σημείȣ, ὃ καλεῖται Ἑςία, ἀνάλογά εἰσι δυσὶν ἀποςήμασι, καθ'

ἃ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἀπέχουσιν ἀπό τινος εὐθείας ΓΓ, ἐκτὸς τῆς καμπύλης κειμένης, ἣν καλοῦμεν Διευθετοῦσαν, τουτέστιν, ἐν ᾗ ὑπάρχει ΗΕ : μΕ :: ΗΑ : μΟ, Κωνικὴ τομὴ ἀποκέκληται.

Καὶ ἐὰν μὲν ᾖ ΗΕ = ΗΑ (σχ. 66, 67, 68), ἡ καμπύλη ἐστὶ παραβολή· ἐὰν δὲ ΗΕ < ΗΑ, ἔλλειψις· ἐὰν δὲ τέλος ΗΕ > ΗΑ, ὑπερβολή.

18. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Κωνικὴν τομὴν καταγράψαι.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἤχθω (σχ. 66, 67, 68) ἡ διευθετοῦσα ΓΓ, καὶ ἐστάθω αὐτῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΗΠ· καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῆς δύω σημεῖα τὰ Η, Ε, τιθεῖσιν ΗΕ = ΗΑ εἰς καταγραφὴν παραβολῆς, καὶ ΗΕ < ΗΑ εἰς καταγραφὴν ἐλλείψεως, καὶ ΗΕ > ΗΑ εἰς καταγραφὴν ὑπερβολῆς· καὶ ἐστάθω κατὰ τὸ Η κάθετος ἡ ΗΒ = ΗΕ· διὰ δὲ τοῦ πέρατος αὐτῆς Α ἤχθω ἡ ΑΒΤ πέρατος ἄνευ· καὶ ἐστάθωσαν κάθετοι τῇ ΑΗΠ προσεχέσαται ἀλλήλαις αἱ ΠΔ, ΠΔ περιοριζόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΗΠ καὶ τῆς ἀπεράντου ΑΒΤ· καὶ διὰ τοῦ διαβήτου ἐκ τοῦ Ε ἑκάστη ΠΔ μετενεχθήτω ἐπ' αὐτὴν ταύτην τὴν ΠΔ· προκύψουσιν οὖν ἐντεῦθεν σημεῖα ἑξῆς κείμενα τὰ Μ, Μ, ἅτινα μετὰ τῶν ἀπ' εὐθείας αὐτοῖς ἀντιθέτων, καὶ ἴσον ἑτέρωθεν τοῦ ἄξονος ἀπεχόντων, συγκροτήσουσι τὴν ζητουμένην καμπύλην.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν ἑκάστῳ γὰρ τῶν οὕτω καταγραφέντων τριῶν σχημάτων, τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΗΒ, ΑΠδ παρέξουσιν ΑΗ : ΗΒ :: ΑΠ : Πδ· ἀλλὰ ΗΒ = ΗΕ, καὶ Πδ = Εμ (ἐκ κατασκευῆς), καὶ ΑΠ = μΟ (Γεωμ. 127)· ἄρα ἀντικαταστάσει ἔσται ΑΗ : ΗΕ :: μΟ : Εμ. Ο.Ε.Δ. (17).

19. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὀρθία πλευρὰ ἀκούει εὐθεῖα (σχ. 69) ἡ ΕΜ, ἡ ἀπὸ τῆς ἑστίας πρὸς ἓν τῶν τῆς καμπύλης σημείων ἀγομένη· Ἁπτομένη δὲ, ἡ καθ' ἓν μό-

νον σημεῖον τῆς καμπύλης ἐπιψαύȣσα, οἷα ἡ ΤΜ. Τὸ δὲ ΤΠ μέρος τȣ̃ ἄξονος, τὸ ἀπολαμβανόμενον ἀπὸ τῆς ἁπτομένης ΜΤ ϗ τῆς τεταγμένης ΠΜ, ἥτις τάττεται ἐκ τȣ̃ σημείȣ τῆς ἀφῆς Μ ἐπὶ τὸν ἄξονα, καλεῖται Ὑ φ α π τ ο μ έ ν η· ἐὰν δὲ τῇ ἁπτομένῃ κατὰ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον πρὸς ὀρθὰς ςαθῇ ἡ ΜΥ, αὕτη καλεῖται ἰδίᾳ Κ ά θ ε τ ο ς, ἢ Κ α ν ο ν ι κ ή· τὸ δὲ μέρος ΠΥ τȣ̃ ἄξονος, τὸ ἀπὸ τῆς καθέτȣ, ϗ τῆς ἀπὸ τῆς ἀφῆς σημείȣ τεταγμένης ἀπολαμβανόμενον, καλεῖται Ὑ π ο κ ά θ ε τ ο ς, ἢ Ὑ π ο κ α ν ο ν ι κ ή.

20. Π α ρ ά μ ε τ ρ ο ς ἀκȣ́ει ἡ διπλῆ τεταγμένη, ἡ διὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἑςίας διήκȣσα.

21. Τὸ ΗΕ ἀπόςημα τῆς κορυφῆς Η ἀπὸ τῆς ἑςίας Ε ἀεὶ κληθήσεται α· ἡ δὲ τεταγμένη, υ· δύω δὲ τεταγμέναι, ἡ μὲν υ, ἡ δὲ Υ· ἡ δὲ ἀποτετμένη, Χ· δύω δὲ ἀποτετμημέναι διάφοροι, ἡ μὲν χ, ἡ δὲ Χ· τέλος δὲ ἡ παράμετρος κληθήσεται π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Παραβολῆς.

22. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Παραβολῆς (σχ. 66) οἱ δύω κλῶνες ΗΜ, ΗΜ′, ἐπ᾽ ἄπειρον προϊόντες, ἀποχωρȣ̃σι τȣ̃ ἄξονος ΗΠ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΗΒ = ΑΗ, ϗ πάντα τὰ ἑξῆς κείμενα τρίγωνα ΑΠΔ ὅμοια τῷ ΑΗΒ, ἑκάςη ΑΠ ἴση ἐςὶ τῇ ἑαυτῆς ΠΔ· ἄρα πΔ = Απ = ΕΜ″ + Επ (*)· ἐκȣ̃ν

(*) Ὅτι ΕΜ = Μτ (17) = ΑΕ (Γεωμετ. 236).

μεταφερομένη ἡ πΔ ἀποςήσει τὸ M''' ἀπὸ τῆς ΑΠ μᾶλλον, ἢ ἡ EM'' ἀπέςησε τὸ οἰκεῖον αὐτῆς M''· ἄρα $EM''' > EM''$· ταὐτὸν δὲ νοητέον περὶ πάντων τῶν ἀλληλοδιαδόχων σημείων τῶν εὑρισκομένων ὑφ' ἑκάςης $ΠΔ = ΑΠ$, μεταφερομένης ἐκ τῦ Ε ἐφ' ἑαυτήν. Ο. Ε. Δ.

23. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Παραβολῆς μία μόνη ἐςὶν ἡ κορυφὴ Η.

ΔΕΙΞΙΣ. Οἱ γὰρ κλῶνες ΗΜ, ΗΜ΄ διὰ μόνυ τῦ Η σημείυ συνάπτονται τῷ ἄξονι (22)· ἐπεὶ δὲ $ΑΗ = ΗΒ$, πᾶσαι αἱ ὕπερθεν τῦ Η λαμβανόμεναι ΠΔ, ἐλάττυς ἔσαι ἑκάςη τῆς ἑαυτῆς ΕΠ, ὐ δυνήσονται ὑπὲρ τὸ Η ἐπὶ τῆς ΕΑ προαχθείσης σημεῖα χαράξαι ἐπανήκοντα τῇ καμπύλῃ· ἄρα ἡ καμπύλη ἐν ἑνὶ μόνῳ σημείῳ τῷ Η συμπίπτει τῷ ἄξονι (7). Ο. Ε. Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Παραβολῆς μία ἔςαι ϗ ἡ ἑςία Ε, ϗ ὁ ἄξων αὐτῆς ὑποτεθῆναι δύναται $= \infty$.

24. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἐν παραβολῇ τὸ ἀφ' οἱασῦν τεταγμένης τετράγωνον $ΠΜ^2 = υ^2$, ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς συςοίχυ ἀποτετμημένης $ΗΠ = χ$ ϗ τῦ τετραπλῦ $ΗΕ = α$ ἀποςήματος τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς ἑςίας· εἶτ' ὖν $υ^2 = 4αχ$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΕΠμ, ἔςι $Πμ^2 = υ^2 = Εμ^2 - ΕΠ^2$, Α (Γεωμετ. 351)· ἀλλὰ $Εμ = Πδ$ (18) $= ΑΠ$ (22) $= ΑΗ + ΗΠ = α + χ$ (εἴγε $ΑΗ = ΗΕ = α$) ϗ $ΕΠ = α - χ$, ἐὰν ᾖ ὕπερθεν τῦ Ε ἡ ΠΜ, ἢ $χ - α$, ἐὰν ᾖ ἔνερθεν· τετραγωνισθεισῶν δὲ τῶν δυνάμεων τύτων τῆς τε Εμ, ϗ ΕΠ, ἡ ἐξίσωσις Α γίνεται $υ^2 = α^2 + 2αχ + χ^2 - α^2 + 2αχ - χ^2$· ἀναγωγῇ δὲ $υ^2 = 4αχ$· Ο. Ε. Δ.

25. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐκ τῆς $υ^2 = 4αχ$ ἐξισώσεως

πρόεισιν $υ^2 : Υ^2 :: 4αχ : 4αΧ :: χ : Χ$ (Συμϐ. Λογ. 247), τȣτέςι „τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα πρὸς ἄλ„ληλά εἰσιν, ὡς αἱ ὑπ᾽ αὐτῶν ἀποτετμημέναι“: ἡ καμπύλη ἄρα αὕτη ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ τȣ͂ κώνȣ προκυπτȣ́σῃ ἐν ἐπιπέδῳ μιᾷ αὐτȣ͂ πλευρᾷ παραλλήλῳ τεμνομένȣ (4, 14).

26. ΠΟΡΙΣΜΑ. Β΄. Παραϐολῆς (σχ. 66) ἡ παράμετρος $π$ ἐςὶν $= 4ΗΕ = 4α$· ϗ γὰρ $υ^2 = 4αχ$ (24)· ἀλλ᾽ ἐπὶ τῆς παραμέτρȣ ἔςι $χ = α$, ἐκ κατασκευῆς· ἄρα $υ^2 = 4α \times α = 4α^2$· ἄρα $υ = 2α$· ϗ $2υ = π = 4α$· ἐντεῦθεν ἄρα

27. α΄. Παραμέτρȣ (σχ. 70) τῆς μΕμ δοθείσης, δι᾽ αὐτῆς καταγραφήσεται παραϐολὴ ἡ ΗΜΜ, ἐφιςαμένης τῷ μέσῳ Ε ταύτης ἀπεράντȣ εὐθείας τῆς ΕΑ, ϗ τῆς Εμ ἐπ᾽ αὐτὴν μεταφερομένης, ϗ τὸ Α ὁριζȣ́σης· ἐκȣ͂ν τὸ μέσον σημεῖον Η τῆς ΑΕ ἔςαι τῆς παραϐολῆς ἡ κορυφή· ϗ γὰρ ȣ̔́τως ἔςαι $Εμ = ΗΕ = 2α$· τὰ δὲ λοιπὰ ἐκπερανθήσεται, ὡς προδιώριςαι (18).

28. β΄. Ἡ $υ^2 = 4αχ$ εἰσαγωγῇ τῆς παραμέτρȣ γενήσεται $υ^2 = πχ$· τȣτέςιν „ἐν παραϐολῇ τὸ ἀπὸ τῆς „τεταγμένης τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς „ὑπ᾽ αὐτῆς ἀποτετμημένης, ϗ τῆς παραμέτρȣ.“

29. γ΄. Ἐκ τῆς $υ^2 = πχ$ προέρχεται $χ : υ :: υ : π$ (Συμβ. Λογ. 241), τȣτέςιν, ὃ ταὐτὸν τῷ ἤδη εἰρημένῳ „ἡ παράμετρος ἔςι τρίτη ἀνάλογος ἑκάςης ἀποτετμη„μένης, ϗ τῆς αὐτῇ συςοίχȣ τεταγμένης.“

30. Ὥςε δοθείσης μιᾶς ἀποτετμημένης τῆς Ηπ, ϗ τῆς τεταγμένης πΜ, εὑρεθήσεται ἡ παράμετρος τῆς παραβολῆς, ζητηθείσης τρίτης ἀναλόγου τῶν Ηπ, πΜ (348).

31. Δοθεισῶν ἄρα μιᾶς ἀποτεμημένης τῆς Ηπ, ϗ

τῆς ἀντιςοίχου τεταγμένης πΜ, ἀναγράψαι δυνατὸν ἔςαι τὴν αὐταῖς ἐπανήκεσαν παραβολήν· εἴγε, τῆς πρὸς τὰς δοθείσας τρίτης ἀναλόγε εὑρεθείσης, τὸ τέταρτον αὐτῆς πρὸς τὰ ἄνω ἐκ τε μέσε Ε μετενεχθὲν, ἐμφανεῖ τὴν κορυφὴν Η, ἐκ δέ Η πρὸς τὰ ὑπὲρ αὐτὸ πάλιν μετενεχθὲν, σημανεῖ τὴν διευθετεσαν· ἐκεν τῆς Ε ἐςίας, τῆς Η κορυφῆς, ϗ τῆς διευθετεσης αὐτῆς, δοθέντων, ἀναγραφήσεται ἡ παραβολή.

32. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Διὰ τε δοθέντος ἐπὶ τῆς παραβολῆς σημεῖε Μ ἁπτομένην αὐτῆς ἀγαγεῖν (σχ. 69).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθω ἡ ΕΜ, ϗ ἐςάθω ΜΟ τῇ διευθετεσῃ κάθετος· ἐκεν ἡ ΜΤ, ἡ δίχα τέμνεσα τὴν ΕΟ, ἔσεται, ἣν ζητεμεν, ἡ ἁπτομένη.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΜΟ = ΜΕ (17, 18) τὸ ΜΕΟ ἐςὶ τρίγωνον ἰσοσκελές· ἐκεν (Γεωμετ. 157, 217) ΜΤ κάθετος ἐφέςηκε τῇ ΕΟ· πάντα τοίνυν τὰ τῆς ΜΤ σημεῖα ἴσον ἀπέχεσι τῶν Ε, Ο (Γεωμ. 249)· ἐκ δὲ τετε ἅπαν σημεῖον πλὴν τε Μ, τὸ Β φέρ᾽ εἰπεῖν, ἐκ ἔςαι κοινὸν τῇ καμπύλῃ, ϗ δὴ ἡ ΜΤ ἁπτομένη ἔςαι τῆς καμπύλης (19)· ἀχθεῖσα γὰρ ἡ κάθετος Βχ, ἐλάττων ἔςαι τῆς ΒΟ (Γεωμ. 113), ϗ δὴ Βχ < ΒΕ (ἐπεὶ ΒΕ = ΒΟ)· ἄρα (17) Β ἐκ ἔςαι ἐπὶ τῆς καμπύλης· ὡσαύτως δὲ συλλογιέμεθα ϗ περὶ παντὸς ἄλλε σημεῖε, ὃ κεῖται ὕπερθεν ἢ ἔνερθεν τε Μ· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

33. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπειδὴ ἡ ὑπὸ ΑΜβ = ΟΜΤ = ΤΜΕ (Γεωμ. 99, 217)· σώματι προσπίπτον ἐπὶ τε Μ κατὰ φορὰν τὴν ΑΜ παράλληλον τῷ ἄξονι, ϗ τὴν γωνίαν τῆς ἀνακλάσεως ΤΜΕ ἴσην ποιεν τῇ τῆς προσπτώσεως γωνίᾳ ΑΜβ, ἀνακλασθήσεται ἐπὶ τὴν ἐςίαν· ἐντεῦθεν ἄρα,

34. α΄. Ἀπευθυνθέντος τȣ̃ ΗΠ ἄξονος τȣ̃ παραβολοειδȣ̃ς κοίλȣ σώματος πρὸς τὸ τȣ̃ ἡλίȣ κέντρον, ἅπασαι αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες παράλληλοι ἔσαι ἀλλήλαις, (*) ἑπομένως δὲ ϰ᾽ τῷ ἄξονι ΗΠ, μετὰ τὸ προσβαλεῖν τοῖς κοίλοις τοῦ παραβολοειδȣ̃ς, ἀνακλαθήσονται πρὸς τὴν Ε ἑςίαν, (**) ϰ᾽ κατακαύσȣσι τὰς ἐκεῖ τιθεμένας καυσίμȣς ὕλας.

35. Ἐξέςαι δὲ ϰ᾽ τὴν ἑςίαν ῥᾶςα θεῖναι, ἐφ᾽ ȣ̃ ἂν βȣλώμεθα σώματος, λαμβάνοντας παραβολοειδὲς, ἐφ᾽ ȣ̃ ἡ ἑςία Ε βραχύτι ἀπέχει τȣ̃ Η, καὶ ἱκανῶς ἀποτέμνοντας αὐτὸ πρὸς τὸ Η, ἵν᾽ ἡ ἑςία ἐκτὸς κέηται τȣ̃ παραβολοειδȣ̃ς.

36. β΄. Ἐὰν ἐν τῇ ἑςίᾳ παραβολοειδȣ̃ς κοίλȣ τȣ̃ ΗΔδ (σχ. 71) λαμπὰς τεθῇ, αἱ φωτιςικαὶ ἀκτῖνες ΕΑ, Εη ἀνακλασθήσονται παραλλήλως τῷ ἄξονι, ϰ᾽ ἐν διαςήματι 300, ἢ 400 ποδῶν ȣ̃τω περιλάμψȣσιν, ὡς ἐκεῖ σκότȣς ὄντος εὐπετῶς βιβλίον ἀναγινώσκειν.

(*) Ὁ ἥλιος (αὐτὸ δὲ τȣ̃το νοητέον ϰ᾽ περὶ παντὸς ἄλλȣ φωτοβόλȣ σώματος) πανταχόθεν ἑαυτȣ̃ βάλλει τὸ φῶς, ϰ᾽ ἐν εἴδει σφαίρας, ὡς ὀψόμεθα ἐν τῇ Ὀπτικῇ· ἐὰν ȣ̃ν δύω ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ἐπὶ φωτιζομένȣ σώματος ποδιαίȣ τὸ πλάτος θεωρηθῶσιν, αἱ δύω αὐτῶν φοραὶ, αἱ ἐν τῷ τȣ̃ ἡλίȣ κέντρῳ συνερχόμεναι, μετὰ τȣ̃ πλάτȣς τȣ̃ φωτιζομένȣ σώματος τρίγωνον συγκροτȣ̃σιν, ȣ̃ μία μὲν τῶν πλευρῶν ἐςὶ ποδιαία, ἑκατέρα δὲ τῶν λοιπῶν δύω ἴση περίπȣ λεύγαις 31000000· ἡ τοίνυν πρὸς τῷ κέντρῳ τȣ̃ ἡλίȣ γωνία ἐπεὶ ὑποτείνει ὑπὸ πλευρὰν ποδιαίαν, ἀπειροςὴ ἐκληπτέα· ἢ, ὃ δὴ ταυτὸν, αἱ δύω ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ἄνευ ἀξιολόγȣ διαπτώματος ἐκληπτέαι εἰσὶν ὡς παράλληλοι.

(**) Καὶ γὰρ τὸ φῶς τὴν γωνίαν τῆς ἀνακλάσεως ΤΜΕ ἀεὶ ἴσην ποιεῖ τῇ τῆς ἐπιπτώσεως γωνίᾳ ΑΜβ.

37. γ΄. Ἐὰν παραβολοειδὲς (σχ. 72) ἀποτμηθῇ πρὸς τῇ κορυφῇ μέχρι τῆς ἑςίας, κἀκεῖ τεθῇ τὸ ςόμιον σάλπιγγος· πᾶσαι αἱ φωνητικαὶ γραμμαὶ ΕΜ, ΕΜ (*), ἀποχωρῦσαι τῦ Ε, ϗ προσβάλλυσαι τοῖς κοίλοις τῆς σάλπιγγος, ἀνακλασθήσονται παραλλήλως τῷ ἄξονι (**), ϗ προαγόμεναι κατὰ τὰς φορὰς ΜΑ ἄλις πόῤῥω πρὸς τὸ Τ ἀκυσθῆναι ποιήσυσι τὰς κατὰ τὸ Ε ἀπαγελλομένας φωνάς.

38. δ΄, Ἐὰν πρὸς τῇ τῦ κοίλυ παραβολοειδῦς ΕΜ Μ (σχ. 73) ἑςίᾳ, ὕτως ἀποτμηθέντος τὴν κορυφὴν, προσαρμοσθῇ ἀνεμοπορθμεῖον τὸ ΕΠδΜΜ, γενήσεται ἀκυςικόντι ὄργανον κάλλιςον, ὃ οἱ δύσκωφοι τῷ ὠτίῳ ἐντιθέμενοι ἐκ τῦ Π πέρατος, τὸ δὲ λοιπὸν ὄργανον πρὸς τὸν λαλῦντα ςρέφοντες, τῶν φωνητικῶν ἀκτίνων πρὸς τὸ ὄργανον προσβαλλυσῶν, ϗ πρὸς τὴν ἑςίαν μετὰ τὴν ἀνάκλασιν ἁπασῶν συνιυσῶν, ἀκούσουσιν ἐντελῶς ἅπαντα τὰ λεγόμενα.

39. ε. Ἐὰν οἱ δύω παραςάται καμίνυ τινὸς παραβολικὸν ἔχωσι σχῆμα, γεννώμενον ἀμέλει ὑπὸ τῶν κλωνῶν ΒΔ, Βδ παραλλήλως ἑαυτοῖς κινηθέντων, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἱςαμένων τῷ ἐδάφει· ὁ δὲ τόπος, ἐν ᾧ ἐςι τὸ πῦρ, κατὰ τὴν ἑςίαν τῆς γεννητρίας παραβολῆς κέηται, ἡ κάμινος ἐν βραχυτάτῳ χρόνῳ τὸν θάλαμον θερμανεῖ· κατὰ γὰρ ταύτην τὴν κατασκευὴν, ἐὰν ἐπὶ τῦ Ε κάθετος ἐπινοηθῇ, ἐπ᾽ αὐτῆς κείσονται ἐφεξῆς πᾶσαι αἱ ἑςίαι τῶν παραβολῶν ἁπασῶν, ἃς καταγράφει ἡ

(*) Τῦτ᾽ ἔςιν αἱ εὐθεῖαι, καθ᾽ ἃς φέρεται ὁ ἦχος.

(**) Ὁ γὰρ ἦχος, καθὰ δὴ ϗ τὸ φῶς, ἀνακλώμενος ποιεῖ τὴν γωνίαν τῆς ἀνακλάσεως ἴσην τῇ τῆς ἐπιπτώσεως.

κινηθεῖσα γεννήτρια παραβολή· ἐκεῖ ἡ κατὰ ταύτην τὴν εὐθεῖαν αἰρομένη φλὸξ, κατὰ πλευρὰν τῇ καμίνῳ προσβάλλουσα ἀνακλᾷ τὰς καυστικὰς αὐτῆς ἀκτῖνας ΕΑ, Εη· παραλλήλως τῇ ΕΤ πρὸς τὸ ἔδαφος τοῦ θαλάμου, ὃς ἐν ἀκαριαίῳ χρόνῳ θερμανθήσεται· ἀλλὰ γὰρ, κατὰ τὴν κοινὴν τῶν καμίνων κατασκευὴν, αἱ ἀκτῖνες ἀνακάμπτονται πρὸς τὸ μέσον τῆς καμίνου, καὶ διὰ τοῦ ὀχετοῦ ἐκρέουσι μάτην.

40. ϛʹ. Ἔστωσαν δύω παραβολοειδῆ ἀντίθετα τὰ ΗΜΜ, ηΜΜ, κοινὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν Ηη (σχ. 74)· ἐὰν οὖν ἀκτινοβόλον τι τεθῇ ἐπὶ τοῦ Ε, πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ἀθροισθήσονται κατὰ τὸ δ, κἀκεῖ ἀναγνῶναι γράμματα καθαρῶς ἐξέσται, κἂν μέγα τύχῃ ὂν τὸ ἀπὸ Ε ἀπόστημα· ὡσαύτως, ἐὰν πῦρ τεθῇ ἐν τῷ Ε, αἱ φλογιστικαὶ ἀκτῖνες ἐν τῷ δ ἀθροισθήσονται, καὶ ἐν μετρίῳ ἀπὸ τοῦ Ε ἀποστήματι σῶμάτι καυθήσεται.

41. Ἐὰν τὰ διαληφθέντα παραβολοειδῆ φυσικαὶ ὦσι στοαὶ, ἢ καὶ χειροποίητοι· δύω τινὲς, ὁ μὲν ἐπὶ τοῦ Ε, ὁ δ᾽ ἐπὶ τοῦ δ, ἱστάμενοι προσδιαλεχθῆναι ἀλλήλοις δυνηθήσονται, κἂν μέγα ᾖ τὸ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστημα Εδ· ἑτέρου τινὸς, ἐπὶ τοῦ μέσου Τ ἱσταμένου, μηδ᾽ ἀκούειν αὐτῶν τοὺς λόγους ὅλως ἔχοντος· καὶ γὰρ αἱ ἠχητικαὶ ἀκτῖνες ΕΜ ἀπὸ τοῦ Ε ἀποχωροῦσαι κατὰ τὸ δ συνάπτονται, καὶ τοὐναντίον, καὶ δὴ τὴν τῶν λόγων ἀκρόασιν ἐπαισθητοτάτην κατὰ τὸ δ ἐργάζονται· αὐταὶ δὲ αἱ ἀκτῖνες ἐκ τοῦ Ε προϊοῦσαι κατὰ τὸ Τ λίαν εἰσὶν ἀσθενεῖς, καὶ μικρὰν, ἢ οὐδεμίαν, προσβολὴν τῷ ἀκουστικῷ ἐμποιοῦσιν ἐκεῖ ὀργάνῳ.

42. ΘΕΩΡΗΜΑ Δʹ. Ἡ ὑποκάθετος ΠΥ ἀεί ἐστιν ἄτρεπτος, ἐξισουμένη τῷ $\frac{\pi}{2}$, εἴτ᾽ οὖν τῇ ἡμιπαραμέτρῳ (σχ. 69).

ΔΕΙΞΙΣ. Αἱ ΕΟ, ΥΜ εὐθεῖαι (32), αἱ τρίτῃ τινὶ τῇ ΤΜ κάθετοι, ϗ ὑπὸ δύω παραλλήλων ΤΥ, ΟΑ περατέμεναι, εἰσὶ παράλληλοι (Γεωμ. 137) ϗ ἴσαι (Γεωμ. 127)· ἐκεῖν τὰ τρίγωνα ΠΥΜ, ΔΕΟ, διὰ τὰς δύω ἴσας πλευρὰς ΕΟ, ΥΜ, ϗ διὰ τὰς ἴσας γωνίας (ϗ γὰρ Μ = Ο (Γεωμ. 132) ϗ Π = Δ, ϗ ἑπομένως Υ = Ε) εἰσὶν ἴσα (Γεωμ. 221)· ἄρα ΠΥ = ΔΕ = $2\alpha = \frac{\pi}{2}$. Ο. Ε. Δ.

43. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔστιν οὖν ἡ κανονικὴ ΜΥ = $\sqrt{\pi\chi + \frac{\pi^2}{4}}$· ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΠΥΜ ἔστιν $ΥΜ^2 = ΠΜ^2 + ΠΥ^2$ (Γεωμ. 349) $= \upsilon^2 + \frac{\pi^2}{4} = \pi\chi + \frac{\pi^2}{4}$ (28)· ἄρα ΜΥ = $\sqrt{\pi\chi + \frac{\pi^2}{4}}$.

44. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τὸ τοῦ σημείου Υ, καθ' ὃ ἡ κανονικὴ συμβάλλει τῷ ἄξονι, ἀπὸ τῆς κορυφῆς Η ἀπόστημα ΗΥ ἐστιν = $\chi + \frac{\pi}{2}$ = ΗΠ + ΠΥ.

45. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Ἡ ὑφαπτομένη ΤΠ ἐστι διπλῆ τῆς ἀποτετμημένης ΗΠ, εἴτ' οὖν = 2χ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΥΤΜ διὰ τὴν ΠΜ κάθετον ἐστι (Γεωμ. 341) ΠΥ = (*) 2α: ΠΜ = υ :: ΠΜ = υ: ΤΠ· ἄρα ΤΠ = $\frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha} = \frac{4\alpha\chi}{2\alpha}$ (28) = 2χ· Ο. Ε. Δ.

46. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπεὶ ΤΠ = 2χ, ϗ ΗΠ = χ· ἄρα ΗΤ = χ = ΗΠ.

47. Ἵν' οὖν ἁπτομένη κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἀχθῇ, ἀποχρήσει τεταγμένως ἀγαγόντας τὴν ΠΜ, λαβεῖν ΗΤ = ΗΠ, ϗ τὴν ΤΜ ἐπιζεῦξαι.

(*) ΠΥ = $\frac{\pi}{2}$ (42)· $\pi = 4\alpha$ (26)· ἄρα ΠΥ = 2α.

48. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τύπος τῆς ἁπτομένης ΤΜ ἐστὶν ὁ $\sqrt{\pi\chi + 4\chi^2}$· ἐν γὰρ τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΤΠΜ ἐστὶ $ΤΜ^2 = ΠΜ^2 (= \pi\chi)$ (28) $+ ΤΠ^2 (= 4\chi^2)$· ἄρα $ΤΜ = \sqrt{\pi\chi + 4\chi^2}$.

49. ΘΕΩΡΗΜΑ ς΄. Τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς καθέτου ΕΓ, τῆς ἀγομένης ἀπὸ τῆς ἑστίας ἐπὶ τὴν ἁπτομένην ΤΜ, ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΕΜ, τῆς ἐπὶ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον ἀγομένης, καὶ τοῦ τεταρτημορίου τῆς παραμέτρου· εἴτ' οὖν $ΕΓ^2 = ΕΜ \times \frac{\pi}{4}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΕΓΤ, ΕΓΗ ἐστὶ ΤΕ : ΕΓ :: ΕΓ : ΕΗ· οὐκοῦν $ΕΓ^2 = ΤΕ \times ΗΕ$· ἔστι δὲ παρὰ ταῦτα γωνία ἡ ὑπὸ ΤΜΕ = ΟΜΤ (32) = ΜΤΕ (Γεωμ. 133)· τοιγαροῦν τὸ τρίγωνον ΤΕΜ ἐστὶν ἰσοσκελές· ἄρα ΤΕ = ΕΜ· ἔστι δὲ $ΗΕ = \frac{\pi}{4}$ (27)· ἀντικαταστάσει ἄρα τῶνδε τῶν δυνάμεων ἀντὶ ΤΕ, καὶ ΕΗ, ἡ ἐξίσωσις $ΕΓ^2 = ΤΕ \times ΕΗ$ γενήσεται $ΕΓ^2 = ΕΜ \times \frac{\pi}{4}$ Ο. Ε. Δ.

50. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ ἀπὸ τῆς ἑστίας ἐπὶ δύω ἁπτομένας ἱστάμεναι κάθετοι ἀνάλογόν εἰσι ταῖς τετραγωνικαῖς ῥίζαις τῶν ὀρθίων πλευρῶν, τῶν ἀγομένων ἐπὶ τὰ τῆς ἀφῆς σημεῖα· καὶ γὰρ ἔστιν $ΕΓ^2 = ΕΜ \times \frac{\pi}{4}$· οὐκοῦν $ΕΓ^2 : \varepsilon\gamma^2 :: ΕΜ \times \frac{\pi}{4} : \varepsilon\mu \times \frac{\pi}{4}$· ἄρα $ΕΓ : \varepsilon\gamma :: \sqrt{ΕΜ} : \sqrt{\varepsilon\mu}$ (Συμβ. Λογ. 263).

51. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ΄. Τύπος τῆς ὀρθίας πλευρᾶς ΕΜ ἐςὶν ὁ $\chi + \frac{\pi}{4}$.

ΔΕΙΞΙΣ. ΕΜ $=$ ΜΟ (17) $=$ ΗΠ $+$ ΔΗ (Γεωμ. 127) $= \chi + \frac{\pi}{4}$ Ο. Ε. Δ.

52. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐξίσωσιν εὑρεῖν τῆς κυρτῆς παραβολῆς, ἀναφερομένην πρὸς τὴν ΗΡ ἁπτομένην, τὴν τῷ ἄξονι κατὰ τὸ σημεῖον Α κάθετον (σχ. 75).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ΗΡ $= \chi$, ϗ ΡΜ $= \upsilon$· ἐςὶν ȣ̑ν διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς παραβολῆς (28) ΠΜ^2 $=$ ΗΡ^2 $= \pi \times$ ΗΠ, εἴτ' ȣ̑ν $\chi^2 = \pi\upsilon$· ἀπόχρη ἄρα ἐν τῇ εὑρεθείσῃ (28) ἐξισώσει τὸ υ εἰς χ μεταβαλεῖν, ϗ τ' ἀνάπαλιν, εἰς εὕρεσιν τῆς τὴν κυρτὴν παραβολὴν, ὡς τὸ πρόβλημμα ἀπαιτεῖ, ἐμφαινȣ́σης ἐξισώσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ διαμέτρων τῆς παραβολῆς.

53. Κέντρον κωνικῆς τομῆς ἀκȣ́ει (σχ. 67) σημεῖον Κ τȣ̃ ἄξονος, ἐν ἴσῳ ἀφιςάμενον ἑκατέρας τῶν κορυφῶν· τοιγαρȣ̃ν κέντρȣ πραγματικȣ̃ ἡ παραβολὴ ἠμοίρησεν (23).

54. Ἀλλὰ γὰρ τῆς παραβολῆς ἐλλείψεως ȣ̓́σης, ἧς ἡ ἑτέρα κορυφὴ Η τῆς ἑτέρας ἀπείρως ἀφίςαται (5), δυνατὸν ὑποθέσθαι τὸ κέντρον ἀπὸ τῆς Η κορυφῆς ἀπέχον ἀποςήματι $= \frac{\infty}{2}$.

55. Διάμετρος ἐςὶν εὐθεῖα διὰ τȣ̃ τῆς τομῆς

διαμέτρȣ ΜΒ παράμετρος Π ἴσεται τῇ τȣ̃ ἄξονος παραμέτρω π σὺν τῇ τετραπλῇ ἀποτετμημένη ΗΠ, ἥτις ἀντισοιχεῖ τῇ Μ ἀρχῇ τῆς διαμέτρȣ· ἔςι δηλονότι $\Pi = \pi + 4\chi$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ παράμετρος $\Pi = 4\ \mathrm{M\Gamma}$ (61) ἀλλὰ $4\,\mathrm{M\Gamma} = 4\,\mathrm{A\Pi} = 4\,\mathrm{AH} + 4\,\mathrm{TH} = \pi + 4\chi$ (17, 27, 7)· Ο. Ε. Δ.

63. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ πάσης διαμέτρȣ ΜΒ παράμετρος Π τρίτη ἀνάλογός ἐςι πρὸς τὴν ἀποτετμημένην ΗΠ, ϗ τὴν ἁπτομένην ΤΜ· ἔςι γὰρ $\Pi = \pi + 4\chi$, ϗ $\mathrm{H\Pi} = \chi$, ϗ $\mathrm{TM} = \sqrt{\pi\chi + 4\chi^2}$ (48)· ἄρα $\chi : \sqrt{\pi\chi + 4\chi^2} :: \sqrt{\pi\chi + 4\chi^2} : \pi + 4\chi$ (Συμϐ. Λογ. 240).

64. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων νδ, ΗΒ ἐπί τινα διάμετρον ΒΜ τετράγωνα εἰσὶν, ὡς αἱ ἀντίσοιχοι ὑπ᾽ αὐτῶν ἀποτετμημέναι, τȣτέςι· $\nu\delta^2 : \mathrm{HB}^2 :: \mathrm{M\Delta} : \mathrm{MB}$ (Σχ. 75).

ΔΕΙΞΙΣ. Τετάχθωσαν ἐπὶ τὸν ἄξονα αἱ ΠΜ. Ιν· ἐκεῖν ά. τὰ τρίγωνα ΖΡΜ, ΤΗΖ προδήλως ὅμοια (Γεωμ. 220) εἰσὶν ἔτι ϗ ἴσα, ὅτι $\mathrm{MP} = \mathrm{H\Pi}$ (Γεωμ. 127) $=$ ΗΤ (Γεωμ. 148), ϗ γωνίαι αἱ αὐταῖς προσκείμεναι ἴσαι.

β΄. Τὸ τρίγωνον ΗΒΡ ἴσον ἐςὶ τῷ παραλληλογράμμῳ ΤΗΒΜ· καὶ γὰρ παρὰ τὸ ἑκατέρῳ κοινὸν ΗΖΜΒ τὸ $\mathrm{ZPM} = \mathrm{THZ}$.

γ΄. Τὸ τρίγωνον ΟνΙ ἴσον ἐςὶ τῷ ὀρθογωνίῳ ΗΙΡΕ· ἔςι γὰρ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΤΠΜ, ΟνΙ, ὡς τὸ $\mathrm{T\Pi M} : \mathrm{O\nu I} :: \mathrm{\Pi M}^2 : \mathrm{I\nu}^2$ (Γεωμ. 389)· ἀλλὰ $\mathrm{\Pi M}^2 : \mathrm{I\nu}^2 :: \mathrm{H\Pi} : \mathrm{HI}$ (14) ἄρα $\mathrm{T\Pi M} : \mathrm{O\nu I} :: \mathrm{H\Pi} : \mathrm{HI}$, ἢ $\mathrm{T\Pi M} : \mathrm{H\Pi} :: \mathrm{O\nu I} : \mathrm{HI}$ (Ρ)· ἀλλὰ $\mathrm{IE} = \mathrm{\Pi M}$ (Γεωμ. 127)· ἐκ τῆς Ρ ἄρα πρόεισι καινὴ ἀναλογία· ΤΠΜ:

ΗΠ × ΠΜ : : ΟνΙ : ΗΙ × ΙΕ (Συμϐ. Λογ. 246)· ἀλλὰ ΤΠΜ = ΗΠ × ΠΜ (Γεωμ. 285 ϗ ἐνταῦθα 46)· ἄρα ϗ ΟνΙ = ΗΙ × ΙΕ, εἴτ' οὖν τῷ παραλληλογράμμῳ ΗΙΡΕ (Γεωμ. 283).

δ'. Τὸ τρίγωνον ΟΗκ ἴσον ἐςὶ τῷ τραπεζίῳ κνΡΕ· ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῶν ἴσων ΟνΙ ΗΙΡΕ ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν ΗκΙν, ἔσονται ἴσα τὰ κατάλοιπα ΟΗκ, κνΡΕ.

ε'. Τὸ τρίγωνον νδΔΕ ἴσον ἐςὶ τῷ παραλληλογράμμῳ δΜΟΤ· ἀποχρήσει οὖν εἰς τοῦτο ἵνα παρὰ τὸ κοινὸν νΥδΜ ᾖ ΥΕΜ = ΤΟνΥ· ἀλλὰ ΤΗΡ = ΖΡΜ (α'.)· ἐὰν ἄρα τοῖς ΓΗΖ, ΖΡΜ, τὸ αὐτὸ ποσὸν κΖνΥ προσθέντες, ἀφέλωμεν ἀπὸ τῶν ἴσων ὅλων τὰς ἴσας ποσότητας ΟΗκ, κνΡΕ (δ'.), ἕξομεν ΤΟνΥ = ΥΕΜ· ἄρα τὸ τρίγωνον νδΕ = τῷ παραλληλογράμμῳ δΜΟΤ.

ς'. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις νδΕ, ΗΒΡ (Γεωμ. 220) ἐςὶ (Γεωμ. 389) νδΕ : ΗΒΡ : : $νδ^2$: $ΗΒ^2$ ἐπεὶ δὲ νδΕ = δΜΟΤ (ἄνωτ) ϗ ΗΒΡ = ΤΗΒΜ (β'.), ἔςαι δΜΟΤ : ΤΗΒΜ : : $νδ^2$: $ΗΒ^2$.

ζ'. Τέλος δὲ τὰ παραλληλόγραμμα δΜΟΤ, ΤΗΒΜ, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΗΓ, ΒΜ ὄντα, εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις Μδ, ΜΒ (Γεωμ. 290).

Ἐντεῦθεν ἄρα αὐτόματος πρόχειται ἡ δεῖξις· δΜΟΤ : ΤΗΒΜ : : $νδ^2$: $ΗΒ^2$ (ς'.)· ἀλλὰ δΜΟΤ : ΤΗΒΜ : Μδ : ΒΜ· ἄρα $νδ^2$: $ΗΒ^2$: : Μδ : ΜΒ· Ο. Ε. Δ.

65. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔςω νδ = υ, ϗ ΗΒ = Υ, ϗ Μδ = χ, ϗ ΜΒ = Χ· πορισθήσεται τοίνυν $υ^2 : Υ^2 : : χ : Χ$· ἄρα $υ^2 = \frac{Υ^2 × χ}{Χ}$, τοιγαροῦν.

66. α'. $υ = ± \sqrt{\frac{Υ^2 × χ}{Χ}}$ (Συμϐ. Λογ. 127)· ἀ-

πάσῃ ἄρα τεταγμένῃ νδ ἀντιςοιχεῖ ὡς λείπεσα (εἴτ' ἒν κατ' ἀντίθετον ἔννοιαν) ἑτέρα τεταγμένη ἴση ἡ δΨ· ἅπασα ἄρα διάμετρος διχῇ τέμνει τὰς ἐφ' ἑαυτὴν διπλᾶς τεταγμένας, $νδ = δψ$· κἀκ τέτε ἄρα διάμετρος ἀκέειν ἐκληρώσατο.

67. β'. $υ^2 = \frac{Υ^2 χ}{Χ}$ ἐςὶν ἐξίσωσις τῶν ἐφ' ἅπασαν διάμετρον πλὴν τε ἄξονος τεταγμένων· ἀλλ' ἔςιν ἐν ταῖς ἐπὶ τὸν ἄξονα τεταγμέναις $υ^2 : Υ^2 :: χ : Χ$ (25), ὅθεν ἡ αὐτὴ τῇ ἀνωτέρω προκύπτει ἐξίσωσις $υ^2 = \frac{Υ^2 χ}{Χ}$· ὥςε ἐν παραβολῇ ἡ τῶν ἐφ' ἅπασαν διάμετρον τεταγμένων ἐξίσωσις ἔςιν ἡ αὐτὴ τῇ τῶν ἐπὶ τὸν ἄξονα· διάμετρος ἄρα πᾶσα τὰς αὐτὰς ἔχει τῷ ἄξονι ἰδιότητας, παρ' ὅσον αἱ ἐπ' ἐκείνας τεταγμέναι πλαγίως ἵςανται· γίνεται δὲ τῦτο, ὅτι ἡ τε ἄξονος ἁπτομένη Ηκ, πρὸς ὀρθὰς ἐφέςηκεν αὐτῷ· αἱ δὲ τῶν ἄλλων διαμέτρων ἁπτόμεναι πλαγίως ἐπ' αὐτὰς πίπτεσι· πᾶσα δὲ τεταγμένη παράλληλος ὑπάρχει τῇ τῆς ἑαυτῆς διαμέτρε ἐφαπτομένῃ (57).

68. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Παραβολῆς δοθείσης, τὸν ἄξονα αὐτῆς εὑρεῖν (σχ. 77).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθωσαν δύω παράλληλοι αἱ δε, Βζ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ σημεῖα ο, τ· διὰ δὲ αὐτῶν ἤχθω ἡ εὐθεῖα ΠΞ, ἣ γενήσεται μία τῶν διαμέτρων τῆς παραβολῆς (66), καὶ ἐςάθωσαν ἐπὶ τὴν ΠΞ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΠΡ, δΥ, περατέμεναι ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς παραβολῆς· αὗται ἒν ἔσονται αἱ διπλᾶι τεταγμέναι ἐπὶ τὸν ἄξονα, ὅτι ἡ ΠΞ, διάμετρος ἔσα, παράλληλος ἔςαι τῷ ἄξονι (56)· δίχα ἒν τεμέσα ταύτας τὰς δύω εὐθείας

κάθετος ἡ ΑΜ (Γεωμ. 106) ἔσεται ἄξων ὁ ζητέμενος. Ο. Ε. Δ.

69. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Παραβολῆς δοθείσης τῆς ΗΜΜ', εὑρεῖν αὐτῆς τὴν παράμετρον (σχ. 66).

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθήτω ὁ ἄξων ΗΠ (ἄνωτ.) ϗ ἀπό τινος σημείε Μ''' ἤχθω τεταγμένως ἡ πΜ''', ϗ ζητηθήτω τρίτη ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀποτετμημένην Ηπ, ϗ τὴν τεταγμένην πΜ''' (Γεωμ. 348)· αὕτη ἒν ἔσαι ἡ ζητεμένη παράμετρος (30).

70. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Τετραγωνίζειν ἡμιπαραβόλιον τὸ ΗΔΕ (σχ. 78).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθω ἡ ΤΔ ἁπτομένη κατὰ τὸ Δ (32), ϗ τετάχθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸν ἄξονα, ϗ αὐτῷ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΟ, ἥτις διῃρήσθω εἰς μέρη ἰσάλληλα ἐλάχιστα τὰ ΓΑ, ΑΓ κτλ., ϗ ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΔΕ διὰ τῶν χ, Ι σημείων αἱ ΑΒ, ΓΠ, τῇ δὲ ΔΟ αἱ ΘΚ, ΖΥ· ἐπεὶ ἒν τὰ ΤΔΕ, χΔΚ τρίγωνα (Γεωμ. 220) ὅμοιά εἰσιν, ἔσι ΤΕ : ΔΕ :: χΚ : ΔΚ· ἀλλὰ ΤΕ = 2ΗΕ (45) = 2ΔΟ, ϗ χΚ = ΒΕ· ἄρα 2ΔΟ : ΔΕ :: ΒΕ : ΔΚ· ἄρα 2ΔΟ × ΔΚ = ΔΕ × ΒΕ· εἶτ' ἒν τὸ ἐκτὸς τῆς παραβολῆς ὀρθογώνιον ΑΔΒΕ διπλἒν ἐσὶ τἒ ἐκτὸς αὐτῆς ὀρθογωνίε ΚΘΔΟ (*)· ἐπεὶ ἄρα ἅπαν ὀρθο-

(*) Ὑποτίθημι τὸ ΑΔΒΕ ὡς ὅλον ἐντὸς κείμενον τῆς παραβολῆς, ὅπερ ἀσφαλῶς ποιῆσαι δύναμαι· ϗ γὰρ τὸ ἐκτὸς κείμενον τριγωνίδιον Αχ Δ γινόμενον ὑπὸ τἒ ἀπειροσἒ $\frac{ΑΔ}{2}$ ϗ τἒ ἀπειροσἒ Αχ ἀπειροσόν ἐσι δευτεροταγὲς (Συμβ. Λογ. 527), ὅπερ ὡς πρὸς τὸ πρωτοταγὲς ἀπειροσὸν ΑΔΒΕ ἐκλαμβάνεται ἴσον μηδενί (Συμβ. Λογ 520)· διὰ τὸν αὐτὸν

γώνιον, ὃ συντίθησι τὴν ΗΔΕ μερίδα τῦ ΗΟΔΕ ὀρθογωνίε, διπλῦν ἐςὶ τῦ ὀρθογωνίε τῦ ἀντιςοιχῦντος ἐν τῇ ΔΟΗ μερίδι τῦ ἐκτὸς τῦ ἡμιπαραβολίε· ἄρα τὸ ὅλον ἐσωτερικὸν ἐμβαδὸν ΗΔΕ διπλῦν ἐςι τῦ ὁλικῦ ἐξωτερικῦ ἐμβαδῦ· ἄρα τὸ ΗΔΕ τῦ ἡμιπαραβολίε ἐμβαδὸν ἴσον ἐςὶ δυσὶ τριτημορίοις τῦ ὀρθογωνίε ΗΟΔΕ, τῦ βάσιν μὲν τὴν τεταγμένην ΔΕ, ὕψος δὲ τὸν ΗΕ ἄξονα ἔχοντος. Ο. Ε. Π.

ΑΛΛΩΣ. Ἐπείπερ ΔΕ $= \upsilon = \sqrt{\pi\chi}$ (28)· ἐὰν τεθῇ $\pi = 1$, ἔςαι $\upsilon = \sqrt{\chi}$, εἴτ' ὖν $\upsilon = \chi^{\frac{1}{2}}$· τοιγαρῦν ὅπως ἂν εὑρεθείη τὸ ἄθροισμα τῶν μεταξὺ Η ϗ ΔΕ τεταγμένων, συναπτέον τὴν σειρὰν $1^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}, 4^{\frac{1}{2}}, 5^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots \chi^{\frac{1}{2}}$· ἀλλὰ τὸ ταύτης ἄθροισμα (Συμβ. λογ. 568.) ὑπάρχει $\frac{\chi^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\chi^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\chi^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\chi^3} = \frac{2}{3}\chi\sqrt{\chi}$, εἴτ' ὖν (ἐπεὶ $\upsilon = \sqrt{\chi}$) $= \frac{2}{3}\chi\upsilon$· Τὸ ἄρα παραβολικὸν χωρίον ΗΔΕ δυσὶν ἰσῦται τριτημορίοις τοῦ ἔκτε τῆς τεταγμένης καὶ τῆς ἀποτετμημένης γενομένου, εἴτ' οὖν τοῦ ὀρθογωνίου ΗΟΔΕ· ὅρα δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ἄλλως ἔτι δεικνύμενον ἐν Τόμ. Β΄. σελίδ. 116 τῶν μαθηματικῶν ςοιχείων Νικηφόρου τοῦ Θεοτόκε.

71. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄρα τὸ τῦ ἡμιπαραβολίε ἐμβα-

λόγου ὅλον τὸ ΟΘΔΚ ἐκτὸς τῆς παραβολῆς ὑποτίθημι· ὡσαύτως ὡς ἐντὸς μὲν ὅλον ἐκδέχομαι τὸ ὀρθογώνιον ΒΠξχ, ὡς ὅλον δὲ ἐκτὸς τὸ ΤΘυχ· δείκνυται δὲ εὐπετῶς ϗ ἐν τέτοις, ὅτι ΒΠξχ = 2ΤΘυχ.

δὸν εὑρεθήσεται, πολλαπλασιαθείσης τῆς ἐσχάτης τεταγμένης ἐπὶ δύω τριτημόρια τῦ ΗΕ ἄξονος.

72. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Εὑρεῖν τὴν ςερεότητα τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος.

ΛΥΣΙΣ. Ἐν τῷ τὴν καμπύλην (σχ. 66) ΗΜΜ΄΄ περὶ τὴν ΗΠ περιάγεσθαι, ϗ ἀπογεννᾷν τὴν κωνοΐδα, πᾶσαι αἱ τεταγμέναι ΠΜ κύκλυς καταγράφυσιν· οἱ δὲ κύκλοι ὗτοι ἀπὸ τῆς Η κορυφῆς προϊόντες αὔξυσιν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΠΜ τετράγωνα (Γεωμ. 398)· ταῦτα δὲ, ὡς αἱ ἀποτετμημέναι (25)· αἱ δὲ ὡς 1. 2. 3. 4. ∞, ἢ ὡς ∸ 0. 1. 2. 3. 4. . . . ∞, Α· ἄρα οἱ κύκλοι, εἴτ᾽ ὖν τὰ ςοιχεῖα τῆς κωνοΐδος ἄυξυσι, κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον Α· ϗ δὴ τῶν αὐτῶν τὸ ἄθροισμα ἐμφαίνεται διὰ τῦ ἀθροίσματος τῆς ἀριθμητικῆς προόδυ Α.

Ἀριθμὸς δὲ τῶν ὅρων ταύτης τῆς προόδυ ἐςίν ὁ ἄξων ΗΠ· ὁ δὲ ἔσχατος ὅρος ∞ ἐμφαίνει τὸν κύκλον, ὃς ἐςι βάσις τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος, ϗ ὃν ἡμεῖς καλῦμεν ἤδη Β· ἄρα τῦτο τὸ ἄθροισμα ἐςὶ (Συμβ. Λογ. 217) $\frac{\mathrm{B}\times\mathrm{H\Pi}}{2}$· ἀλλὰ Β × ΗΠ κύλινδρός ἐςι, βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον Β, ὕψος δὲ ΗΠ (Γεωμ. 456)· ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ςοιχείων, εἴτ᾽ ὖν ἡ ςερεότης τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος, ἴση ἐςὶ τῷ ἡμίσει τῦ κυλίνδρυ, ὗ βάσις μὲν ἡ τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος, ὕψος δὲ ὁ ἄξων. Ο. Ε. Π.

73. Ἵν᾽ ἄρα εὑρεθῇ ἡ τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος ςερεότης, θηρευτέον τὸ ἐμβαδὸν τῆς αὐτῦ βάσεως, ϗ πολλαπλασιαςέον αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἡμιάξονα· σαφὲς ἄρα, ὡς ὁ ἀπόλυτος τῆς παραβολικῆς κωνοΐδος κυβισμὸς ἐξήρτηται τῦ ἀπολύτυ κυκλικῦ τετραγωνισμῦ (Γεωμ. 363. κτλ.).

Περὶ τȣ͂ ὅπως ὑπόνομοι κοιλαίνονται.

Ὑπόνομός ἐςιν ὑπόγειον κοίλωμα, ἐν ᾧ κόνις πυρίτις τίθεται πρὸς τὸ δι' αὐτῆς ἀναῤῥῆξαι τὴν ὑπερκειμένην γῆν· ȣ̓κȣ͂ν ἡ ἱκανȣ͂σα τῆς κόνεως ποσότης ὁρισθήσεται ȣ̔́τω.

Δῆλον ἐκ πείρας ὡς ἐν γῇ πάντῃ ὡσαύτως ἀνθισαμένης τὸ κατὰ τὴν ἀνάῤῥηξιν καταλειπόμενον κενὸν ἐςιν (σχ. 79) οἷα ἡ ΤΗΓ παραβολικὴ κωνοῒς· ὁρισθείσης ȣ̓͂ν τῆς τȣ́τȣ ςερεότητος ἀποτελȣμένης ἐκ τȣ͂ ὑπονόμȣ, γνωσθήσεται καὶ ἡ ἱκανȣ͂σα κόνις, γινομένης πείρας τὸ πρῶτον, ὅση ἱκανὴ ἔςαι εἰς ἀνάῤῥηξιν γῆς κυβικȣ͂ ποδός.

74. Εἰσὶ δ' ἐκ πείρας βέβαια καὶ ταῦτα· ά. ἡ ἐξ ὑπονόμȣ σχηματιζομένη παραβολικὴ κωνοῒς ΓΗΤ, ἔχει τὴν ἑςίαν ἐν τῷ μέσῳ τȣ͂ χώρȣ, ἐν ᾧ ἡ κόνις· β'. ἡ ΒΕ κάθετος ἐγχωννυμένη τῷ ὑπονόμῳ, καὶ μέρος ἀποτελȣμένη τȣ͂ κατὰ τὴν κωνοῒδα ἄξονος, ἴση εὑρίσκεται τῇ ἀκτῖνι ΒΓ τȣ͂ μεγίςȣ τῶν ἐν τῇ κωνοῒδι κύκλων· ἔςω ȣ̓͂ν διευθετȣ͂σα ἡ ΟΔ· ὅθεν ΓΕ $=$ ΓΟ (17) $=$ ΒΔ· ἔςω δὲ καὶ ΒΓ $=$ ΒΕ, ὡς ἤδη εἴρηται $= \nu$· ἐπεὶ ȣ̓͂ν τὸ ΒΓΖ τρίγωνον ἐςὶν ὀρθογώνιον· ἄρα $\mathrm{ΓΕ}^2$ $(\mathrm{ΒΔ}^2) = \nu^2 = 2\nu^2$· ἄρα $\mathrm{ΒΔ} = \sqrt{2\nu^2}$· ἄρα $\mathrm{ΕΔ} = \sqrt{2\nu^2} - \nu$· ἄρα $\mathrm{ΕΗ} =$

$$\frac{\sqrt{2\nu^2} - \nu}{\alpha} \;(17)\text{· ἄρα } \mathrm{ΒΗ} = \nu + \frac{\sqrt{2\nu^2} - 2}{2} \;(\Pi).$$

75. Γνωσθείσης ȣ̓͂ν τῆς καθέτȣ ΒΕ $= \nu$, καθ' ἣν ἐςὶν ὑπορωρυγμένος ὁ ὑπόνομος, ἅπαν γνωςὸν ἔςαι διὰ τῆς Π ἐξισώσεως· πολλαπλασιασθέντος δὲ τȣ͂ κύκλȣ, ȣ̔͂ ἀκτὶς ΒΓ $= \nu$, ἐπὶ τὸ $\frac{\mathrm{ΒΗ}}{2}$ ȣ̔́τως εὑρημένον, ἀπολη-

φθήσεται ἡ ζητȣμένη ςερεότης Σ. ἀλλὰ γὰρ εὔδηλον, ὡς ἡ μικρὰ παραβολικὴ κωνοῖς ΗχΕ διεσχημάτισαι πρὸς τὸ Δ βίᾳ τῆς κόνεως, τῆς πράγματι ἀποῤῥαγείσης γῆς ἔσης μόνης τῆς κολȣ́ρȣ κωνοῖδος ΓΤχΕ· δεῖ ȣ̃ν ἀποκόψαι τῆς εὑρημένης Σ ςερεότητος, τὴν τȣ̃ ΗχΕ.

76. Εἰς δέ γε τȣ̃το, γνωςὸν μέν ἐςι τὸ ὕψος ΕΗ $= \frac{\sqrt{2\nu^2 - \nu}}{2}$· ἐπεὶ δὲ ΕΖ = 2ΕΗ (27), γνωςὴ ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως χΕΖ τῆς κωνοῖδος χΗΖ, καὶ δὴ καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς τῆς βάσεως (Γεωμ. 298), ἣν πολλαπλασιάσαντες ἐπὶ $\frac{\text{ΗΕ}}{2}$, ἕξομεν τὴν ςερεότητα τȣ̃ ΗχΖ, ἧς ἀφαιρεθείσης ἀπὸ Σ, καταλειφθήσεται ἡ ἀληθῶς ἀποκρȣσθεῖσα γῆ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ Ελλείψεως.

77. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ ἔλλειψις ἐςὶ καμπύλη ἀνακάμπτȣσα.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΑΗ > ΗΒ (σχ. 67), καὶ πάντα τὰ ἐφεξῆς κείμενα τρίγωνα ΑΠΔ ὅμοιά εἰσι τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ, αἱ ΑΠ τάχιον αὔξȣσιν, ἢ αἱ αὐτῶν ΠΔ· τελευταῖον ȣ̃ν ἔςαι τις ΕΠ = ΠΔ τῇ ἑαυτῆς· αὕτη ȣ̃ν ἡ ΠΔ μετενεχθεῖσα ἐφ' ἑαυτὴν ἐκ τȣ̃ Ε, πεσεῖται ἐπὶ τȣ̃ ἄξονος κατὰ τὸ η· οἱ δύω ἄρα κλῶνες ΗΜη, ΗΜ΄η συνενωθήσονται κατὰ τὸ η. Ο. Ε. Δ.

78. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τῇ ἐλλείψει ἄρα, δύω μὲν ἔσονται αἱ κορυφαὶ Η, η, εἷς δ' ὡρισμένος ἄξων ὁ Ηη.

79. Αἴτημα. Ἐπὶ τῆς Ηη εἰλήφθω ηε = ΗΕ, καὶ ἐπ' αὐτῆς προεκβληθείσης, Ιη = ΗΑ· ἐστάσθω κατὰ τὸ η κάθετος ἡ ηβ = ΗΒ, καὶ διὰ τοῦ β ἤχθω ἡ Ιτ· ἐπεὶ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΗ, Ιβη ἴσα, πάντα τε τὰ τρίγωνα ΑΠΔ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀντιστοίχοις ΙΠδ ἕκαστον ἑκάστῳ, καὶ αἱ Πδ ἴσαι ταῖς ΠΔ, ταῖς ἀπεχούσαις ἀπὸ τοῦ Η, ὅσον αἱ Πδ ἀπὸ τοῦ η, ἐντεῦθεν ἄρα . . .

80. α΄. Τὸ σημεῖον ε ἐστὶν ἑστία ὡς καὶ τὸ Ε, καὶ δι' αὐτῆς γραφῆναι δύναται ἡ καμπύλη· δύω ἄρα τῇ ἐλλείψει αἱ ἑστίαι Ε, ε, ἴσον ἀπέχουσαι ἑκατέρα τῆς κορυφῆς Η, ἢ η.

81. β΄. Αἱ τεταγμέναι ΠΜ, καὶ αἱ διπλαῖ τεταγμέναι ἑπομένως, αἱ ἰσοδιεστῶσαι τῶν κορυφῶν Η, η ἑκατέρα ἑκατέρας, ἴσαι ἔσονται· ἡ ἔλλειψις ἄρα ἐν δυσίτισιν ἀντιθέτοις σημείοις τὴν αὐτὴν ἔχει καμπυλότητα· καὶ ἐπὶ ΠΜ = ΠΜ τῇ ἑαυτῆς ἀντιστοίχῳ δήπουθεν, ἡ καμπύλη αὕτη δίχα τέμνεται διὰ τοῦ ἄξονος Ηη.

82. γ΄. Ἐλάττων ἄξων καλεῖται ἡ διπλῆ τεταγμένη ΜΚΜ″, ἡ διήκουσα διὰ τοῦ μέσου τοῦ ἄξονος ὃς καλεῖται μείζων ὡς πρὸς τὸν ἐλάττω· ἑκάτερος ἄρα τῶν ἀξόνων δίχα τέμνει τὴν ἔλλειψιν.

83. Τὸ σημεῖον Κ, καθ' ὃ ἀλλήλους οἱ ἄξονες τέμνουσι, Κέντρον καλεῖται τῆς ἐλλείψεως· τὸ δὲ ΚΕ, ἢ Κε ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀφ' ἑκατέρας ἑστίας Ἐκκεντρότης καλεῖται τῆς ἐλλείψεως.

84. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ὁ μείζων ἄξων τῆς ἐλλείψεως ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν σημείου παντὸς μ τῆς

καμπύλης δύω ἀποςημάτων ἀφ' ἑκατέρας τῶν ἑςιῶν· εἴτ' ἐν Ηη = Εμ + εμ.

ΔΕΙΞΙΣ. ΗΕ = ΗΒ = ηβ, ϗ ηΕ = ηΔ (ἐκ κατασκευῆς)· ἄρα Ηη = βηΔ, = μιᾷ τινι Δδ (ἐπεὶ Ιτ παράλληλος τῇ ΑΤ, ϗ Δηδ ἴση μιᾷ τινι Δδ).

Παρὰ ταῦτα Εμ = ΠμΔ' (ἐκ κατασκ.)· ϗ εμ = ΠΜ'''δ, εἴγε τὰ μ, Μ''' σημεῖα εὑρέθησαν μεταφερομένης ἐκ τῦ ε τῆς ΠΜ'''δ ἐφ' ἑαυτὴν (80)· ἐκῦν Εμ + εμ = ΠμΔ' + ΠΜ'''δ, εἴτ' ἐν τῇ ὅλῃ Δ'μ = Μ'''δ, ἢ μιᾷ τινι Δδ.

Ἐπεὶ τοίνυν Ηη = Δδ, ϗ Εμ + εμ = Δδ· ἄρα ϗ Ηη = Εμ + εμ· Ο. Ε. Δ.

85. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐντεῦθεν ἄρα εὐχερῶς πάνυ ἔλλειψιν γράφειν μεμαθήκαμεν· εἰλήφθω γὰρ (§. 80) ἄξων ὁ Ηη, ϗ δύω ἑςίαι Ε, ε, τιθεμένων ΗΕ = ηε, ϗ γενέσθω ΑΗ = ΗΕ· ϗ κέντρῳ τῷ ε γεγράφθωσαν ἐφεξῆς τόξα τὰ ΜΟΔ, ΜΟ'Δ'· εἶτα δὲ ἐκ τῦ Α εἰλήφθω ἕκαςον ἀπόςημα ΑΔ, ϗ μετηνέχθω ἐκ τῦ Ε ἐπὶ τὸ ἑαυτῷ ἀντίςοιχον τόξον· ϗ δὴ πάντα τὰ ὕτως εὑρεθέτα σημεῖα ἔσονται ἐπὶ τῆς καμπύλης.

Καὶ γὰρ εΜ' = εΔ' (Γεωμ. 4.) ἀλλὰ ΕΜ' = ΑΔ' = ΗΔ' + εη (ἐκ κατασκευῆς)· ἄρα ΕΜ' + εΜ' = ΗΔ' + εη + εΔ' = Ηη· πάντα ἄρα τὰ ὕτως εὑρεθέντα σημεῖα ἔςαι ἐν ἐλλείψει (84).

86. Καὶ ἁπλυςέρα δὲ ἄλλη πορίζεται μέθοδος τοῦ γράφειν ἔλλειψιν, δοθέντος τῦ μείζονος ἄξονος Ηη, ϗ τῦ τῶν ἑςιῶν ἀποςήματος Ε, ε· νήματος γὰρ ἴσυ τῷ Ηη, θάτερον μὲν πέρας πεπήχθω ἐπὶ τῦ Ε, θάτερον δὲ ἐπὶ τῦ ε· ἧλος δὲ ὁ Μ' ἔνδοθεν τὸ νῆμα τείνων ὀρθὸς πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον περιήχθω· λέγω δὴ ὅτι ὁ

ἦλος Μ′ ἔλλειψιν καταγράφει· ἐν παντὶ γὰρ σημείῳ τῷ ὑπ᾽ αὐτῦ γραφομένῳ ἔςιν ΕΜ′ + εΜ′ = Ηη (84).

87. ΠΟΡΙΣΜΑ Β′. Τῶν εὐθειῶν τῶν ἀπὸ τῦ πέρατος τῦ ἐλάττονος ἄξονος ἐπὶ τὰς ἑςίας ἐπιζευγνυμένων ἑκάςη ἴση ἐςὶ τῷ μείζονι ἡμιάξονι· ϗ γὰρ (Σχ. 67) ΕΜ″ + εΜ″ι = Ηη (84)· ἀλλ᾽ ΕΜ″ = εΜ″, ἐπεὶ ὖσης ΚΜ″ πλευρᾶς κοινῆς, ϗ ΚΕ = Κε, ϗ τῆς Κ γωνίας ὀρθῆς, τὰ τρίγωνα ΚΕΜ″, ΚεΜ″ εἰσὶν ἴσα (Γεωμ. 221)· ἄρα $ΕΜ'' = \frac{Ηη}{2} = εΜ''$.

88. Ὑπόθεσις. Τὸν μὲν μείζονα ἡμιάξονα ἐν τοῖς ἐφεξῆς ἀποκαλέσομεν α, ϗ δὴ ΕΜ″ = α (87), τὸν δ᾽ ἐλάττονα β· τὴν δ᾽ ἐκκεντρότητα ΚΕ, ἢ Κε = κ· χ δὲ τὸ ἀπόςημα μιᾶς τινος τεταγμένης ἀπὸ τῦ κέντρυ· ὖκῦν ἡ ἀποτετμημένη ἐξ ὑποθέσεως Π′Η = α + χ, ἡ δὲ Π′η = α — χ· γινόμενον δὲ ὑπὸ τῶν ἀποτετμημένων Π′Η × Π′η ἐν τῇ ἐλλείψει, $α^2 - χ^2$.

89. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ′. Ὁ ἐλάττων ἡμιάξων ΚΜ″ ἐςι μέσος ἀνάλογον (Σχ. 67) τῶν ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν κορυφῶν δύω ἀποςημάτων τῆς ἑτέρας τῶν ἑςιῶν, εἴτ᾽ ῦν ΗΕ = α — Κ : ΚΜ″ = β :: ΚΜ″ = β : Εη = α + Κ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΕΚΜ″, ἔςι $ΚΜ''^2$ ($β^2$) = $ΕΜ''^2$ ($α^2$) — $ΚΕ^2$ ($-κ^2$), ἢ $β^2 = α^2 - κ^2$· ἐπινοηθήτω νῦν τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως ὡς $\overline{α+κ} \times \overline{α-κ}$ (Συμβ. Λογ. 44)· ἐπεὶ δὲ πᾶσα ἐξίσωσις ἀναλογίαν παρέχει (Συμβ. Λογ. 240), ἔςιν ἄρα α — κ : β :: β : α + κ. Ο. Ε. Δ.

90. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ′. Τὸ ἀπὸ πάσης τεταγμένης ἐπὶ τὸν μείζονα ἄξονα τετράγωνον πρὸς τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ὑπ᾽ αὐτῆς ἀποτετμημένων ἔςιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῦ ἐλάτ-

τονος ἡμιάξονος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος ἡμιάξονος.

ΔΕΙΞΙΣ. Φημὶ δὴ ὡς ἐστι (ϛ. 81) $\Pi M^2 = \upsilon^2$: $H\Pi \times \Pi\eta = \alpha^2 - \chi^2$ (87) :: $KM^2 = \beta^2 : \alpha^2$, ἢ $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$.

Ἔστι γὰρ ά. $\Pi E = \chi - \varkappa$, καὶ $\Pi\varepsilon = \chi + \varkappa$, καὶ $E\mu + \varepsilon\mu = 2\alpha$ (84).

Τεθείσθω νῦν $\varepsilon\mu - E\mu = 2\nu$· καὶ δὴ ἔσται $\varepsilon\mu = \alpha + \nu$, καὶ $E\mu = \alpha - \nu$ (Συμϐ. Λογ. 442).

β΄· Ἐν τῷ τριγώνῳ ΕΠμ ἐστι $\Pi\mu^2$ $(\upsilon^2) = E\mu^2$ $(\overline{\alpha - \nu}^2 = \alpha^2 - 2\alpha\nu + \nu^2) - \Pi E^2$ $(\overline{-\chi - \varkappa}^2 = - \chi^2 + 2\varkappa\chi - \varkappa^2)$ Α.

γ΄. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ Πμε ἐστι $\Pi\mu^2$ $(\upsilon^2) = \mu\varepsilon^2$ $(\alpha^2 + 2\alpha\nu + \nu^2) - \Pi\varepsilon^2$ $(\overline{-\chi - \varkappa}^2 = - \chi^2 - 2\chi\varkappa - \varkappa^2)$ Β.

δ΄. Ἀντικαταστάσει ἄρα ἀντὶ υ^2 ἐν τῇ Β ἐξισώσει τῆς ἐν τῇ Α εὑρεθείσης δυνάμεως ἔσται $\alpha^2 - 2\alpha\nu + \nu^2 - \chi^2 + 2\varkappa\chi - \varkappa^2 = \alpha^2 + 2\alpha\nu + \nu^2 - \chi^2 - 2\varkappa\chi - \varkappa^2$· ἀναγωγῇ δὲ γίνεται $4\alpha\nu = 4\varkappa\chi$· ἄρα $\alpha\nu = \varkappa\chi$· ἄρα $\nu = \frac{\varkappa\chi}{\alpha}$.

ε΄. Ἀντικαταστήτω νῦν ἀντὶ ν ἡ αὐτοῦ δύναμις ἐν τῇ Α ἐξισώσει, ἥτις γενήσεται $\upsilon^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha\varkappa\chi}{\alpha} + \frac{\varkappa^2\chi^2}{\alpha^2} - \chi + 2\varkappa\chi - \varkappa^2$· ἀναγωγῇ δὲ, $\upsilon^2 = \alpha^2 + \frac{\varkappa^2\chi^4}{\alpha^2} - \chi^2 - \varkappa^2$· ἀπαλλαγῇ τοῦ κλάσματος, $\alpha^2\upsilon^2 = \alpha^4 + \varkappa^2\chi^2 - \alpha^2\chi^2 - \alpha^2\varkappa^2$ (Μ).

Ἐπεὶ δὲ ἀνασκοποῦσιν εὑρίσκεται ἡ Μ ἐξίσωσις γινομένη ὑπὸ δύω παραγόντων τῶν $\alpha^2 - \chi^2$, $\alpha^2 - \kappa^2$, γεγράφθω $\alpha^2 \upsilon^2 = \alpha^2 - \chi^2 \times \alpha^2 - \kappa^2$ Ν· πρὸς τὸ δύνασθαι διαγινώσκειν ἑκάτερον παράγοντα.

ϛʹ. Ἔστι δὲ $\alpha^2 - \kappa^2 = \beta^2$ (89)· δυνατὸν ἄρα διελεῖν τὴν Ν ἐξίσωσιν διὰ β^2 (Συμβ. 393)· καὶ δὴ γενήσεται $\frac{\alpha^2 \upsilon^2}{\beta^2} = \alpha^2 - \kappa^2$ Π.

ζʹ. Τέλος δὲ ἐπείπερ ἡ Π ἐξίσωσις ἀναλογίαν ἀεὶ προβαλέσθαι ἔχει· ἔστι δὲ τὸ κατ' αὐτὴν πρῶτον μέλος $\frac{\alpha^2 \upsilon^2}{\beta^2}$ κλασματικὸν, ὑποτεθῆναι δύναται, ὁ μὲν ἐν αὐτῷ ἀριθμητὴς ὡς παραγόμενον ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων τῆς ἀναλογίας, ὁ δὲ παρονομαστὴς ὡς εἷς τῶν μέσων· τὸ δὲ $\alpha^2 - \chi^2$ ὡς τῶν μέσων ὁ ἕτερος· ἐντεῦθεν οὖν $\alpha^2 : \beta^2 :: \alpha^2 - \chi^2 : \upsilon^2$· ἢ $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$. Ο. Ε. Δ.

91. ΠΟΡΙΣΜΑ Αʹ. Ἐκ δὲ ταύτης τῆς ἀναλογίας πρόεισιν ἡ ἐξίσωσις $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 - \beta^2 \chi^2}{\alpha^2}$· καὶ αὕτη ἐστὶν ἡ τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσις, περιέχουσα τὰς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτεμνομένας.

ΠΟΡΙΣΜΑ Βʹ. Ἄρα $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2 - \chi^2)}$· ἐὰν δὲ γένηται $\chi = 0$, ἔσται $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2 - 0^2)} = \upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2} = \frac{\beta}{\alpha}\alpha = \frac{\beta\alpha}{\alpha} = \beta$.

92. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν δὲ ἀποτέμνωνται πρὸς τῇ κορυφῇ Η, ἔσται ΗΠ $= \chi$, καὶ ηΠ $= 2\alpha - \chi$, καὶ ΗΠ

$\times$ ηΠ $= 2\alpha\chi - \chi^2$· ἄρα ἡ προεκτεθεῖσα ἀναλογία γενήσεται $\upsilon^2 : 2\alpha\chi - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· ὅθεν $\upsilon^2 = \frac{\beta^2(2\alpha\chi - \chi^2)}{\alpha^2}$, ἢ $\upsilon\upsilon = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}(2\alpha\chi - \chi\chi)$ ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως τῶν πρὸς τῇ κορυφῇ ἀποτετμημένων περιεκτική.

93. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐὰν ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (P), ὑποτεθῇ $\beta^2 = \alpha^2$, εἴτ' οὖν τεθῇ ἴσος ὁ μείζων τῷ ἐλάττονι ἄξονι, ἀποληφθήσεται $\upsilon^2 = \frac{\alpha^4 - \alpha^2\chi^2}{\alpha^2}$: ἀναγωγῇ δὲ, $\upsilon^2 = \alpha^2 - \chi^2$, ἐξίσωσις τοῦ κύκλου, περιέχουσα τὰς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένας· ἡ γὰρ $\upsilon^2 = 2\alpha\chi - \chi^2$ (12) περιέχει τὰς πρὸς τῇ κορυφῇ· σαφὲς ἄρα ἐντεῦθεν ὡς ὁ κύκλος ἔλλειψίς ἐστιν, ἧς ὁ ἐλάττων ἄξων ἀπειροσόντι διαφέρει τοῦ μείζονος, ἢ καὶ ἴσος ἐστὶ τῷ μείζονι· ἡ δ' αὐτοῦ ἐκκεντρότης ἐστὶν $= \frac{1}{\infty} = 0$ (3).

94. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐκ δύω τεταγμένων υ, Υ ἔχομεν α΄. $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· β΄. $\Upsilon^2 : \alpha^2 - X^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· ἄρα $\upsilon^2 : \Upsilon^2 :: \alpha^2 - \chi^2 : \alpha^2 - X^2$, τουτέστιν „ἐν ἐλλείψει καὶ δὴ καὶ ἐν κύκλῳ τὰ ἀπὸ τῶν ἐπὶ „τὸν μείζονα ἄξονα τεταγμένων τετράγωνα πρὸς ἄλλη„λά εἰσιν, ὡς τὰ γινόμενα ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν ἀποτετμη„μένων καὶ συναποτετμημένων.“

95. Τοῦτὶ ἄρα τὸ σχῆμα ταυτόν ἐστι τῇ τοῦ κώνου προελθούσῃ τομῇ (15)· ὑποτιθεμένων, τοῦ μὲν $2\alpha > 2\beta$, τοῦ δὲ $\upsilon^2 < \alpha^2 - \chi^2$.

96. Τελευταῖον δὲ, οὐχ' ὅτι ἐν καμπύλῃ ἐστὶν $\upsilon^2 : \Upsilon^2 :: \alpha^2 - \chi^2 : \alpha^2 - X^2$, παρὰ τοῦτο ἔσται ἔλλειψις

ἡ καμπύλη ἀνίσυς ἔχυσα ἄξονας· ταύτην γὰρ τὴν ἰδιότητα ὁ κύκλος ἔχων εὑρίσκεται (93)· ἀλλ' ἔςαι ἔλλειψις, ἐὰν ᾖ ϗ $\upsilon^2 < \alpha^2 - \chi^2$.

97. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἡ παράμετρος (%. 67) ΜΕΜ^{I} $= \pi$ τῦ πρώτυ τῆς ἐλλείψεως ἄξονος ἔςιν εὐθεῖα τρίτη ἀνάλογον τῦ πρώτυ ϗ τῦ δευτέρυ τῶν ἀξόνων· ὑπὲρ γὰρ τῆς παραμέτρυ ὄντος $\chi = \kappa$ (88) ἡ Ρ ἀναλογία (93) γενήσεται $\upsilon^2 : \alpha^2 - \kappa^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· ἀλλ' $\alpha^2 - \kappa^2 = \beta^2$ (89)· ἄρα $\upsilon^2 : \beta^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· ἄρα $\upsilon : \beta :: \beta : \alpha$ (Συμϐ. Λογ. 263)· ϗ ἑπομένως $2\upsilon = \pi : 2\beta :: 2\beta : 2\alpha$, ἢ $2\alpha : 2\beta :: 2\beta : \pi$.

98. Ὥςε τύπος τῆς παραμέτρυ π ἔςαι $= \frac{4\beta^2}{2\alpha} = \frac{2\beta^2}{\alpha}$

99. Κύκλυ ἄρα ἡ παράμετρος ἴση ἐςὶ τῇ διαμέτρῳ· ἐπεὶ γὰρ $\beta = \alpha$, ἔςαι $\pi = \frac{2\alpha^2}{\alpha} = 2\alpha$.

100. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Ὁ τύπος, τῆς μὲν μείζονος ὀρθίας πλευρᾶς εμ ἐςὶν $\alpha + \frac{\kappa\chi}{\alpha}$, τῆς δ' ἐλάττονος Εμ $= \alpha - \frac{\kappa\chi}{\alpha}$ (%. 81).

ΔΕΙΞΙΣ. Εἴγε εμ $= \alpha + \nu$, ϗ Εμ $= \alpha - \nu$ (89. ἐν τῇ δείξει)· ἀλλὰ $\nu = \frac{\kappa\chi}{\alpha}$ (89. δ΄.) ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

101. ΘΕΩΡΗΜΑ ς΄. Τὸ τῆς ἐλλείψεως ΗΜ′ηΜ′ ἐμϐαδὸν ρ (%. 82) πρὸς τὸ τῦ ΗΒηΟ κύκλυ, τῦ γεγραμμένυ ἐπὶ τῦ μείζονος τῶν ἐκείνης ἀξόνων, ἔςιν ὡς ὁ ἐλάττων ἄξων πρὸς τὸν μείζονα· τυτέςι ρ : Ρ :: Μ′Μ′ : ΒΟ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςι μὲν γὰρ ἐν τῇ ἐλλείψει ΠΜ^2 : ΠΜ′^{2}

: : ΗΠ × Πη : ΗΠ′ × Π′η (94)· ἔςι δὲ ὡσαύτως κἂν τῷ κύκλῳ $Πβ^2$: $Π'β^2$: : ΗΠ × ηΠ : ΗΠ × Π′η (αὐτ.)· ἄρα $ΠΜ^2 : Π'Μ'^2 : : Πβ^2 : Π'Β^2$· ἄρα ΠΜ : Π′Μ′ : : Πβ : Π′Β· τȣτέςιν, αἱ ἐν τῇ ἐλλείψει τεταγμέναι ἀνάλογόν εἰσι πρὸς τὰς ἐν τῷ κύκλῳ ἀντιςοιχȣ́σας· ἄρα τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν τεταγμένων, εἴτ' ȣ̃ν τὸ ἐμβαδὸν ρ τῆς ἐλλείψεως, πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τεταγμένων, εἴτ' ȣ̃ν τὸ τȣ̃ κύκλȣ ἐμβαδὸν Ρ, ὡς μία τεταγμένη ἐν τῇ ἐλλείψει ἡ Π′Μ′ πρὸς μίαν ἀντίςοιχον τεταγμένην ἐν τῷ κύκλῳ τὴν Π′Β, εἴτ' ȣ̃ν ρ : Ρ : : Π′Μ′ : Π′Β· ἄρα (Συμϐ. Λογ. 234) ρ : Ρ : : 2Π′Μ′ = Μ′Π′Μ′ : 2ΠΒ = Ηη. Ο. Ε. Δ.

102. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ τῆς ἐλλείψεως ἐμβαδὸν ρ ἐξισȣ̃ται τῷ κύκλȣ Δ, ȣ̃ ἡ διάμετρος χ ἔςι μέση ἀνάλογον τȣ̃ μείζονος ἄξονος Ηη, ϗ τȣ̃ ἐλάττονος Μ′Μ′· ἔςω γὰρ τὸ τȣ̃ ΗΒΟ κύκλȣ ἐμβαδὸν = Ρ· ȣ̓κȣ̃ν ἔςαι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν ÷ Ηη : χ : Μ′Μ′· ἄρα (Συμϐ. Λογ. 269) Ηη : Μ′Μ′ : : $Ηη^2 : χ^2$· ἀλλὰ Ρ : ρ : : Ηη : Μ′Μ′ (10)· ἄρα Ρ : ρ : : $Ηη^2 : χ^2$· ϗ δὴ Ρ : Δ : : $Ηη^2 : χ^2$ (Γεωμ. 398)· ἄρα Ρ : ρ : : Ρ : Δ (Γεωμ. 327)· ἢ Ρ : Ρ : : ρ : Δ· ἄρα ρ = Δ (Γεωμ. 336. Σχ.)· ȣ̓κȣ̃ν ἡ τῆς ἐλλείψεως ἐπιφάνεια ρ = Δ ἐπιφανείᾳ τȣ̃ κύκλȣ, ȣ̃ διάμετ. κτ.

103. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Τῆς ἐλλείψεως ἀγαγεῖν ἁπτομένην κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον Μ (σχ. 83).

ΛΥΣΙΣ. Ἐπὶ τῆς εΜ προαχθείσης εἰλήφθω ΜΡ = ΕΜ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΡ· φημὶ δὴ ὡς ἡ εὐθεῖα ΤΜΧ, ἡ δίχα τέμνȣσα τὴν ΕΡ, ἔςιν, ἣν ζητȣ̃μεν, ἡ ἁπτομένη· ἐπεὶ γὰρ ΕΜ = ΜΡ, ἡ ΤΧ, ἡ δίχα τέμνȣσα τὴν ΕΡ, κάθετος αὐτῇ ἐπιςήσεται (Γεωμ. 164, 217)· ȣ̓κȣ̃ν ΟΕ = ΟΡ.

Ἐὰν ȣ̃ν ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΤΧ ἕτερον σημεῖον παρὰ τὸ

Μ. τὸ Ο φέρε, φημὶ δὴ, ὡς τῦτο ἐκ ἔςαι ἐπὶ τῆς καμπύλης· ϗ γὰρ εΡ = εΜ + ΜΕ (ἐκ κατασκευῆς) = Ηη (84)· ἀλλ' εΟ + ΟΕ = εΟΡ > εΡ (Γεωμ. 17), ϗ δὴ μείζων τῆς Ηη· ἄρα (84) Ο ἐκ ἂν εἴη ἐπὶ τῆς καμπύλης. Ο. Ε. Δ.

104. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ γωνίαι ΕΜΤ, εΜΧ, αἱ περιεχόμεναι ἐπὶ τῆς ἁπτομένης ὑπὸ δύω ὀρθίων πλευρῶν εΜ, ΕΜ, εἰσὶν ἴσαι· ϗ γὰρ ΕΜΤ = ΤΜΡ (Γεωμ. 217), ϗ ΤΜΡ = εΜΧ (Γεωμ. 99)· ἄρα ΕΜΤ = εΜΧ.

105. Ἐπεὶ τοίνυν ἡ γωνία τῆς ἀνακλάσεως ἴση ἐςὶ τῇ τῆς ἐπιπτώσεως, αἱ φωτιςικαὶ ἀκτῖνες, αἱ ἐκ τῆς ἑςίας Ε ἐπὶ τὸ περιφερὲς τῆς ἐλλείψεως προσβάλλυσαι, ἀνακλασθήσονται πρὸς τὴν ἑτέραν ἑςίαν ε· ἐντεῦθεν ἄρα...

106. α΄. Ἐὰν τῷ Ε ςομίῳ (σχ. 84) παραβολικῆς σάλπιγγος (37) ἐφαρμοσθῇ τὸ ἐλλειψοειδὲς ΙεΠΕ, ὃ ἡ μὲν τῶν ἑςιῶν συμπίπτει τῇ τῦ παραβολοειδῦς ἑςίᾳ Ε, ἡ δ' ἑτέρα ε κεῖται ἐν τῷ τόπῳ, ἔνθα γενέσθαι δεῖ τὴν φωνὴν, αἱ ἠχητικαὶ ἀκτῖνες ἀποχωρῦσαι ἐκ τῦ ε συναφθήσονται κατὰ τὸ Ε, κἀκ τῦτυ πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς παραβολικῆς σάλπιγγος προσπίπτυσαι, παραλλήλως τῷ ἄξονι χωρήσυσι· αὕτη τοίνυν ἡ σάλπιγξ αἱρετωτέρα ἐςὶ τῆς περὶ ἧς εἴρηται (37)· αἱ γὰρ φωναὶ αἱ ἐν τῷ ἐλλειπτικῷ ςερεῷ γενόμεναι, πρὸς τὸ Ε ἀθροιζόμεναι πᾶσαι, ἰσχυρότερον προχέονται τῆς σάλπιγγος, ϗ ἀκυςότεραι καθίςανται.

107. β΄. Ἐὰν κατὰ τὸ ε ἀποτμηθῇ τὸ ἐλλειψοειδὲς ΕΜε (σχ. 85), ὡς πίπτειν τὸ ε ἐκτὸς τῦ καταλοίπυ ἐλλειψοειδῦς, ἐφ' ἧς ἂν βυλώμεθα ὕλης, λαμπάδος τῆς ἐν τῷ Ε ἐπιτεθείσης, πᾶσαι αἱ φωτιςικαὶ ἀκτῖνες κατὰ τὸ ε συναφθήσονται, ϗ πάντα τὰ ἐκεῖθι ἐλάχιςα μόρια ὁρα-

θήσονται· οἱ τοίνυν ἀσχολέμενοι περὶ τὰ ἐλάχιστα μόρια, χρήσαιντ' ἂν τῷ ἐλλειψοειδεῖ τέτῳ ὡς λαμπάδι φωτισικωτάτῃ.

108. γ'. Ἐὰν ἡ θαλάμε τινὸς στοὰ ἐλλειψοειδὴς ᾖ ὡς ΕεΜ· καί τις ἐν τῷ Ε λαλῶν ἥσυχον προΐηται τὴν φωνήν· ἕτερος ἐν τῷ ε καθήμενος ἐπακέσαι αὐτῦ δυνήσεται, ϗ τἀνάπαλιν, καίτοι τῶν μεταξὺ καθημένων πρὸς τῷ Κ ἐπαΐειν αὐτῶν μὴ δυναμένων· αἱ γὰρ ἠχητικαὶ ἀκτῖνες ἐκ τῦ Ε ἀποχωρῦσαι, ϗ ἀνακλώμεναι ἐκ τῆς τῦ ἐλλειψοειδῦς κοιλότητος, συνάπτονται πᾶσαι κατὰ τὸ ε, ϗ ἀνάπαλιν.

109. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. Ὁ τῆς ὑποκαθέτε τύπος ἐστὶ

$$\Pi\Upsilon = \frac{\beta^2 \chi}{\alpha^2} \ (\S.\ 83).$$

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΜΥ παράλληλος τῇ ΡΕ (Γεωμ. 137), ἐστὶ (Γεωμ. 318) εΡ $= 2\alpha$ (103 ἐν τῇ δείξει) : εΕ $=$ 2κ : : ΜΡ $=$ ΕΜ (ἐκ κατασκευῆς) $= \alpha - \frac{\kappa\chi}{\alpha}$ (100) $=$ $\frac{\alpha^2 - \kappa\chi}{\alpha}$: ΕΥ $= 2\kappa \times \frac{\alpha^2 - \kappa\chi}{\alpha} : 2\alpha = \frac{2\alpha^2\kappa - 2\kappa\chi}{2\alpha^2}$ $= \frac{\alpha^2\kappa - \kappa\chi}{\alpha^2}$ (Α)· τῆς Α δὲ δυνάμεως ἀφῃρήσθω $\kappa - \chi$, εἴτ' ἒν $\frac{\alpha^2\kappa - \alpha^2\chi}{\alpha^2}$· ϗ δὴ ἔσαι ΕΥ — ΕΠ $=$ ΠΥ $=$

$$\frac{\alpha^2\kappa - \kappa^2\chi - \alpha^2\kappa + \alpha^2\chi}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2\chi - \kappa^2\chi}{\alpha^2} = \frac{(\alpha^2 - \kappa^2)\chi}{\alpha^2}$$

ἀλλὰ $\alpha^2 - \kappa^2 = \beta^2$ (89)· ἄρα $\Pi\Upsilon = \frac{\beta^2\chi}{\alpha^2}$. Ο. Ε. Δ.

110. ΘΕΩΡΗΜΑ Η΄. Ἡ ὑφαπτομένη ἐςὶ ΤΠ $= \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΜΤΥ (19), διὰ τὴν πρὸς ὀρθὰς τῇ ὑποτεινέσῃ ΤΥ ἱςαμένην ΜΤ (7), ἐςὶ ΠΥ $= \frac{\beta^2 \chi}{\alpha^2}$: ΠΜ $= \upsilon$: : ΠΜ $= \upsilon$: ΤΠ (Γεωμ. 341) $= \upsilon^2 : \frac{\beta^2 \chi}{\alpha^2} = \upsilon^2 \times \frac{\alpha^2}{\beta^2 \chi}$· ἀλλὰ $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 - \beta^2 \chi^2}{\alpha^2}$ (91)· ἄρα ΤΠ $= \frac{\alpha^2 \beta^2 - \beta^2 \chi^2}{\alpha^2} \times \frac{\alpha^2}{\beta^2 \chi} = \frac{\alpha^4 \beta^2 - \alpha^2 \beta^2 \chi^2}{\alpha^2 \beta^2 \chi} = \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$. Ο. Ε. Δ.

111. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ ΠΤ $= \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$ ὑποτεθῇ $\chi = 0$, ἔςαι ΠΤ $= \frac{\alpha^2}{0} = \infty$ (Συμβ. Λογ. 539)· ἐκεῖν ἡ κατὰ τὸ πέρας τῦ ἐλάσσονος ἄξονος τῆς ἐλλείψεως ἁπτομένη ἄπειρός ἐςι, ϗ τῷ μείζονι ἄξονι παράλληλος· τιθεμένης δὲ λειπτικῆς τῆς χ, ϗ ἡ ΠΤ καθίςαται λειπτική· ὃ δὴ τεκμήριον ὑπάρχει σαφὲς τῦ πᾶσαν ποσότητα ἐξ ὑπάρξεως ἐπὶ λεῖψιν μεταβαίνυσαν, νῦν μὲν διήκειν διὰ τῦ ἀπείρυ, νῦν δὲ διὰ τῦ μηδενὸς, ὡς καταφαίνεται ἐν τῇ ἀριθμητικῇ προόδῳ ÷ 4. 2. 0. — 2. — 4 κτ.· ὁ δὲ τύτυ λόγος, ὅτι ποσότης ἐξ ὑπάρξεως ἐπὶ λεῖψιν μεταβαίνυσα ὀφείλει εὑρίσκεσθαι ἐν ὅρῳ, ὃς μὴ μᾶλλον εἴη ὑπαρκτικὸς, ἢ λειπτικός· ἀλλὰ τό,τε μηδὲν ϗ τὸ ἄπειρον ὐδὲν μᾶλλόν εἰσι λειπτικὰ, ἢ ὑπαρκτικά· ποσότης μέντοι ἡ $\sqrt{\alpha - \chi}$ ὐδύναται ἐκ πραγματικῆς γενέσθαι ἀνύπαρκτος, ὅτε μὴν ἐξ ἀνυπ-

ἀρκτȣ πραγματικὴ, εἰ μὴ ἡ α — χ ποσότης, ἐκείνως μὲν ἐξ ὑπαρκτικῆς λειπτικὴ, ȣ̈τω δὲ ἐκ λειπτικῆς ὑπαρκτικὴ γένοιτο· ποσότης ἄρα πᾶσα ἐκ πραγματικῆς ἀνύπαρκτος, ἢ ἐξ ἀνυπάρκτȣ πραγματικὴ γενέσθαι ȣ̓ δύναται· εἰ μὴ διέλθοι διὰ 0, ἢ διὰ ∞· ὅπερ ἀκριβῶς ἐςὶ σημειωτέον.

112. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄρα ΚΤ ἀπόςημα τȣ̃ κέντρȣ ἀπὸ τȣ̃ σημείȣ, καθ' ὃ ἡ ἀπτομένη συμβάλλει τῷ ἄξονι, ἐςὶν $= \frac{\alpha^2}{\chi}$· ϗ γὰρ ΚΤ = ΤΠ + ΠΚ $= \frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi} + \chi$ $= \frac{\alpha^2 - \chi^2 + \chi^2}{\chi} = \frac{\alpha^2}{\chi}$.

113. Ὥςε α'. χ : α :: α : ΚΤ (Συμϐ. Λογ. 406), τȣτέςιν „ἡ ΚΤ τρίτη ἀνάλογός ἐςι πρὸς τὴν ἀποτετμημένην, ϗ τὸν μείζονα ἡμιάξονα.“

114. β'. Μιᾶς ἀποτετμημένης, ϗ τȣ̃ ἡμιάξονος ΗΚ, δοθέντων, εὑρεθήσεται ἡ ΚΤ τρίτη ἀνάλογος ȣ̓̃σα τῶν δύω προτέρων· εὑρεθήσεται δὲ ϗ ἡ ὑφαπτομένη ΤΠ, ἀφαιρεθείσης τῆς χ = ΠΚ ἀπὸ τῆς ΚΤ τῆς ἤδη εὑρημένης.

115. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐξίσωσιν εὑρεῖν τῆς ἐν τῇ ἐλλείψει κυρτότητος, ἀναφερομένην εἰς τὴν κατὰ κορυφὴν αὐτῆς ἀπτομένην, ϗ τῷ ἄξονι κάθετον ΗΝ (σχ. 76).

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ΗΝ = χ, ϗ ΝΜ = υ = ΗΔ· ȣ̓κȣ̃ν Δη = 2α — υ· ϗ ΗΔ × Δη $= \overline{2\alpha - \upsilon} \times \upsilon = 2\alpha\upsilon - \upsilon\upsilon$· ἐπεὶ δὲ ΔΜ² = ΗΝ² : ΗΔ × Δη :: $\beta^2 : \alpha^2$ (90)· ἄρα $\chi^2 : 2\alpha\upsilon - \upsilon\upsilon :: \beta^2 : \alpha^2$· ϗ δὴ $\chi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot (2\alpha\upsilon - \upsilon\upsilon)$. Ο. Ε. Π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ διαμέτρων τῆς ἐλλείψεως.

116. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Πᾶσα διάμετρος ΜΜ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Κέντρον (σχ. 86).

ΔΕΙΞΙΣ. Τετάχθω ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ ΜΕ, ϗ ἔςω ΚΔ = ΚΕ· ϗ δὴ ἴσα ἔςαι τὰ τρίγωνα ΚΕΜ, ΚΔΜ· παρὰ γὰρ τὰς ὀρθὰς γωνίας Ε, Δ, εἰσὶν ἴσαι ϗ αἱ ο; τ ὡς κατὰ κορυφήν· πᾶσαι ἄρα αἱ ἀντίςοιχοι γωνίαι εἰσὶν ἴσαι· τὰ δύω ἄρα τρίγωνα, ἔχοντα ϗ μίαν πλευρὰν ἴσην τὴν πρὸς δυσὶν ἴσαις γωνίαις, εἰσὶν ἴσα· ἄρα ΜΕ = ΔΜ, ϗ ΚΜ = ΚΜ· ἀλλ' ἡ ΜΕ τεταγμένη ἀπέχει τȢ͂ κέντρȢ, ὅσον ϗ ἡ ΜΔ· ἄρα ΜΔ (81) ἔςι ϗ αὕτη τεταγμένη· ἄρα τὸ Μ σημεῖον, πέρας τῆς ΜΔ ϗ δὴ ϗ τῆς ΚΜ, ἔςιν ἐν τῇ καμπύλῃ· ἄρα ΚΜ = ΚΜ ἔςιν ἀληθὲς μέρος τῆς διαμέτρȢ, κείμενον μεταξὺ τȢ͂ κέντρȢ καὶ τῆς καμπύλης. Ο. Ε. Δ.

117. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἐὰν ἀπὸ τῶν περάτων δύω δεδομένων συζυγῶν διαμέτρων (σχ. 85) τῶν ΜΜ, Μ'Μ'' τεταγμένως ἀχθῶσιν ἐπὶ τὸν ἄξονα αἱ ΕΜ, Μ'Π τὸ ΚΕ² τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τȢ͂ ἀποςήματος τȢ͂ κέντρȢ ἀπὸ τεταγμένης, ἴσον ἐςὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἀπςτετμημένων ὑπὸ τῆς ἑτέρας τεταγμένης, εἴτ' Ȣ͂ν τῷ ΠΗ × Πη.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω ΚΕ = ρ· ὅθεν Εη = $\alpha - \rho$, καὶ ΗΕ = $\alpha + \rho$, ϗ ΕΗ × Εη = $\alpha^2 - \rho^2$· ἐν Ȣ͂ν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΤΠΜ, ΚΕΜ ἔςι ΠΜ' : ΕΜ :: ΤΠ : ΚΕ·

$\Pi M'^2 : EM^2 :: T\Pi^2 = \dfrac{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^4}{\chi^2}$ (110):

$KE^2 = \varrho^2$.

Α'λλὰ $\Pi M'^2 : EM^2 :: H\Pi \times \Pi\eta = \alpha^2 - \chi^2 : EH \times E\eta = \alpha^2 - \varrho^2$ (94)· ἄρα (Γεωμ. 327) $\dfrac{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^4}{\chi^2} : \varrho^2 :: \alpha^2 - \chi^2 : \alpha^2 - \varrho^2$· ἄρα (Συμϐ. Λογ. 238) $\dfrac{\alpha^6 - 2\alpha^4\chi^2 + \alpha^2\chi^4 - \alpha^4\varrho^2 + 2\alpha^2\varrho^2\chi^2 - \varrho^2\chi^4}{\chi^2} = \alpha^2\varrho^2 - \varrho^2\chi^2$· ἀπαλλαγῇ τȣ̃ κλάσματος, $\alpha^6 - 2\alpha^4\chi^2 + \alpha^2\chi^4 - \alpha^4\varrho^2 + 2\alpha^2\varrho^2\chi^2 - \varrho^2\chi^4 = \alpha^2\varrho^2\chi^2 - \varrho^2\chi^4$· μεταθέσει δὲ τῶν ὅρων $\alpha^4\varrho^2$, $2\alpha^2\varrho^2\chi^2$, $-\varrho^2\chi^4$, ϗ ἀναγωγῇ, $\alpha^6 - 2\alpha^4\chi^2 + \alpha^2\chi^4 = \alpha^4\varrho^2 - \alpha^2\varrho^2\chi^2$· διαιρέσει διὰ α^2, $\alpha^4 - 2\alpha^2\chi + \alpha\chi^4 = \alpha^2\varrho^2 - \varrho^2\chi^2\alpha$ (P)· ἐπεὶ δὲ τὸ δεύτερον μέλος τῆς P ἐξισώσεως ἀνασκοπȣμένοις εὑρίσκεται γινόμενον ὑπὸ δύω παραγόντων ϱ^2, $\alpha^2 - \chi^2$, διαιρέσει διὰ $\alpha^2 - \chi^2$, ἔςαι $\varrho^2 = \alpha^2 - \chi^2$, εἴτ' ȣ̃ν $KE^2 = \Pi H \times \Pi\eta$. Ο.Ε.Δ.

118. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ε'πεὶ ȣ̃ν πρὸς τὸ δοκȣ̃ν εἴληπται τὸ ΚΕ ἀπόςημα τȣ̃ κέντρȣ ἀπὸ τῆς ἀποτετμημένης ΕΜ, ϗ τὸ αὐτȣ̃ τετράγωνον KE^2 ἴσον δέδεικται τῷ περιεχομένῳ ἐκ τῶν ἀποτετμημένων ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΠΜ΄, ἐὰν ληφθῇ τὸ ΚΠ ἀπόςημα τȣ̃ κέντρȣ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ΠΜ΄, ἔςαι $K\Pi^2 = EH \times E\eta$.

119. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Α'λλὰ γὰρ τεταγμένης τῆς ΕΜ, ἔςι $KE = \chi$, $KE^2 = \chi^2$· ὡσαύτως τεταγμένης τῆς ΚΠ, ἔςι $\Pi M' = X$, ϗ $K\Pi^2 = X^2$· ἐπεὶ ȣ̃ν $KE^2 = \chi^2 = \Pi H \times \Pi\eta$, ἡ ἀποτετμημένη $KE = \chi$ ὑπὸ τεταγμένης τῆς ΕΜ ἔσεται μέση ἀνάλογος τῆς ἀποτετμη-

μένης, ϗ τῆς συναποτετμημένης ὑπὸ τῆς ἑτέρας τεταγμένης ΠΜ'· ἔστι ϗ γὰρ ΠΗ : χ :: χ : Πη (Συμβ. Λογ. 299)

120. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Τὸ ἀφ' ὁποιασοῦν τεταγμένης δΙ (σχ. 85) ἐπὶ τὴν Μ'Μ'' διάμετρον τετράγωνον ἔστι πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένων ΜΙ' × ΙΜ'' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἡμιδιαμέτρου ΚΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἡμιδιαμέτρου ΚΜ, εἴτ' οὖν $\delta I^2 : M'I \times IM'' :: KM^2 : KM'^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. α'. Τετάχθωσαν ἐπὶ τὸν ἄξονα αἱ Μ'Π, δΠ', ΜΔ, ΜΕ, ϗ ἤχθωσαν αἱ κάθετοι Ιο, ΑΓ.

β'. Ἔστω ΠΚ $= \chi$, ϗ ΚΜ $= \nu$, ϗ Κο $= \eta$, ϗ οΠ $=$ ΑΙ $= \Xi$· ὅθεν ηΠ $= \Xi + \alpha - \eta$, ϗ ΗΠ' $= \alpha - \Xi - \eta$, ϗ δὴ ηΠ' × ΗΠ' $= \alpha^2 - \Xi^2 - 2\Xi\eta - \eta^2$.

γ'. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΤΠΜ', ΙδΑ (Γεωμ. 220) ἔστι ΤΠ $= \dfrac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$ (110) : ΠΜ' $= \upsilon$:: ΑΙ $=$ Ξ : Αδ $= \dfrac{\Xi\chi\upsilon}{\alpha^2 - \chi^2}$.

δ'. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΚΠΜ', ΚοΙ ἔστι α'· ΚΠ $= \chi$: ΠΜ' $= \upsilon$:: Κο $= \eta$: Ιο $= \dfrac{\upsilon\eta}{\chi}$· β'. ΚΠ $= \chi$: ΚΜ' $= \nu$:: ΚΟ $= \eta$: ΓΙ $= \dfrac{\nu\eta}{\chi}$· ἔστι δὲ καὶ Μ'Ι $= \nu - \dfrac{\nu\eta}{\chi}$, καὶ ΙΜ'' $= \nu + \dfrac{\nu\eta}{\chi}$, ϗ δὴ ἀκολούθως ΙΜ' × ΙΜ'' $=$ $\nu^2 - \dfrac{\nu^2\eta^2}{\chi^2}$.

ε'. Ἔστι παρὰ ταῦτα δΠ' $=$ Αδ ($= \dfrac{\Xi\chi\upsilon}{\alpha^2 - \chi^2}$ + Ιο

$(=\frac{\eta\upsilon}{\chi})$· ἄρα $\delta\Pi'^2 = \frac{\Xi^2\chi^2\upsilon^2}{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^2} + \frac{2\Xi\eta\upsilon^2}{\alpha^2 - \chi^2} + \frac{\eta^2\upsilon^2}{\chi^2}$ (Ρ).

ς΄. Ἔςι δὲ ϗ $\delta\Pi'^2 : \Pi M'^2 = \upsilon^2 :: \eta\Pi' \times \Pi' H = \alpha^2 - \Xi^2 + 2\Xi\eta + \eta^2 : H\Pi \times \eta\Pi = \alpha^2 - \chi^2$ ἄρα $\delta\Pi'^2 = \frac{\alpha^2\upsilon^2 - \Xi^2\upsilon^2 + 2\Xi\eta\upsilon^2 - \eta^2\upsilon^2}{\alpha^2 - \chi^1}$ (Σ).

ζ΄. Παραβαλλομένων ἓν τῶν δύω τῦ $\delta\Pi'^2$ δυνάμεων Ρ, Σ (έ., ς΄.) ἀναφύεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{\Xi^2\chi^2\upsilon^2}{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^4} + \frac{2\Xi\eta\upsilon^2}{\alpha^2 - \chi^2} + \frac{\eta^2\upsilon^2}{\chi^2} = \frac{\alpha^2\upsilon^2 - \Xi^2\upsilon^2 - \eta^2\upsilon^2}{\alpha^2 - \chi^2} + \frac{2\Xi\eta\upsilon^2}{\alpha^2 - \chi^2}$.

ή. Μεταθέσει τῦ $\frac{2\Xi\eta\upsilon^2}{\alpha^2 - \chi^2}$, γίνεται $\frac{\Xi^2\chi^2\upsilon^2}{\alpha^4 - 2\alpha^2\chi^2 + \chi^2} + \frac{\eta^2\upsilon^2}{\chi^2} = \frac{\alpha^2\upsilon^2 - \Xi^2\upsilon^2 - \eta^2\chi^2}{\alpha^2 - \chi^2}$. ἐντεῦθεν ἄρα ἀπαλλαγῇ τῶν κλασμάτων, ϗ μεταθέσει, $\Xi^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2\eta^2}{\chi^2} + \eta^2 - \chi^2$ (Τ).

θ΄. Ἐκ τῆς Τ ἐξισώσεως προελθεῖν δύναται ἡ ἀναλογία, $AI^2 = \Xi^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2\eta^2}{\chi^2} - \eta^2 - \chi : KE^2 = \alpha^2 - \chi^2$ (117) $:: MI \times IM'' = \nu^2 - \frac{\nu^2\eta^2}{\chi^2}$ (δ΄.): $KM'^2 = \nu^2$ (β΄.)· τὸ γὰρ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων, ὡς δῆλον, ἐξισῦται τῷ ἐκ τῶν μέσων.

ι. Τέλος δὲ ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΙΑδ, ΚΕΜ ἔςιν $AI : KE :: \delta I : KM$, ϗ $AI^2 : KE^2 :: \delta I^2 : KM^2$.

Ἐντεῦθεν ἡ δεῖξις· εὕρηται μὲν ἄρτι $AI^2 : KE^2 :: \delta I^2 : KM^2$· ἀλλ' εὕρηται ϗ $AI^2 : KE^2 :: M'I \times IM'' : KM'^2$ (θ'.)· ἄρα $\delta I^2 : KM^2 :: M'I \times IM'' : KM'^2$· ἄρα ϗ $\delta I^2 : M'I \times IM'' :: KM^2 : KM'^2$ (Β) Ο. Ε. Δ.

121. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἔςω $\delta I = \upsilon$, ϗ $KM' = \alpha$, ϗ $KM = \beta$· ὅθεν $M'I = \alpha - \chi$, ϗ $IM'' = \alpha + \chi$· ἡ δὲ Β ἐξίσωσις γενήσεται $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$.

Ἐν τῇ ἐλλείψει ἄρα αἱ δύω συζυγῶν διαμέτρων ἰδιότητες αἱ αὐταί εἰσι ταῖς τῶν δύω ἀξόνων (92), παρ' ὅσον αἱ τεταγμέναι πλαγίως ἴσανται ταῖς διαμέτροις διὰ τὸ ϗ τὰς ἁπτομένας πλαγίας αὐταῖς ἐπικεῖσθαι.

122. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐκ τῆς ἀναλογίας $\upsilon^2 : \alpha^2 - \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ προέρχεται $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 - \chi^2 \beta^2}{\alpha^2}$ ϗ

$$\upsilon = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 \beta^2 - \chi^2 \beta^2}{\alpha^2}},$$

τουτέςιν ἑκάςῃ τεταγμένῃ δΙ ἀντιςοιχεῖ ἑτέρα ἀποφατικὴ ἴση ἡ Ις· β'. ϗ ἀκολούθως πᾶσα διάμετρος δίχα τέμνει τὴν ἐφ' ἑαυτὴν διπλῆν τεταγμένην.

123. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Δυνατὸν ἐπιπεσεῖν τὸ Π τῷ Ε· τηνικαῦτα τοίνυν αἱ ΚΜ, ΚΜ', ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθὰς γωνίας τῶν τριγώνων ΚΠΜ', ΚΕΜ, ἴσαι ἔσονται, εἴτ' οὖν $KM = KM'$, ϗ δὴ $\alpha = \beta$, ἐπὶ οὖν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως τοῦ α ἀντὶ β εἰσαχθέντος, ἔςαι $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2 \alpha^2 - \chi^2 \alpha^2}{\alpha^2} = \alpha^2 - \chi^2$, ὑποτιθεμένων ἀμέλει ἴσων τῶν δύω συζυγῶν διαμέτρων· ἀλλ' ἔςιν ἡ αὐτὴ τῇ

τῦ κύκλε (93)· ἡ αὐτὴ ἄρα ἐξίσωσις, κυκλικὴ μὲν ἐςὶ τῶν τεταγμένων πρὸς ὀθὰς ἐφεςηκυιῶν τῇ διαμέτρῳ· τὐναντίον δὲ, ἐλλειπτική.

124. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐπείπερ ἡ ἁπτομένη ΗΒ παράλληλός ἐςι τῷ ἐλάττονι ἄξονι (σχ. 67) ΜΚΜ″ οἱ δύω ἄξονες εἰσὶ πάντως συζυγεῖς διάμετροι (59)· ἔςιν ἄρα ἡ ἀναλογία „τὸ ἀπὸ τῆς ἐπὶ τὸν ἐλάττονα ἄξονα „τεταγμένης τετράγωνον πρὸς τὸ γινόμενον ἐκ τῶν ὑπ᾽ „αὐτῆς ἀποτετμημένων ἔςιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῦ μείζονος ἡ„μιάξονος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος“· ἐν τῇ ἐλλείψει ἄρα ἰδιότητες εὑρίσκονται αἱ αὐταὶ, εἴτε ὁ μείζων, εἴτε ὁ ἐλάσσων ἄξων ληφθῇ (90).

125. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Εἰς δὲ πλείω τῶν λεγομένων ἐμπέδωσιν, κείσθω εὑρεῖν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσιν περιέχυσαν τεταγμένας ἐπὶ τὸν δεύτερον ἄξονα, καὶ ἀποτετμημένας ἀπ᾽ αὐτῦ πρὸς τῷ κέντρῳ· ἐπεὶ τοίνυν (σχ. 87) $\mu\pi = \mathrm{K\Pi} = \chi$, καὶ $\mathrm{K}\pi = \Pi\mu = \upsilon$, ἀπόχρη μόνον μεταβαλεῖν τὴν υ εἰς χ, καὶ τὐναντίον· ὅθεν προκύψει $\chi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \times \overline{\alpha^2 - \upsilon^2}$, ἐξίσωσις ἡ ζητυμένη· ἐκ ταύτης δὲ γίνεται $\chi^2 \times \alpha^2 = \beta^2 \times \alpha^2 - \upsilon^2 \times \beta^2$, μεταθέσει, $\upsilon^2 \times \beta^2 = \beta^2 \times \alpha^2 - \chi^2 \times \alpha^2$, ὅθεν $\upsilon^2 : \beta^2 - \chi^2 :: \alpha^2 : \beta^2$, καὶ $\upsilon^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \times \overline{\beta^2 - \chi^2}$· δῆλον ἄρα, ὅτι ἀληθής ἐςιν ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα ἀναλογία (124).

126. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἡ τῦ δευτέρυ ἄξονος ὑφαπτομένη ΠΤ ἔςιν $= \frac{\beta^2 - \upsilon^2}{\upsilon}$, κληθείσης υ τῆς ἀ-

πὸ τῦ δευτέρυ ἄξονος ἀποτετμημένης Κπ· ὁμοίων γὰρ ὄντων τῶν τριγώνων τμΠ, μΤπ, ἔςι τΠ : Πμ = πΚ :: μπ = ΠΚ : πΤ, τῦτ' ἔςιν $\frac{\alpha^2 - \chi^2}{\chi}$ (110) : υ :: χ : πΤ $= \frac{\chi^2 \upsilon}{\alpha^2 - \chi^2}$ · ἀλλ' ἔςιν $\alpha^2 - \chi^2 = \frac{\alpha^2 \upsilon^2}{\beta}$, ὡς ῥᾷςα συνάγεται ἐκ τῆς κατὰ τὴν ἔλλειψιν ἐξισώσεως $\frac{\beta^2}{\alpha^2} \times (\alpha^2 - \chi^2) = \upsilon^2$, ὅθεν ἀποφέρεται καὶ $\chi^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 - \alpha^2 \upsilon^2}{\beta^2}$ · ἀντικαταςάσει ἄρα τῶνδε τῶν δυνάμεων ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\chi^2 \upsilon}{\alpha^2 - \chi^2}$ γίνεται πΤ $= \frac{\beta^2 - \upsilon^2}{\upsilon}$.

127. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον εὑρεθήσεται βυληθεῖσι ϗ ἡ ὑποκάθετος, ϗ αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι, ἐν αἷς ἐμφέρειά τε τῶν τύπων φανήσεται, ὐ μὴν ἀλλὰ ϗ ταυτότης πρός γε τὰς χέσεις, ὡς περιεργότερον ἐπιςήσασι δῆλον καθίςαται.

128. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Δέδεικται δὲ ὡς τὸ ἀπόςημα τῦ κέντρυ ἀπὸ τῦ σημείυ, καθ' ὃ ὁ μείζων ἄξων συμβάλλει τῇ ἁπτομένῃ, τῇ ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ἐπὶ τὸν μείζονα ἄξονα τεταγμένης ἀχθείσῃ, ἔςι τρίτη ἀνάλογος πρὸς τὴν ἀποτετμημένην ὑπ' αὐτῆς τῆς τεταγμένης ϗ πρὸς τὸν μείζονα ἡμιάξονα, εἴτ' ὖν χ : α :: α : ΚΤ (113)· ταὐτὸν ἄρα δειχθήσεται (τῶν ἰδιοτήτων ὡς εἴρηται ταυτιζομένων) κἀπὶ τεταγμένης ἐπὶ τὸν ἐλάττω ἄξονα, ἢ ϗ πᾶσαν διάμετρον· ἔςω ὖν (σχ. 88) ἡ ἡμιδιάμετρος ΚΙ = α, ϗ ἡ ὑπὸ τῆς τεταγμένης ΔΧ ἀποτετμημένη

ΚΔ = χ· ϗ γινομένης ΚΤ ἐνταῦθα τῆς ΚΗ, ἔςαι ΚΔ = χ : ΚΙ = α : : ΚΙ = α : ΚΗ.

129. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἐν ἐλλείψει τὸ ὑπὸ δύω συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων ΚΙ, ΚΜ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΚΙΒΜ ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἡμιαξόνων ΚΧ, ΟΡ.

ΔΕΙΞΙΣ. ά. Ἤχθω ἡ ΜΧ, ϗ ἐςάθω κάθετος ἡ ΠΜ, ϗ διὰ τῦ Χ ἤχθω ΕΔ παραλλήλως τῇ ΚΜ, ϗ δὴ ἔςαι ἴσα τὰ παραλληλόγραμμα ΚΔΕΜ, ΑΧΠΚ τὸ γὰρ τρίγωνον $KMX = \frac{K\Delta EM}{2}$, διὰ τὴν αὐτὴν βάσιν ΚΜ, ϗ τὸ αὐτὸ ὕψος (τὸ ἀπὸ τῦ κέντρυ ἀπόςημα τῶν δύω παραλλήλων ΚΜ, ΔΕ)· ἔςι δὲ ϗ $KMX = \frac{KXA\Pi}{2}$, διὰ τὴν αὐτὴν βάσιν ΚΙΧ, ϗ τὰς δύω παραλλήλυς ΑΠ, ΚΧ· ἄρα (Συμϐ. Λογ. 234) ΚΔΕΜ = ΚΧΑΠ.

β΄. Παρὰ δὲ ταῦτα ά. τὰ παραλληλόγραμμα ΚΔΕΜ, ΚΙΒΜ, ΚΗηΤ, ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὕψος, ϗ κείμενα μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΚΗ, ΒΤ, ἔσονται ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις ΚΔ, ΚΙ, ΚΗ (Γεωμ. 290)· ἀλλ᾽ ἔςι ΚΔ : ΚΙ : : ΚΙ : ΚΗ (128)· ἄρα ΚΔΕΜ : ΚΙΒΜ : : ΚΙΒΜ : ΚΗηΤ. (Α) β΄. τὰ παραλληλόγραμμα ΚΧΑΠ, ΚΧΟΡ, ΚΗηΤ διὰ τὰς παραλλήλυς ΗΟ, ΚΤ εἰσὶν ὡς αἱ αὐτῶν βάσεις ΚΠ, ΚΡ, ΚΤ· ἐπεὶ ἦν ΚΠ : ΚΡ : : ΚΡ : ΚΤ (128), ἄρα ΚΧΑΠ : ΚΧΟΡ : : ΚΧΟΡ : ΚΗηΤ (Β).

Ἀλλ᾽ ἐν ταῖς δυσὶ συνεχέσιν ἀναλογίαις Α, Β ἑκάτερον ἄκρον τῆς ἑτέρας ἰσῦται ἑκατέρῳ ἄκρῳ τῆς ἑτέρας· εἴγε ΚΔΕΜ = ΚΧΑΠ (ά.)· ἄρα ϗ τὸ μέσον ἰσῦται τῷ μέσῳ, εἴτ᾽ ὖν ΚΙΒΜ = ΚΧΟΡ. Ο. Ε. Δ.

130. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἀλλὰ τὸ μὲν παραλληλόγραμ-

μον ΚΙΒΜ ἴσȣται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ΚΙ, ϗ τῆς καθέτȣ ΕΜ (Γεωμ. 282), τὸ δ᾽ ὀρθογώνιον ΚΧΟΡ = ΚΧ (= α) × ΚΡ (= β), ἄρα ΚΙ × ΕΜ = α × β τȣτέςι „ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς καθέτȣ ΕΜ, τῆς ἀγομέ„νης ἀπὸ τȣ̃ πέρατος διαμέτρȣ ἐπὶ τὴν αὐτῆς συζυγῆ, „ ϗ ὑπ᾽ αὐτῆς τῆς συζυγȣ̃ς ἡμιδιαμέτρȣ, ἴσον ἐςὶ τῷ πε„ριεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἡμιαξόνων.“

131. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἐλλείψεως δοθείσης τῆς ΑΒΓΔ, εὑρεῖν τὸ κέντρον ϗ τȣ̀ς ἄξονας ϗ τὰς ἑςίας αὐτῆς (Σχ. 89).

ΛΥΣΙΣ. α΄. Ἤχθωσαν παραλλήλως δύω χορδαὶ αἱ ΑΒ, δζ, ϗ τετμήσθωσαν δίχα, ϗ διὰ τῶν μέσων σημείων ο, υ διήχθω εὐθεῖα ἡ θη, ἥτις ἔςαι μία τῶν διαμέτρων (122)· τὸ δὲ μέσον αὐτῆς χ ἔςαι κέντρον τῆς ἐλλείψεως. β΄. κέντρῳ μὲν τῷ χ, διαςήματι δὲ τῷ θχ, γεγράφθω κύκλος, ὅστις, ἤτοι ȣ̓ μὴ τεμεῖ ὅλως τὴν ἔλλειψιν· ϗ δὴ τότε ἡ διάμετρος ἔςαι ϗ ἄξων ΑΓ· ἢ τεμεῖ κατὰ τέσσαρα σημεῖα α, θ, ι, λ, ἰσοδιεςῶτα τῶν κορυφῶν Α, Γ (81)· ϗ δὴ ἐπεζεύχθω ἡ ιλ, ἣν δίχα τεμνέτω ἡ κάθετος ΑχΓ, ἥτις ἔςαι ὁ μείζων ἄξων (81)· ἡ δὲ κάθετος ΒχΔ ἀπὸ τȣ̃ χ ἀχθεῖσα ἔςαι ὁ ἐλάττων· τέλος δὲ τὸ ἥμισυ χΓ τȣ̃ μείζονος ἄξονος, ἀπὸ τȣ̃ Β πέρατος τȣ̃ ἐλάττονος ἄξονος μετενεχθὲν ἐπὶ τὸν μείζονα, ἐκδηλώσει τὰς δύω ἑςίας Ε, ε (87) Ο. Ε. Π.

132. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως.

ΛΥΣΙΣ. α΄. Ζητηθήτω ἡ ἐπιφάνεια κύκλȣ, ȣ̃ ἐςὶ διάμετρος ὁ τῆς ἐλλείψεως μείζων ἄξων ΑΚ (Γεωμ. 268, 370)· β΄. γενέσθω μέθοδος τῶν τριῶν· ΑΓ : ΒΔ,

ὡς τὸ εὑρεθὲν κυκλικὸν ἐμβαδὸν πρὸς τὸ ζητέμενον ἐμβαδὸν τῆς ἐλλείψεως (101).

Η῝ ζητηθείσης μέσης ἀναλόγου τῶν ΑΚ, ΒΔ, κύκλος ὁ διαμέτρῳ τῇ μέσῃ ἀναλόγῳ γραφεὶς ἔςαι ἴσος τῇ ἐλλείψει (102).

133. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Εὑρεῖν τὴν ςερεότητα τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος (σχ. 82).

ΛΥΣΙΣ. Ἐπινενοήσθωσαν ἥτε ἡμίσεια ἔλλειψις ΗηΜ΄, ϗ τὸ ἡμικύκλιον ΗηΒ, περιενεχθέντα ἅπαξ περὶ τὴν Ηη· ἐκεῖν ἡ μὲν ἡμίσεια ἔλλειψις κωνοΐδα, τὸ δ᾽ ἡμικύκλιον σφαῖραν ἀπογεννήσεσι· ςοιχεῖα δ᾽ αὐτῶν ἔσονται οἱ κύκλοι, οἱ καταγραφόμενοι διάτε τῶν ἐν τῇ ἐλλείψει τεταγμένων ΠΜ΄, ΠΜ΄, ϗ διὰ τῶν ἐν τῷ κύκλῳ Π΄Β, Πβ.

α΄. Οὖν αἱ τεταγμέναι ΠΜ΄ τῆς ἐλλείψεως ἔσονται πρὸς τὰς τε κύκλε Π΄Β :: ΠΜ΄ = β : Π΄Η = α (101) κληθείσης ἒν ἐν τῇ ἐλλείψει τῆς Π΄Μ΄ = υ ϗ τῆς Π΄Β = Υ τῆς ἐν τῷ κύκλῳ ἀντιςοιχέσης· ἔςαι $υ : Υ :: β : α$· ϗ δὴ $υ^2 : Υ^2 :: β^2 : α^2$.

β΄. Κύλινδρος ὁ τῇ ἐλλείψει περιγεγραμμένος, ἒ τὸ ἥμισυ = ΚΔΗη πρὸς κύλινδρον τὸν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένον, ἒ τὸ ἥμισυ = ΑΗΡη, ὡς ὁ κύκλος, ἒ ἡ ηΔ, ἢ ὁ ἐλάττων ἡμιάξων β, ἐςὶν ἀκτὶς, πρὸς τὸν κύκλον, ἒ ἀκτὶς ηΡ ὁ μείζων ἡμιάξων α· ἔχοντες ϗ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος Ηη οἱ κύλινδροι, ἔσονται ὡς αἱ βάσεις, ἢ οἱ δύω κύκλοι ἔχοντες, ὁ μὲν Δη = β, ὁ δὲ ηΡ = α, ἀκτῖνας (Συμβ. Λογ. 306)· ἀλλ᾽ οἱ δύω κύκλοι εἰσὶν ὡς τὰ τετράγωνα $ηΔ^2 = β^2$, $ηΡ^2 = α^2$ (Γεωμ. 398)· κύλινδρος ἄρα ὁ τῇ ἐλλείψει περιγεγραμμένος πρὸς κύλινδρον τὸν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένον :: $β^2 : α^2$.

γ΄. Ἕκαςος κύκλος γεγραμμένος διὰ μιᾶς ἐν τῇ

ἐλλείψει τεταγμένης υ ὡς ςοιχεῖον τῆς κωνοΐδος πρὸς τὸν ἀντίςοιχον κύκλον τὸν διὰ τῆς Υ τεταγμένης ὡς ςοιχεῖον σφαιρικὸν γεγραμμένον :: $υ^2 : Υ^2$ (Γεωμ. 398)· ἐκεῦν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ςοιχείων τῆς κωνοΐδος πρὸς τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ςοιχείων τῆς σφαίρας, εἴτ᾽ οὖν ἡ κωνοῒς πρὸς τὴν σφαῖραν :: $υ^2 : Υ^2$, καὶ ἑπομένως (133 ἐν τῇ λύσει) :: $β^2 : α^2$· ἐπεὶ τοίνυν ὁ τῇ κωνοΐδι περιγεγραμμένος κύλινδρος πρὸς τὸν τῇ σφαίρᾳ περιγεγραμμένον :: $β^2 : α^2$ (ἀνωτ.)· ἄρα (Γεωμ. 327) ἡ ςερεότης τῆς κωνοΐδος πρὸς τὴν τῆς σφαίρας, ὡς ὁ τῇ κωνοΐδι πρὸς τὸν τῇ σφαῖρᾳ περιγεγραμμένον κύλινδρον.

Ἄρα καὶ ἐναλλάξ· ἡ ςερεότης τῆς κωνοΐδος πρὸς τὸν αὐτῇ περιγεγραμμένον κύλινδρον, ὡς ἡ ςερεότης τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ταύτῃ περιγεγραμμένον κύλινδρον.

134. Ἀλλ᾽ ἡ ςερεότης τῆς σφαίρας ἐςι $\frac{2}{3}$ τοῦ αὐτῇ περιγεγραμμένου κυλίνδρου (Γεωμ. 463)· ἄρα καὶ ἡ ςερεότης τῆς κωνοΐδος ἐςι $\frac{2}{3}$ τοῦ αὐτῇ περιγεγραμμένου κυλίνδρου.

Ἄρα ἡ τῆς κωνοΐδος ςερεότης εὑρεθήσεται ζητηθέντος κυλίνδρου, ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, οὗ ἐςιν ἀκτὶς ὁ ἐλάττων ἡμιάξων Δ΄η, ἢ Π΄Μ΄, ὕψος δὲ τὸν μείζονα ἄξονα Ηη (Γεωμ. 452), καὶ τῆς αὐτοῦ ςερεότητος $\frac{2}{3}$ ληφθέντων. Ο. Ε. Π.

135. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὁ ἄρα τῆς ἐλλειπτικῆς κωνοΐδος, καθὰ δὴ καὶ τῆς παραβολικῆς (73), κυβισμὸς τοῦ κατὰ τὸν κύκλον τετραγωνισμοῦ ἐξήρτηται· ἀμήχανον γὰρ ἄλλως αὐτῶν εὑρεῖν τὴν ςερεότητα, πρὶν ἢ τοὺς πολλαπλασιαςέους κύκλους τετραγωνίσαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τῆς ἐν τοῖς ὀπτικοῖς χρήσεως τῶν τῆς ἐλλείψεως ἰδιοτήτων.

136. Ὅταν τὸ φῶς ἀπὸ μέσȣ διαφόρȣ ἐπὶ μέσον διάφορον πλαγίως ἐμβάλλῃ, ἀπ' ἀέρος φέρ' εἰπεῖν εἰς ὕελον, ἀφίςαται τῆς οἰκείας φορᾶς, θραυνόμενον, ὡς λέγειν εἰώθασι· ἡ δ' ἐπιςήμη, ἡ περὶ ταύτην τὴν τȣ͂ φωτὸς θραῦσιν ἀσχολȣμένη, καλεῖται Διοπτρική, περὶ ἧς ἡμῖν εἰρήσεται ὕςερον.

137. Ἔςω εὐθεῖα ἡ ΕΜΔ (σχ. 90) κάθετος τῇ ΒΤ ἐπιφανείᾳ τȣ͂ μέσȣ ΗΜη κατὰ τὸ σημεῖον Μ, ἔνθα εἰσδύει φωτοφυὴς ἀκτὶς ἡ ΠΜ· καλεῖται ἐν γωνία ἐπιπτώσεως ἡ ὑπὸ ΠΜΔ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς καθέτȣ ΔΜ ϗ τῆς φορᾶς ΠΜ τῆς ἀκτῖνος· γωνία δὲ θραύσεως ἡ ὑπὸ ΖΜΕ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς νέας φορᾶς ΜΕ, καθ' ἣν τῆς προτέρας ἀποχωρεῖ, ϗ τῆς καθέτȣ ΜΕ· διὰ πείρας τοίνυν δεδειγμένα εἰσὶ τὰ ἑξῆς.

138. ά. Ἐὰν φωτοφυὴς ἀκτὶς ἡ ΔΜ διὰ τȣ͂ αὐτȣ͂ μέσȣ διήκῃ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτȣ͂ τȣ͂ μέσȣ, ἐδεμίαν ὑφίςαται θραῦσιν, εἴτ' ȣ͂ν φέρεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἀεὶ ὁδόν.

139. β'. Τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς ἐπιπτώσεως, ϗ τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς θραύσεως, τὸν αὐτὸν ἔχȣσιν ἀεὶ λόγον, τῆς μεταβάσεως ἀπὸ τȣ͂ αὐτȣ͂ ἐπὶ τὸ αὐτὸ τελȣμένης μέσον· ἐὰν φέρε γνωσθῇ ἡ γωνία τῆς θραύσεως, ἣν ὑφίςαται τὸ φῶς, ἀπὸ τȣ͂ ἀέρος μεταπίπτον ἐπὶ

τὴν ὕελον· εἶτα, ἑτέρας ἐπιπτώσεως δοθείσης, δι᾽ ἀναλογίας γνωσθήσεται ἡ οἰκεία αὐτῆς θραῦσις.

140. γ΄. Ο΄ λόγος τῶν ἡμιτόνων τῶν τȣ̃ φωτὸς γωνιῶν, ἀπ᾽ ἀέρος εἰσιόντος ἐς ὕελον, ἔςι σχεδὸν :: 3 : 2, ἀφ᾽ ὑελέȣ δ᾽ ἐπ᾽ ἀέρα :: 2 : 3· τεθείσθωσαν δὲ ἀκριβεῖς οἱ λόγοι ȣ̃τοι.

141. Ε΄ςω ἤδη ἔλλειψις, ἐν ᾗ Ηη : Εε :: 3 : 2, καταγραφομένη προδήλως τῷ ἀποτμηθῆναι εἰς τρία ἰσάλληλα μέρη τὴν εὐθεῖαν Ηη, ἣ ὡς ἄξων μείζων λαμβάνεται, ϗ μετενεχθῆναι ἀφ᾽ ἑκάςȣ πέρατος ἐπ᾽ αὐτὴν τὸ ἑνός τινος τῶνδε τῶν τμημάτων ἥμισυ ΕΗ = εη, εἰς εὕρεσιν τῶν ἑςιῶν τῆς γραφησομένης ἐλλείψεως· τοιγαρȣ̃ν ȣ̃σης Ηη = 3, ϗ εΕ = 2, ἔςαι Ηη : Εε :: 3 : 2· μετὰ ταύτην δὲ τὴν κατασκευὴν φημί.

142. Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες τȣ̃ φωτὸς αἱ παράλληλαι τῷ ἄξονι Ηη, ὡς ἡ ΠΜ, διϊȣ̃σαι διὰ τῆς ἐλλειπτικῆς περιφερείας, συλλεχθήσονται κατὰ τὴν ἑςίαν Ε, τὴν μᾶλλον ἀπέχȣσαν τȣ̃ ἀκτινοβόλȣ σώματος.

Εἰς δέ γε τὴν τȣ́τȣ δεῖξιν, ά. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΕΜ προαχθείσης ΜΡ = εΜ· ὅθεν ΕΡ = Ηη (84)· ἡ δὲ κατὰ τὸ Μ ἁπτομένη ΜΤ ἐπιςήσεται πρὸς ὀρθὰς τῇ Ρε εὐθείᾳ (103).

β΄. Ε΄ὰν ἐπὶ τῆς τῇ ἁπτομένῃ ΜΤ καθέτȣ ΔΜ, ληφθῇ ΔΜ = ΕΜ = ΜΤ, ϗ κέντρῳ μὲν τῷ Μ, ἀκτῖνι δὲ τῇ ΜΔ, κύκλος γραφῇ διερχόμενος διὰ Δ, Π, Ε, ἡ κάθετος ΠΙ ἡμίτονον ἔσεται τῆς γωνίας τῆς ἐπιπτώσεως ΠΜΔ, ἡ δὲ κάθετος ΕΖ, ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ΕΜΖ (Γεωμ. 482).

Φημὶ δὴ ὡς ἡ ὑπὸ ΕΜΖ ἔςιν ἡ αὐτὴ τῇ τῆς θραύσεως γωνίᾳ, ἐὰν ἡ τȣ̃ φωτὸς ἀκτὶς ΜΠ διελθȣ̃σα διὰ

Μ φέρηται πρὸς τὸ Ε· ϗ γὰρ ὀρθῶν ἐσῶν τῶν γωνιῶν ΠΙ Μ, ΕΖχ, ϗ τῆς ὑπὸ ΠΜΙ = ΕχΖ (αἱ γὰρ παράλληλοι ΠΜ, Ηη τέμνονται ὑπὸ τῆς ΔΕ εὐθείας), τὰ τρίγωνα ΠΙΜ, ΕχΖ ὅμοιά εἰσι· ϗ δὴ ΠΙ : ΕΖ :: ΠΜ = ΕΜ (ἐκ κατασκευῆς) : Εχ.

Οὐσῶν δὲ παραλλήλων ϗ τῶν Μχ, Ρε ὡς τῇ ΜΤ καθέτων (103) εἰσὶ ϗ τὰ ΕΜχ, ΕΡε τρίγωνα ὅμοια· ϗ δὴ ΕΜ : Εχ :: ΕΡ = Ηη : Εε· ἄρα ΠΙ : ΕΖ :: Ηη : Εε· ἐπεὶ δὲ ἐκ κατασκευῆς Ηη : Εε :: 3 : 2· ἐὰν ἄρα τεθῇ ΠΙ = 3, ἔςαι κατὰ τὸν νόμον τῆς θραύσεως ΖΕ = 2, ἡμίτονον τῆς γωνίας τῆς θραύσεως· ἄρα ἡ γωνία τῆς θραύσεως ΖΜΕ ἔςαι τοιάδε, ὡς τὴν ἀκτῖνα ΠΜ φέρεσθαι πρὸς τὸ Ε. Ο. Ε. Δ.

143. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα ἔλλειψις, ἐν ᾗ ἔςι Ηη : Εε :: 3 : 2 περιενεχθεῖσα ἀπογεννήσῃ ἐλλειπτικὴν κωνοΐδα, πᾶσαι αἱ δι' αὐτῆς διελθȣσαι τȣ φωτὸς ἀκτῖνες, παραλλήλως τῷ ἄξονι ἀναθραυσθεῖσαι, συλλεχθήσονται ἐν τῇ ἑςίᾳ Ε.

144. Ἐὰν τοίνυν ἐν τῇ γεννητρίᾳ ἐλλείψει ΗΟηκ, ἐκ τȣ Ε γραφῇ τόξον κύκλȣ τὸ Μντ, ϗ τὸ σχῆμα Μντη περιαχθῇ περὶ τὴν νη ὡς περὶ ἄξονα, ἀπογεννηθήσεται μέρος τῆς εἰρημένης κωνοΐδος τὸ Μντη, ἐν ᾧ πᾶσαι αἱ τῷ νη ἄξονι παραλλήλως ἐμβάλλȣσαι ἀκτῖνες ΠΜ συλλεχθήσονται κατὰ τὸ Ε σημεῖον, τὸ ἐκτὸς τῆς κωνοΐδος κείμενον· εἰσιȣσαι γὰρ φέρονται πᾶσαι πρὸς τὸ Ε, ὡς ἤδη δέδεικται, ἐξιȣσαι δὲ κατὰ τὰς φορὰς ταύτας ἀκτῖνες καθίςανται τȣ Μντ κύκλȣ, τȣ ἐκ τȣ Ε γραφέντος, ἐξιȣσαι φημὶ καθέτως τῇ κοίλῃ τȣ ἀέρος ἐπιφανείᾳ, ȣδόλως θραυσθήσονται (138), ϗ πᾶσαι τενȣσι πρὸς τὸ Ε.

145. Ἀποκαθίσαται ἄρα τὸ εἰρημένον μέρος, ὑέλινος καυσικὸς φακὸς ἐξαίσιος.

146. Ἵνα μὴ ἡ πυκνότης τῆς ὑέλȣ ἐξαθενίζῃ πάμπαν τὸ φῶς, ληπτέον ὕελον λεπτοτάτην· ὅπερ ἔςαι λαμβανομένης γεννητρίας ἐλλείψεως μεγάλης, ϗ ταύτης τόξȣ λίαν μικρȣ̃ εἰς χρῆσιν τιθεμένȣ.

147. Καὶ τῶν ἑπτὰ δὲ χρωμάτων, ἃ συντιθέασι μίαν τινὰ δέσμην τȣ̃ φωτὸς, διαφόρως θραυομένων ἐπὶ τὴν αὐτὴν τῆς ἐπιπτώσεως γωνίαν, ὡς ἀποδεικνύȣσιν αἱ πεῖραι τȣ̃ ὑελίνȣ τριγωνικȣ̃ πρίσματος, περὶ ȣ̃ ἐρȣ̃μεν, ἐν τῇ διαληφθείσῃ περιπτώσει, ȣ̓ συλλέγονται πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ἀκριβῶς κατὰ τὴν ἑςίαν Ε, ἀλλ' ὡς ἔγγιςα κατ' αὐτήν.

148. Ἔςω σχῆμα ἀποτελȣ̃μενον ἀπὸ τῆς μερίδος Μητ τῆς ἐλλείψεως, ϗ ἀπὸ τȣ̃ Χυ τόξȣ κύκλȣ, τȣ̃ κέντρῳ μὲν τῷ Ε, ἀκτῖνι δὲ μείζονι, ἢ Εη, γεγραμμένȣ, συνημμένων διὰ τῶν εὐθειῶν υΜ, Χτ· φημὶ δὴ, ὡς τȣτὶ τὸ σχῆμα, περινεχθὲν περὶ ἄξονα τὸν ην, ἀπογεννήσει ςερεὸν, οἷον ἅπασαι αἱ τῷ ἄξονι παράλληλοι ἀκτῖνες ΜΟ, εἰσελθȣ̃σαι εἰς τὴν κοιλότητα Μντ, συγκροτήσȣσι, μετὰ τὴν αὐτῶν ἔξοδον ἐκ τȣ̃ ςερεȣ̃ φερόμεναι πρὸς τὸ ψ, ἀποχωρȣ̃σαι ἀλλήλων (131), ὥσπερ εἰ πᾶσαι ἀπὸ τȣ̃ Ε ἐκινήθησαν· ἡ ΟΜ φέρε χωρήσει τὴν φορὰν ΜΡ, προαγωγὴν ȣ̃σαν τῆς ΜΕ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ ἀκτὶς ΜΟ, εἰσιȣ̃σα εἰς τὴν ἐλλειπτικὴν κοιλότητα Μητ κατὰ τὸ Μ, ἀποχωρεῖ τοσȣ̃τον τῆς τῇ καμπύλῃ καθέτȣ ΜΔ, ὅσον ἡ προαγωγὴ αὐτῆς ΜΠ εἰσδύȣσα εἰς τὴν κυρτότητα Μητ, ἀφίςαται τῆς ΜΖ προαγωγῆς τῆς ΔΜ· ϗ γὰρ τῆς κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνίας ΟΜΕ ἴσης ȣ̓́σης τῇ κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνίᾳ ΠΜΔ, ὡς κατὰ κορυφὴν, ἡ τῆς θραύσεως γωνία ΔΜΡ

ἴση ἔσεται τῇ τῆς θραύσεως γωνίᾳ ΕΜΖ (139)· ἄρα ἡ φορὰ ΡΜ, ἣν θραυσθεῖσα φέρεται ἡ ΜΟ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεῖται εὐθείας, ἐφ' ἧς καὶ ἡ ΜΕ· ἄρα ἡ ΜΟ θραυσθεῖσα κινηθήσεται ὡς φερομένη ἀπὸ τοῦ Ε· ἀλλ' ἐξίσου διατηρήσει πρὸς τὸ Ρ τὴν φορὰν ΜΡ, ὡς τοῦ ΙΧ ἀκτὶς ΡΕ, κάθετος τῇ τοῦ ἀέρος ἐπιφανείᾳ ΙΧ· ἔξεισιν ἄρα τῆς ὑέλου, καθάπερ εἰ ἐφέρετο ἐκ τοῦ Ε.

149. Φακὸς ἄρα ὁμοιόσχημος τῷ διαληφθέντι ὑέλινος ξυντελεῖ λίαν τοῖς ἀμβλύωψι· καὶ γὰρ αἱ ἀκτῖνες αἱ ἀπὸ σώματος λίαν ἀφεστῶτος ἀποπεμπόμεναι πρὸς αἴσθησιν, οὖσαι παράλληλοι, μετὰ τὸ διελθεῖν τὴν τῆς ὑέλου κοιλότητα εἰσχωρήσουσιν εἰς τὸν κατὰ τὸ Υ κείμενον ὀφθαλμὸν, ὡς εἰ ἐφέροντο πᾶσαι ἀπὸ τῆς ἑστίας Ε· δυνήσεται ἄρα ἰδεῖν τὸ ἀφεστὼς ὁρατὸν, ὡς εἰ ἔκειτο κατὰ τὸ Ε.

150. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Σαφὲς ἄρα ἐκ τῆς προεκτεθείσης δείξεως, ὡς ἐν καμπύλῃ οἱαδήποτε τῇ ΗΟηκ, ἡ γωνία τῆς ἐπιπτώσεως ΟΜΕ = ΠΜΔ ἡ αὐτή ἐστιν ἐπὶ ἀκτῖνος τῆς ΟΜΠ, τῆς εἴτε εἰς τὴν κυρτότητα, εἴτε εἰς τὴν κοιλότητα τῆς καμπύλης εἰσιούσης· καὶ δὴ καὶ ἡ γωνία τῆς θραύσεως ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περιπτώσεων ἡ αὐτὴ ἔσεται ΕΜΖ = ΡΜΔ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ τῆς Ὑπερβολῆς.

151. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Οἱ ὑπερβολικοὶ κλῶνες ΗΜ, ΗΜ΄ ἐπ' ἄπειρον ἀποχωροῦσι τοῦ ἄξονος ΗΠ (σχ. 68).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΗΒ > ΑΗ (17), καὶ τὰ ἐφεξῆς κείμενα τρίγωνα ΑΠΔ ὅμοια τῷ τριγώνῳ ΑΗΒ, ἑκάστη

ΠΔ τάχιον αὔξει, ἢ ἡ ΕΠ· ἑκάςη ἄρα ΠΔ ἐκ τῦ Ε ἐφ' ἑαυτὴν μεταφερομένη ἀποςήσει μᾶλλον ϰ μᾶλλον τὴν καμπύλην ἀπὸ τῆς ΗΠ. Ο. Ε. Δ.

152. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Προήχθω ἡ μὲν ΑΤ πρὸς τὸ ζ, ἡ δ' ΑΠ πρὸς τὸ ε· ὀκῦν αἱ ὕπερθεν τῦ Α ἐς τὸ ε, ΠΔ ἔσονται πρῶτον ἐλάττυς, ἢ αἱ αὐτῶν ΕΠ· ἀλλ' ἐπείπερ αἱ ΠΔ διὰ τὸ εἶναι ΗΒ > ΑΗ τάχιον αὔξυσιν, ἢ αἱ ΕΠ, εὑρεθήσεται τέλος μία τις ΠΔ = ΕΠ, εἴτ' ὖν ἡ ηΔ', ἥτις, μετενεχθεῖσα ἐκ τῦ Ε ἐφ' ἑαυτὴν, πεσεῖται ἐπὶ τῦ σημείυ η· τοιγαρῦν μετενεχθεισῶν ἀπὸ τῦ Ε ἐφ' ἑαυτὰς τῶν ἐφεξῆς ΠΔ', εὑρεθήσονται δύω νέοι ὑπερβολικοὶ κλῶνες ηκ, ηΜ' · τῦθ' ὅπερ ἡμῖν ϰ δὴ δειχθήσεται.

153. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Αἱ δύω κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι καμπύλαι ΗΜΜ, ηκΜ' μιᾷ μόνῃ ὑπερβολῇ ἐπανήκυσι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΑΗΒ, ΑηΔ' ἐςιν ηΔ' : ΗΒ : : ηΑ : ΗΑ· ἐπεὶ δὲ ηΔ' = ηΕ, ϰ ΗΒ = ΗΕ (ἐκ κατασκευῆς) ἀντικαταςάσει ἄρα ἔςαι ηΕ : ΗΕ : : ηΑ : ΗΑ (17). Ο. Ε. Δ.

154. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ ὑπερβολὴ ἄρα δύω μὲν κορυφὰς Η, η, ἕνα δὲ ἄξονα Ηη ὡρισμένον ἔχει.

155. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἡ ὑπερβολὴ μόνη δύναται ἔχειν ἀντικειμένας καμπύλας.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τῇ παραβολῇ ἕκαςον σημεῖον ὕπερθεν τῦ Α κείμενον (§. 66) αὐτῇ ἐπανήκειν ἀμήχανον (23)· ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει, ὅτι ΗΒ < ΑΗ (§. 67), πᾶσα ὑπὲρ τὸ Α κειμένη ΠΔ ὐμὴ ἰσωθήσεται τῇ ΠΕ· ἄρα ὐδ' ἐν τῇ ἐλλείψει σημειωθήσονται ὑπὲρ τὸ Α σημεῖα αὐτῇ ἐπανήκοντα. Ο. Ε. Δ.

156. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐφάνη δὲ τῦτο κἀπὶ τῶν τῦ

κώνȣ τομῶν (6)· ὡς ϗ ἐντᾶυθα ἐν ταῖς κατὰ τὸ ἐπίπεδον γεγραμμέναις κωνικαῖς τομαῖς.

157. ΑΙΤΗΜΑ. Ἐὰν, ληφθείσης ηΕ = ΗΑ, ϗ ηδ = ΗΒ, ϗ ηε = ΗΕ (σχ. 68), ἀχθῇ τέρματος ἄνευ ἡ Εδ, ϗ ἡ διευθετȣ̃σα Εβ, εὑρεθήσεται ϗ διὰ ταύτης τῆς ἀπεράντȣ ἡ καινὴ καμπύλη ηκΜ΄· ἀλλ᾽ ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΒ = Εηδ· ἄρα ϗ ἡ καμπύλη ΗΜΜ = ηκΜ΄· ἄρα ϗ διὰ τῆς ἑςίας ε γραφῆναι δύνανται ἀμφότεραι αἱ καμπύλαι ΗΜΜ, ηκΜ΄· ἐκεῖνα. ἡ ὑπερβολὴ ἀναγκαίως ἔχει δύω ἑςίας Ε, ε· β΄. αἱ τεταγμέναι ἐν ταῖς καμπύλαις ΗΜΜ, ηκΜ΄, αἱ ἴσον ἀπέχȣσαι τῶν κορυφῶν, εἰσὶν ἴσαι.

158. ΟΡΙΣΜΟΣ. Εὐθεῖα ἡ Ηη καλεῖται πρῶτος ἄξων τῆς ὑπερβολῆς· τὸ δὲ μέσον σημεῖον Κ τῆς Ηη, κέντρον· ἡ δὲ κάθετος ΧΚΧ προαχθεῖσα ȣ̃τως, ὡς τὸ ἀπόςημα ΕΕ τȣ̃ κέντρȣ ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν ἑςιῶν μετενεχθὲν ἐκ τȣ̃ Η ἐπὶ τὴν ΧΚΧ πίπτειν ἐπὶ τῶν περάτων Χ, Χ, δεύτερος ἄξων, ἢ ἄξων συζυγὴς, ἡ δὲ ὑπερβολὴ καλεῖται μὲν ἰσοσκελὴς, ἢ κυκλικὴ, ἐὰν ᾖ ΧΚΧ = Ηη, σκαληνὴ δὲ, ἢ ἐλλειπτικὴ, ἐὰν ὦσιν ἄνισοι οἱ ΧΚΧ, Ηη ἄξονες.

159. Τηρήσομεν δὲ ἐν ταύτῃ τῇ καμπύλῃ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῇ ἐλλείψει ὀνόματα (88), εἴτ᾽ ȣ̃ν $\frac{Η\eta}{2} = \alpha$, ϗ $\frac{ΧΚ}{2} = \beta$, ϗ ΠΜ $= \upsilon$, ϗ ΠΚ $= \chi$, ϗ ΚΕ $= \kappa$· ὅθεν $ΗΠ''' = \chi - \alpha$, ϗ $\eta Π''' = \chi + \alpha$, ϗ δὴ $ΗΠ''' \times \eta Π''' = \chi^2 - \alpha^2$.

160. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ὁ πρῶτος ἄξων Ηη ἴσος ἐςὶ τῇ τῶν ἑνός τινος σημείȣ τῆς καμπύλης ἀφ᾽ ἑκατέρας

τῶν ἐςιῶν ἀποςημάτων διαφορᾷ· εἴτ' ἒν Μ‴Ε — Μ‴ε = Ηη.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςι γὰρ Μ‴ε = Π″δ, ϗ Μ‴Ε = Π″Δ′ (ἐκ κατασκευῆς)· ἄρα Μ‴Ε — Μ‴ε = Δ′δ· ἀλλὰ α′. παραλλήλε ἔσης τῆς Εδ παρὰ τὴν Αε, πᾶσαι αἱ Δδ εἰσὶν ἴσαι (Γεωμ. 127)· β′. Ηη = Δ′δ· εἴγε Ηη = ηΕ — ΗΕ = ηΔ′ — ηδ (ἐκ κατασκευῆς) = Δ′δ· ἄρα Μ‴Ε — Μ‴ε = Ηη. Ο. Ε. Δ.

161. Ἐντεῦθεν ἄρα ῥᾷςα ὑπερβολὴν καταγράφειν διδασκόμεθα· ληφθέντος γὰρ ἄξονος τε Ηη, ϗ τῶν εὐθειῶν ΗΕ, ηε, ΗΑ ἴσων, ἐὰν κέντρῳ τῷ ε γραφῶσιν ἑξῆς (σχ. 91) τόξα τὰ ΜδΜ, ϗ μετενεχθῇ ἐκ τε Ε ἑκάςη Αδ ἐπὶ τὸ ἑαυτῆς σύςοιχον τόξον, τὰ ἔτως εὑρεθέντα σημεῖα Μ, Μ′ ἔσονται ἐν ὑπερβολῇ· ϗ γὰρ εΜ′ = εδ′, ϗ ΕΜ′ = Αδ′ (ἐκ κατασκευῆς)· ἄρα εΜ′ — ΕΜ′ = εΑ· ἀλλὰ εΑ = Ηη (ἐπεὶ εη = ΑΘ)· ἄρα εΜ′ — ΕΜ′ = Ηη, ἰδιότης τῆς ὑπερβολῆς (160).

162. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε′. Ὁ δεύτερος ἡμιάξων ἐςὶν εὐθεῖα μέση ἀνάλογος πρὸς τὰ δύω ἀποςήματα τῶν δύω περάτων τε πρώτε ἄξονος ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν ἑςιῶν, εἴτ' ἒν ΕΗ = κ — α : ΚΧ = β : : ΚΧ = β : Εη = κ + α (σχ. 68).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΗΚΧ ἐςι $ΚΧ^2 = ΗΧ^2 — ΚΗ^2$· ἀλλὰ $ΚΧ^2 = β^2$, καὶ $ΗΧ^2 = ΚΕ^2$ (158) $= κ^2$, ϗ $ΚΗ^2 = α^2$· ἄρα $β^2 = κ^2 — α^2$· ἄρα κ — α : β : : β : κ + α (Συμβ. Λογ. 240). Ο. Ε. Δ.

163. ΘΕΩΡΗΜΑ ς′. Ἐν ὑπερβολῇ τὸ ἀπὸ τεταγμένης ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα τετράγωνον πρὸς τὸ ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένων γινόμενον ἔςιν, ὡς τὸ ἀπὸ τε

δευτέρου ἡμιάξονος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου εἴτ' οὖν $\Pi'''M''^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστιν $\varepsilon\Pi''' = \chi + \kappa$, καὶ $E\Pi''' = \chi - \kappa$, καὶ $\varepsilon M'' - EM'' = 2\alpha$ (160)· ἔστω δὴ καὶ $\varepsilon M'' + EM'' = 2\nu$· τοιγαροῦν ἔσται $\varepsilon M'' = \nu + \alpha$, καὶ $EM'' = \nu - \alpha$ (Συμβ. Λογ. 442).

Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ $EM''\Pi'''$ ἐστὶν EM''^2 (= $\nu^2 - 2\alpha\nu + \alpha^2$) = $\Pi'''M''^2$ (= υ^2) + $E\Pi^2$ (= $\chi^2 - 2\kappa\chi + \kappa^2$) A· ἐν δὲ τῷ $\varepsilon\Pi'''M''$ ἐστὶν $\varepsilon M''^2$ (= $\upsilon^2 + 2\alpha\nu + \alpha^2$) = $\Pi''M''$ (= υ^2) + $\varepsilon\Pi'''^2$ (= $\chi^2 + 2\kappa\chi + \kappa^2$)· ἀφαιρέσει δὲ τῆς A ἐξισώσεως ἀπὸ τῆς B, λειφθήσεται $4\alpha\nu = 4\kappa\chi$· ὅθεν $\alpha\nu = \kappa\chi$, καὶ $\nu = \frac{\kappa\chi}{\alpha}$, καὶ $\nu^2 = \frac{\kappa^2\chi^2}{\alpha^2}$.

Ἀντικαταστάσει ἀντὶ ν τῆς αὐτοῦ δυνάμεως ἐπὶ τῆς A ἐξισώσεως, γίνεται $\frac{\kappa^2\chi^2}{\alpha^2} - 2\kappa\chi + \alpha^2 = \upsilon^2 + \chi^2 - 2\kappa\chi + \kappa^2$· μεταθέσει δὲ τοῦ $- 2\kappa\chi$, $\frac{\kappa^2\chi^2}{\alpha^2} + \alpha^2 = \upsilon^2 + \kappa^2 + \chi^2$· ἄρα $\upsilon^2 = \frac{\kappa^2\chi^2}{\alpha^2} + \alpha^2 - \kappa^2 - \chi^2$· ἀπαλλαγῇ τοῦ κλάσματος, $\alpha^2\upsilon^2 = \kappa^2\chi^2 + \alpha^4 - \alpha^2 \times \overline{\kappa^2 - \chi^2}$ (ἢ $\overline{\kappa^2 - \alpha^2} \times \chi^2 + \overline{\alpha^2 - \kappa^2} \times \alpha^2$) (Δ).

Ἀλλὰ $\kappa^2 - \alpha^2 = \beta^2$ (162)· καὶ δὴ $\alpha^2 - \kappa^2 = - \beta^2$· ἡ Δ ἄρα ἐξίσωσις γενήσεται $\alpha^2\upsilon^2 = \beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2$· ἐντεῦθεν ἄρα $\upsilon^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (Συμβ. Λογ. 411) (Ρ) Ο. Ε. Δ.

164. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐκ τῆς Ρ ἀναλογίας πρόεισιν $\upsilon^2 = \frac{\chi^2 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^2}$ (Ρ), ἢ $\upsilon^2 = \frac{\chi^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^2}$,

ἐξίσωσις γενικὴ τῆς ὑπερβολῆς· ἐὰν μέντοι ὑποτεθῇ $\beta^2 = \alpha^2$, ἔσαι $\upsilon^2 = \chi^2 - \alpha^2$, ἐξίσωσις ἐπανήκεσα τῇ κυκλικῇ ὑπερβολῇ.

165. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ ἄρτι εὑρεθεῖσα τῆς ὑπερβολῆς ἐξίσωσις ἐκτεθῆναι δύναται ὕτως· $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\chi^2 - \alpha^2)}$. ἐὰν δὲ ἡ ἀποτετμημένη τῷ ἄξονι ἰσωθῇ, εἴτ᾽ ὖν γένηται $\chi = \alpha$, ἔσαι $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2 - \alpha^2)} = \frac{\beta}{\alpha} \times \sqrt{o} = \frac{\beta}{\alpha} \times o = o$, τῦτ᾽ ἔσιν, ὐδεμία αὐτῇ ἀντισοιχήσει τεταγμένη· ἡ ὑπερβολὴ ἄρα διὰ τῶν τῦ ἄξονος διήκει περάτων.

166. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐὰν δὲ ἀποτμηθῶσι πρὸς τῇ κορυφῇ Η αἱ εὐθεῖαι, ἔσεται ΗΠ‴ $= \chi$· ὅθεν ηΠ‴ $= 2\alpha + \chi$, ϗ ΗΠ‴ × Π‴η $= 2\alpha\chi + \chi^2$· ἡ δὲ Ρ ἀναλογία τρέψεται εἰς $\upsilon^2 : 2\alpha\chi + \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$, ἡ δὲ ρ ἐξίσωσις ἔσαι $\upsilon^2 = \frac{2\alpha\chi\beta^2 + \beta^2\chi^2}{\alpha^2}$, ἢ $\upsilon^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\alpha} + \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$.

167. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐπεὶ σαθερός ἐσιν ὁ λόγος $\beta^2 : \alpha^2$, ἡ ῥηθεῖσα ἀναλογία Ρ ἐν διαφόροις ἀποτετμημέναις προβαλεῖ $\upsilon^2 : \Upsilon^2 :: \chi^2 - \alpha^2 : X^2 - \alpha^2$, τυτέσιν ἐν ταύτῃ τῇ καμπύλῃ „τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων „τετράγωνα πρὸς ἄλληλα εἰσὶν, ὡς τὰ ἐκ τῶν ὑπ᾽ αὐ„τῶν ἀποτετμημένων ϗ συναποτετμημένων γινόμενα“· ἄρα ἡ καμπύλη αὕτη ἡ αὐτή ἐσι τῇ εὑρεθείσῃ ἐκ τῆς τῦ κώνυ τομῆς (16).

168. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἡ παράμετρος ΜΕΜ΄ τῦ πρώτυ ἄξονος τῆς ὑπερβολῆς ἔσιν εὐθεῖα τρίτη ἀνάλογο;

τȣ̃ δευτέρȣ ἄξονος ϗ τȣ̃ πρώτȣ· ϗ γὰρ ἐν τῇ παραμέτρῳ ἔςι $\chi = \mathrm{KE} = \varkappa$ (159)· ἄρα ἀντικαταςάσει γενήσεται ἡ Ρ ἀναλογία $\upsilon^2 : \varkappa^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ · ἄρα, ἐπεὶ $\varkappa^2 - \alpha^2 = \beta^2$ (162)· $\upsilon^2 : \beta^2 :: \beta^2 : \alpha^2$, ἢ $\upsilon : \beta :: \beta : \alpha$· ἄρα $2\upsilon : 2\beta :: 2\beta : 2\alpha$ (Συμβ. Λογ. 246).

169. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ΄. Ἔςι δὲ ϗ ἐν τῇ ἐλλείψει $\pi : 2\beta :: 2\beta : 2\alpha$ (97)· ἀλλ' ἡ παραβολὴ ἔςι καὶ αὐτὴ ἔλλειψις (5)· ἄρα ϗ ἐν αὐτῇ $\pi : 2\beta :: 2\beta : 2\alpha$, τȣτέςιν ἐν ἁπάσῃ κωνικῇ τομῇ α΄. ἡ παράμετρος π ἔςι τρίτη ἀνάλογος τȣ̃ δευτέρȣ καὶ τȣ̃ πρώτȣ τῶν ἀξόνων· β΄. $\pi = \frac{4\beta^2}{2\alpha} = \frac{2\beta^2}{\alpha}$.

170. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ΄. Τύπος τῆς μὲν μείζονος ὀρθίας πλευρᾶς ἔςιν $\varepsilon\mathrm{M}'' = \frac{\varkappa\chi + \alpha^2}{\alpha}$ · τῆς δὲ ἐλάττονος $\mathrm{EM}'' = \frac{\varkappa\chi - \alpha^2}{\alpha}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Καὶ γὰρ $\varepsilon\mathrm{M}'' = \nu + \alpha$, ϗ $\mathrm{EM}'' = \nu - \alpha$ (163. ἐν τῇ δείξει) ϗ $\nu = \frac{\varkappa\chi}{\alpha}$ (ἀυτ.)· ἄρα $\varepsilon\mathrm{M}'' = \frac{\varkappa\chi}{\alpha} + \alpha = \frac{\varkappa\chi + \alpha^2}{\alpha}$ · ὡσαύτως εὑρεθήσεται $\mathrm{EM}'' = \frac{\varkappa\chi}{\alpha} - \alpha = \frac{\varkappa\chi - \alpha^2}{\alpha}$. Ο. Ε. Δ.

171. ΘΕΩΡΗΜΑ Η΄. Τύπος τȣ̃ ἀπὸ ἐπὶ τὸν ἐλάσσω ἄξονα ἡςινοσȣ̃ν τεταγμένης τετραγώνȣ ἔςι $\frac{\alpha^2\upsilon^2 + \alpha^2\beta^2}{\beta^2}$, εἴτ' ȣ̃ν $\frac{\alpha^2}{\beta^2} \times (\upsilon^2 + \beta^2)$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ γὰρ $\upsilon^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (163)·

ἄρα $\chi^2 - \alpha^2 = \frac{\alpha^2 \upsilon^2}{\beta^2}$ · ἄρα $\chi^2 = \frac{\alpha^2 \upsilon^2}{\beta^2} + \alpha^2 =$ $\frac{\alpha^2 \upsilon^2 + \alpha^2 \beta^2}{\beta^2}$ · ἀλλὰ $M'I^2 = K\Pi'^2 = \chi^2$ · ἄρα MI^2 $= \frac{\alpha^2 \upsilon^2 + \alpha^2 \beta^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \times (\upsilon^2 + \beta^2)$. Ο. Ε. Δ.

172. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῆς διαληφθείσης ἐξισώσεως προέρχεται $M'I^2 : \upsilon^2 + \beta^2 :: \alpha^2 : \beta^2$ (Η)· ἀλλ' ἡ ἀποτετμημένη ΚΙ, ἣ ἀντισοιχεῖ τῇ Μ'Ι = ΠΜ' = υ, ἄρα $\upsilon^2 = KI^2$ · τουτέςι „τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ἐπὶ „τὸν δεύτερον ἄξονα τετράγωνον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν „τετραγώνων τοῦ τε ἀπὸ τῆς συςοιχούσης ἀποτετμημένης, „καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἡμιάξονος, ὡς τὸ τετράγωνον τὸ „ἀπὸ τοῦ πρώτου ἡμιάξονος πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου"· δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν, ὡς αἱ ἰδιότητες τῶν τῆς ὑπερβολῆς ἀξόνων ἥκιςα ταὐτίζονται, καθὰ ξυμβαίνει τῇ ἐλλείψει (124)· καὶ οὕτως ἄρα οἱ δύω ὑπερβολικοὶ ἄξονες οὐκ ἂν κληθείησαν συζυγεῖς.

173. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς σημείου Μ ἁπτομένην ἀγαγεῖν (σχ. 92).

ΛΥΣΙΣ. Πεπράχθω τὰ πάντα, ὡς ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως (103)· εἰλήφθω ἀμέλει ἐπὶ τῆς εΜ, ΜΡ = ΜΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΡ· φημὶ δὴ ὡς εὐθεῖα ἡ ΤΜΧ, δίχα τέμνουσα τὴν ΕΡ, ἔςιν, ἣν ζητοῦμεν, ἡ ἁπτομένη· ἐπεὶ γὰρ ΕΜ = ΜΡ, ἡ ΤΧ δίχα τέμνουσα τὴν ΕΡ, αὐτῇ ἐπιςήσεται κάθετος (Γεωμ. 164, 217)· ἄρα ΟΕ = ΟΡ· ἅπαν οὖν σημεῖον τῆς ΤΧ παρὰ τὸ Μ, τὸ Ο φέρ' εἰπεῖν, οὐ δύναται εἶναι ἐν τῇ καμπύλῃ· καὶ γὰρ εΡ = εΜ — ΕΜ (ἐκ κατασκευῆς) = Ηη· ἀλλ' εΟ — ΟΡ < εΡ· εἴ-

εγ εP + OP γωνιώδη γραμμὴν συνίςησι, τῆς εO εὐθείας ὕσης· ἄρα εO — OP < Hη. ἐπεὶ ἄρα OP = OE, ἔςαι εO — EO < Hη· ἄρα τὸ O σημεῖον ὐκ ἔςιν ἐν τῇ καμπύλῃ (156)· Ο. Ε. Π.

174. ΠΟΡΙΣΜΑ. Καθάπερ καὶ ἐν τῇ ἐλλείψει (104), ἡ γωνία EMT = εMT, διὰ τὸ τὴν TM δίχα τέμνειν τὴν EP (Γεωμ. 217).

157. ΘΕΩΡΗΜΑ Θ΄. Τύπος τῆς ὑποκαθέτυ ΠΥ ἔςι $\frac{\beta^2 \chi}{\alpha^2}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ παράλληλός ἐςι τῇ ΥΜ ἡ EP (Γεωμ. 138), ἔςιν εP : εE :: MP : EΥ (Γεωμ. 318)· ἀλλ' εP = εM — EM = 2α, διὰ τὴν EP = EM (ἐκ κατασκευῆς), καὶ εE = 2κ, καὶ MP = ME = $\frac{\kappa\chi - \alpha^2}{\alpha}$ (170)· ἄρα ἀντικαταςάσει, 2α : 2κ :: $\frac{\kappa\alpha - \alpha^2}{\alpha}$: EΥ, ἢ α : κ :: $\frac{\kappa\chi - \alpha^2}{\alpha}$: EΥ = $\frac{\kappa^2\chi - \alpha^2\kappa}{\alpha^2}$, ὗ ἀφαιρεθέντος ΠΕ = ΠΚ — ΚΕ = χ — κ, ἔςαι ΠΥ = $\frac{\kappa^2\chi - \alpha^2\kappa}{\alpha^2} - \chi + \kappa$ $= \frac{\kappa^2\chi - \alpha^2\kappa - \alpha^2\chi + \alpha^2\kappa}{\alpha^2} = \frac{\kappa^2\chi - \alpha^2\chi}{\alpha^2} =$ $\frac{(\kappa^2 - \alpha^2)\times\chi}{\alpha^2}$· ἀλλὰ $\kappa^2 - \alpha^2 = \beta^2$ (162) ἄρα ΠΥ = $\frac{\beta^2\chi}{\alpha^2}$· Ο. Ε. Δ.

176. ΠΟΡΙΣΜΑ. Η' κανονικὴ ΥΜ $= \sqrt{\Pi M^2 + \Pi \Upsilon^2}$ $= \sqrt{\frac{\beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^4\chi^2}{\alpha^4}}$ (164, 175).

177. ΘΕΩΡΗΜΑ Ι'. Τύπος τῆς ὑφαπτομένης ΤΠ ἔςι $\frac{\chi^2 - \alpha^2}{\chi}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ε'ν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΤΥΜ (19) ἔςι ∻ ΠΥ $= \frac{\beta^2\chi}{\alpha^2}$ (175) : ΠΜ $= \upsilon$: ΤΠ (Γεωμ. 341). ἄρα ΤΠ $= \upsilon^2 : \frac{\beta^2\chi}{\alpha^2}$ · ἔςι δὲ $\upsilon^2 = \frac{\beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^2}$ (164)· ἄρα ΤΠ $= \frac{\beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2}{\beta^2} \times \frac{\alpha^2}{\beta^2\chi} =$ $\frac{\beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2}{\beta^2\chi} = \frac{\chi^2 - \alpha^2}{\chi}$. Ο. Ε. Δ.

178. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ε'ὰν δ' ἐν τύπῳ ΠΤ $= \frac{\chi^2 - \alpha^2}{\chi}$ — αἱ εὐθεῖαι ἀποτετμημέναι ὦσι πρὸς τῇ κορυφῇ, εἴτ' ἒν τῇ ἀρχῇ τῦ ἄξονος, τηνικαῦτα χ τρέψεται εἰς $\alpha + \chi$, ὗτινος ἀντὶ χ ἀντικαταςαθέντος γενήσεται ὁ τύπος ΠΤ $= \frac{2\alpha\chi + \chi^4}{\alpha + \chi}$ · ἐὰν δὲ ἀπὸ ΠΤ ἀφαιρεθῇ ΗΠ $= \chi$, γενήσεται ΠΤ — ΗΠ $=$ ΗΤ $= \frac{2\alpha\chi + \chi^2}{\alpha + \chi} - \chi =$ $\frac{\alpha\chi}{\alpha + \chi}$ · ἐν τῦτῳ ὖν τῷ τύπῳ ὑποτεθέντος $\chi = \infty$, εὑρεθήσεται ΗΤ $= \frac{\alpha \cdot \infty}{\infty} = \alpha$ · ἡ ἄρα ΗΤ μείζων τῆς

ΗΚ ἐδέποτε γίνεται· ϗ πᾶσαι αἱ τῆς ὑπερβολῆς ἀπτόμεναι μεταξύ τῶν Η, Κ πίπτεσιν· ἀλλ' ἐν τῇ παραβολῇ ΗΤ $=\chi$ (46), ὑποτεθέντος χ ∞, ΗΤ καθίςαται ἄπειρος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς.

179. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐὰν ἐπιςῇ κάθετος (σχ. 93) τῷ πρώτῳ ἄξονι κατὰ τὴν κορυφὴν Σ ἡ Ση $=$ ΚΝ, εἴτ' ἐν τῷ δευτέρῳ ἡμιάξονι, ϗ ΣΞ $=$ Ση, ϗ ἀπὸ τῦ κέντρε ἀχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ Κητ, ΚΞΒ· αὗται Ἀσύμπτωτοι ἀκέεσι τῆς ὑπερβολῆς· αἱ δ' εὐθεῖαι Με, ΕΜ, ΡΜ αἱ παράλληλοι, εἴτε τῷ πρώτῳ, εἴτε τῷ δευτέρῳ ἄξονι, εἴτε καὶ τῇ ἀντιθέτῳ ἀσυμπτώτῳ, τεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον ὀνομάζονται.

180. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον τεταγμένης παραλλήλε τῷ δευτέρῳ ἄξονι, ϗ τῆς αὐτῆς προαγωγῆς ΜΑ προεκβαλλομένης εἰς τὴν ἑτέραν ἀσύμπτωτον, ἀεὶ ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῦ δευτέρε ἡμιάξονος τετραγώνῳ· εἴτ' ἐν Με × ΜΑ $=$ ΚΝ^2 $=\beta^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΚΣη, ΚΠε ἐςὶ ΚΣ $=\alpha$: Ση $=\beta$:: ΚΠ $=\chi$: Πε· ἄρα Πε $=\frac{\beta\chi}{\alpha}$.

ἀλλὰ Με $=$ Πε $-$ ΠΜ $=\frac{\beta\chi}{\alpha}-\upsilon$, ϗ ΜΑ $=$ Πε ($=\frac{\beta\chi}{\alpha}$) $+$ ΠΜ ($=\upsilon$)· ἄρα Με × ΜΑ $=$

$$\frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \upsilon^2 = \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2} \ (164) = \beta^2 \cdot \text{ἄρα}$$

Mε × MA = β^2 · Ο. Ε. Δ.

181. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπεὶ ἑκάτερον τῶν γινομένων ΜΕ × ΜΑ, Ιτ × ΙΒ ἐστιν = β^2, ϗ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα· ϗ ὅσα δήποτε δὲ ἄλλα τοιάδε γινόμενα ἴσα ἔσονται.

182. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐπεὶ δὲ Mε × MA = KN^2, ἄρα Mε : KN :: KN : MA, τουτέστιν „ὁ δεύ„τερος ἡμιάξων ἐστι μέση ἀνάλογος τῆς τεταγμένης ἐπὶ „τὴν ἀσύμπτωτον, ϗ τῆς προαγωγῆς αὐτῆς προεκβληθεί„σης εἰς τὴν ἑτέραν ἀσύμπτωτον.‟

183. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἡ ὑπερβολὴ προσεγγίζει μᾶλλον ϗ μᾶλλον τῇ ἀσυμπτώτῳ· ϗ γὰρ Mε × MA

$$= KN^2 = \beta^2 \cdot \text{ἄρα } M\varepsilon = \frac{\beta^2}{MA} \ (\text{Συμβ. Λογ. } 253)\cdot$$

ἀλλ᾽ ὅσον ἐπεκτείνεται ἡ ὑπερβολὴ, ἀεὶ αὔξεται ἡ ΜΑ, ἄρα ἡ Mε ἐλαττοῦται (Συμβ. Λογ. 259)

184. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἡ ὑπερβολὴ, καίτοι ἐπ᾽ ἄπειρον τῆς ἀσυμπτώτου ἐγγὺς γίνεται, οὐδέποτε μέντοι αὐτῇ συμπίπτει· ἐστι γὰρ

$$\Pi\varepsilon^2 = \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} \ (180), \text{ ϗ}$$

$$\Pi M^2 = \upsilon^2 = \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \beta^2 \cdot \text{ ἄρα } \Pi\varepsilon^2 < \Pi M^2, \text{ ϗ}$$

Πε < ΠΜ ἀείποτε δείκνυται (Συμβ. Λογ. 291).

185. Διὰ ταῦτ᾽ ἄρα καμπύλης ἀσύμπτωτος ἐν γένει καλεῖται εὐθεῖα, ἡ ἐπ᾽ ἄπειρον αὐτῆς ἐγγὺς γινομένη, μηδέποτε δὲ αὐτῇ συμπεσεῖν ἔχουσα.

186. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Τὸ γινόμενον ἐκ τεταγμένης ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον παραλλήλου τῇ ἑτέρᾳ, ϗ τῆς

ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένης ΡΚ, ἔςιν ἀεὶ εὐςαθὲς ἰσόμενον τῷ $\Sigma\Delta^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω Μϱ παράλληλος τῇ ΡΚ· ὅθεν Μϱ = ΡΚ· ά. ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις Σδη, ΜΡε (Γεωμ. 220) ἔςι ΜΡ : ΣΔ :: Με : Ση (β)· ἀλλὰ Με : β :: β : ΜΑ (182)· ἄρα ΜΡ : ΣΔ :: β : ΜΑ.

β΄. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΣΔη, ΜΑϱ ἔςι Ση = β : ΜΑ :: ηΔ = ΣΔ (*) : Μϱ = ΡΚ· ἄρα ΜΡ : ΣΔ :: ΣΔ : ΡΚ· ἄρα ΜΡ × ΡΚ = $\Sigma\Delta^2$. Ο. Ε. Δ.

157. ΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαγωνίου ΣΔ τετράγωνον $\Sigma\Delta^2$, ἡ ΣΔ × ΔΚ (σημ. τοῦ β΄.) δύναμις ὑπερβολικὴ ὀνομάζεται.

188. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἔςω ΜΡ = υ καὶ ΡΚ = χ· ἔςαι δὴ χυ = $\Sigma\Delta^2$ (186 β΄.)· ἐὰν οὖν κληθῇ ΣΔ = κ, $\kappa^2 = \chi\upsilon$ ἔςαι ἐξίσωσις τῶν τῆς ὑπερβολῆς ἀσυμπτώτων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ ὑπερβολικὴ δύναμις ἰσοῦται τῷ τεταρτημορίῳ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τοῦτε ἀπὸ τοῦ πρώτου ἡμιάξονος καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ γὰρ ΣΔ = $\frac{\Sigma N}{2}$ (Γεωμ. 244) ἄρα $\Sigma\Delta^2 = \frac{\Sigma N^2}{4}$· ἀλλὰ $\Sigma N^2 = K\Sigma^2 + KN^2$ (Γεωμ. 349)· ἄρα $\Sigma\Delta^2 = \frac{K\Sigma^2 + KN^2}{4}$.

189. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ Νε ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἐπὶ τὴν ἑτέραν ἀσύμπτωτον ἀχθῇ, διαπερῶσα τὴν ὑπερβολὴν, ἔςαι Νκ = Με (Σχ. 94).

(*) Ἐπείπερ αἱ διαγώνιοι Κη, ΝΣ τοῦ ὀρθογωνίου ΚΝηΣ εἰσὶν ἴσαι, καὶ τὰ ἡμίση ηΔ, ΣΔ εἰσὶν ἴσα (Γεωμ. 244)·

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἔϛωσαν ΜΓ, ΜΡ, καὶ κΘ, κτ παράλληλοι ταῖς ἀσυμπτώτοις· ἔϛαι ἒν ΜΡ × ΜΓ (= ΚΡ) = ΣΔ² (𝒳. 93) ϗ κτ × κΘ = ΣΔ² (185)· ἄρα (𝒳. 94) ΜΡ × ΜΓ = κτ × κΘ ἄρα ΜΡ : κΘ :: κτ : ΜΓ (Συμϐ. Λογ. 241).

β΄. Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΡε, εκΘ ἔϛι ΜΡ : κΘ :: Με : εκ· ἄρα Με : εκ :: κτ : ΜΓ.

γ΄. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις Νκτ, ΝΜΓ, ἔϛι κτ : ΜΓ :: Νκ : ΝΜ· ἄρα Με : εκ :: Νκ : ΝΜ: ἄρα (Συμϐ. Λογ. 244) εκ — Με : Με :: ΝΜ — Νκ : Νκ· τ8τέϛι Μκ : Με :: Μκ : Νκ, ἢ Μκ : Μκ :: Με : Νκ· ἄρα Με = Νκ· Ο. Ε. Δ.

190. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Πᾶσα ἁπτομένη αϐη περατ8μένη πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις δίχα τέμνεται κατὰ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον β·, ἅπτεται γὰρ καθ' ἓν μόνον σημεῖον τὸ β τῆς καμπύλης (19)· τὰ δὲ αὐτῆς μέρη τὰ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων ϗ τῆς καμπύλης ἀπολαμϐανόμενα εἰσὶν ἴσα (189)· ἄρα αβ = βη.

191. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δοθεισῶν τῶν ἀσυμπτώτων (𝒳. 96) ΚΤ, ΚΖ, ϗ σημεί8 τυχόντος τ8 ν ὑπὸ τὴν γωνίαν ΤΚΖ κειμέν8, καταγραφήσεται ὑπερϐολὴ, διϊ8σα διὰ τ8 δοθέντος σημεί8 ν· ἀγομένων γὰρ τῶν εὐθειῶν ρνΡ, ΖνΖ' κτ, ϗ λαμβανομένων οΡ = ρν, ϗ ΔΖ' = νΖ κτ, τὰ σημεῖα Δ, ο κτ ἔσονται ἐν ὑπερβολῇ (189)· δυνάμεθα δὲ χρήσασθαι ϗ τοῖς σημείοις, Δ, Ο, καθάπερ τῷ ν εἰς εὕρεσιν ϗ ἄλλων τῆς ὑπερβολῆς σημείων, κἀκείνοις εἰς εὕρεσιν ἄλλων, ϗ 8τως ἐφεξῆς, μέχρις ἂν πυκνότατα εὑρεθέντα σημεῖα συγκροτήσωσι τὴν ὑπερβολήν.

192. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Τὰ γινόμενα ΜΤ × ΗΜ, ΒΔ × ΑΒ (𝒳. 95) ἐκ δύω ὡντινωνῦν εὐθειῶν, ἀγομένων

ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἀσυμπτώτε ἐπὶ τὴν ἑτέραν παραλλήλως μιᾷ τινι ἁπτομένῃ τῇ ΠΕν, εἰσὶν ἴσα.

ΔΕΙΞΙΣ. Διὰ τῶν σημείων Β, Μ, ἀχθεισῶν παραλλήλως τῷ δευτέρῳ ἄξονι τῶν ΤΒχ, ϗ ΘΜΣ, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΔΤ, ΜΘΤ ἔςαι (Γεωμ. 220) ΒΤ : ΜΘ :: ΒΔ : ΜΤ (Ρ), ἐκ δὲ τῶν ΑΒχ, ΣΜΗ ϗ αὐτῶν ὁμοίων, Βχ : ΣΜ :: ΑΒ : ΗΜ (η)· πολλαπλασιασμῷ δὲ τῆς Ρ ἐπὶ η, ἔςαι ΒΤ × Βχ : ΜΘ × ΣΜ :: ΒΔ × ΑΒ : ΜΤ × ΗΜ· ἀλλὰ ΒΤ × Βχ = ΜΘ × ΣΜ (181)· ἄρα ΒΔ × ΑΒ = ΜΤ × ΗΜ. Ο. Ε. Δ.

193. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπὶ δὲ τῆς ἁπτομένης Πν, τὰ μέρη ΑΒ, ΒΔ καθίςανται ΠΕ, Εν, $= \frac{\Pi\nu}{2}$ (190)· ἄρα ΒΔ × ΑΒ = ΠΕ × Εν = Εν², τετέςι τὰ γινόμε„να ΒΔ × ΕΒ, κτλ. εἰσὶν ἴσα ἕκαςον τῷ τετραγώνῳ „Εν² τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιαπτομένης“.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ ὑπερβολικῶν Λογαρίθμων.

194. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἐὰν αἱ ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτε πρὸς τῷ Κ (σχ. 97) ἀποτετμημέναι Κμ, Κν, Κξ κτλ. ἐν προόδῳ ὦσι γεωμετρικῇ αὐξέσῃ, αἱ θατέρᾳ ἀσυμπτώτῳ παραλλήλως τεταγμέναι ἔσονται ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ φθινέσῃ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ γὰρ χυ = κ² (188)· ἐν ἄλλῃ τινὶ χ΄, ϗ τῇ αὐτῆς ἀντιςοίχῳ Υ, ἕξομεν χ΄Υ = κ², κτ· ἡνίκα ἄρα

ἀποτετμημένη διπλασιάζεται, ἡ ἀντίςοιχος αὐτῇ τεταγμένη ὑποδιπλασία καθίςαται· τριπλασιαζομένης δὲ τῆς ἀποτετμημένης, ἡ τεταγμένη τὐναντίον ὑποτριπλασία γίνεται· ἄλλως γὰρ τὸ γινόμενον ὑπὸ πάσης ἀποτετμημένης χ καὶ τῆς αὐτῇ ἀντιςοίχως τεταγμένης υ ἐκ ἂν ἦν ἴσον ποσῷ μονίμῳ τῷ κ^2· ἐὰν ἄρα αἱ ἀποτετμημέναι αὔξωσι κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν, αἱ τεταγμέναι μειῦνται ὡσαύτως κατὰ πρόοδον γεωμετρικήν. Ο. Ε. Δ.]

195. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἐὰν αἱ ἀποτετμημέναι Κγ, Κμ, Κν, Κξ κτλ. ὦσιν ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ, καὶ αἱ διαφοραὶ αὐτῶν γμ, μν, νξ, κτ ἔσονται ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ.

ΔΕΙΞΙΣ. Αὐτόματον τῦτὶ ἕπεται ἐκ τῶν δειχθέντων (Συμβ. Λογ. 274).

196. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Τὰ ὑπερβολικὰ χωρία αγμμ, μνμν, κτ τὰ ἐπὶ τῶν εἰρημένων διαφορῶν βεβηκότα, ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα.

ΔΕΙΞΙΣ. Τετμήσθωσαν αἱ διαφοραὶ γμ, μν κτλ· εἰς μέρη, ἰσάριθμα μὲν, ἀπειροςὰ δὲ, πρὸς ἑκάςην δοθεῖσαν γμ, μν ἀναφερόμενα· ἐπινενοήσθωσαν δὲ τὰ χωρία γαμμ, μνμν, κτλ. συγκείμενα ἐκ τῶν ἀπειροςῶν ἐπιφανειῶν οομμ, ππνν τῶν ἐπὶ τοῖς εἰρημένοις ἀπειροςοῖς μορίοις βεβηκυιῶν, αἵπερ ἔσονται ςοιχεῖα τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος χωρίων· ἔχει δὲ ἐξ ὑποθέσεως ἕκαςον χωρίον ἴσα τὸν ἀριθμὸν ςοιχεῖα, ἃ δὴ εἰσὶ καὶ ἰσάλληλα· ἐπεὶ γὰρ αἱ εὐθεῖαι γμ, μν διῄρηνται εἰς μέρη τὸν ἀριθμὸν ἴσα, ἕκαςον μόριον ομ τῆς πρώτης πρὸς ἕκαςον μέρος πν τῆς δευτέρας ἐςιν ὡς γμ : μν· ἄρα ομ : πν :: γμ : μν· ἐπεὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως ἐςὶ Κγ : Κμ :: Κμ : Κν, ἔςαι Κγ — Κμ (= γμ) : Κμ :: Κν — Κμ (= μν) : Κν καὶ γμ : μν :: Κμ : Κν· ἀλλὰ Κμ × μμ = Κν × νν (186)· ἄ-

ρα Κμ : Κν :: νν : μμ· ἄρα ομ : πν :: νν : μμ, ϗ ομ × μμ = πν × νν, εἴτ᾽ ἔν οομμ = πννν· ἄρα τὰ ϛοιχεῖα τῦ χωρίϐ ναμμ εἰσὶν ἴσα τοῖς ϛοιχείοις τῦ χωρίϐ μνμν τόντε ἀριθμὸν ϗ τὸ μέγεθος· ἄρα τὰ χωρία ταῦτα εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις. Ο.Ε.Δ.

197. ΠΟΡΙΣΜΑ. Εἀν ληφθῶσιν ἄπειροι ἀποτετμημέναι κατὰ πρόοδον χωρῦσαι γεωμετρικὴν, ἐκ τῶν ἀριθμῷ ἀπείρων διαφορῶν προκύψϐσιν ὑπερβολικὰ χωρία ἰσάλληλα, πεπερασμένα μὲν καθ᾽ ἓν ἕκαϛον, ἀριθμῷ δὲ ἀπερίληπτα· τὸ χωρίον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτϐ ϗ τῆς ὑπερβολῆς ἀπολαμβανόμενον ἔϛιν ἄπειρον.

198, ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ὑποτέθειται ἐν ταύτῃ τῇ δείξει τὰ ϛοιχεῖα, εἴτ᾽ ἔν τὰ τραπέζια ομομ, πνπν ὀρθογώνια, ὅπερ ἥκιϛα ἀληθές· ἀλλὰ γὰρ τῶν εὐθειῶν ομ, πν ἀπειροϛῶν ϐσῶν, τὰ τραπέζια ομμο, δύναται ἐκληφθῆναι ὡς ὀρθογώνια, κυκλικῆς γῦν τῆς ὑπερβολῆς ὑπαρχϐσης· τηνικαῦτα γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένη γωνία ἔϛιν ὀρθή, εἴγε ἔϛιν (158) (σχ. 93). ΣΞ = ΚΗ = ΚΣ, ὅπερ ποιεῖ ἰσοσκελὲς τὸ τρίγωνον ΚΣΞ, ἄρα ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΣΚΞ, ΣΚβ ἔϛιν = 45°· ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΚβ ἴση 90°· ὑποτιθεμένης ἀλλ᾽ ἔν ἐλλειπτικῆς τῆς ὑπερβολῆς, τὰ τραπεζίδια (σχ. 96) ομομ ἐκληφθῆναι δύνανται ὡς παραλληλόγραμμα, ὧν αἱ παρακείμεναι ταῖς ἴσαις γωνίαις μ, ν πλευραὶ ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογοι.

199. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Τῆς ὑπερβολῆς ἐλλειπτικῆς ϐσης τὰ τραπεζίδια οομμ, ππνν ἔσονται ἴσα τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ τῆς καθέτϐ, τῆς ἀπὸ τοῦ πέρατος ἑκάϛης τεταγμένης μμ, νν ἐπὶ τὴν βάσιν καταγομένης· αἱ δὲ κάθετοι αὗται μεθ᾽ ἑκάϛης τεταγμένης περιέ-

ξουσι τὴν ἀπόμοιραν τῆς ἀσυμπτώτου, τὴν ἀπολαμβανομένην ἀπό τε τῆς τεταγμένης καὶ τῆς καθέτου τῶν ὁμοίων τριγώνων, ὧν τὰ ὕψη εἶεν ἀνάλογα ταῖς ἀντιστοίχοις τεταγμέναις· τὰ ἄρα, περὶ ὧν προείρηται, παραλληλόγραμμα, ἔχοντα ὕψη τὰς καθέτους ταύτας, ἔχουσι τὰς ἑαυτῶν βάσεις ἀντιπεπονθότως ἀναλόγους τοῖς ὕψεσι· διὸ εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις· εἰσὶ δὲ αἱ κάθετοι αὗται καὶ ὡς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀντιστοίχων γωνιῶν οομ = χγμ· ἄρα τὰ ὑπερβολικὰ χωρία τῆς ὑπερβολῆς ἐλλειπτικῆς οὔσης πρὸς τὰ ὑπερβολικὰ χωρία τῆς ὑπερβολῆς οὔσης κυκλικῆς εἰσὶν, ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ἐλλειπτικῆς ὑπερβολῆς περιεχομένης γωνίας πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

200. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ Κα, Κμ, Κν, Κξ κτ, οἱ ὑπερβολικοὶ τομεῖς Καγ, Κμν, Κνκ, κτλ. ἔσονται ἴσοι ἀλλήλοις τε καὶ τοῖς ὑπερβολικοῖς τραπεζίοις αγμμ, μνμν, νκνκ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστι γὰρ Κγ × αγ = Κμ × μμ (186)· ὅθεν Κγ : Κμ :: μμ : αγ, τουτέστι τριγώνων τῶν Κγα Κμμ αἱ τὰς ἴσας γωνίας περιέχουσαι πλευραὶ ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογον· δῆλον οὖν ὡς τὰ ὕψη τῶνδε τῶν τριγώνων εἰσὶν, ὡς αἱ πλευραὶ αγ, μμ, ταὐτὸν εἰπεῖν, ἐν λόγῳ ἀντιπεπονθότι τῶν βάσεων, ἢ καὶ τῶν ἡμιβάσεων· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἰσὶν ἰσάλληλα· κοινῇ δὲ ἀφαιρεθέντος τοῦ Κηγ τριγώνου, καταλειφθήσεται Καη = ηγμμ· κοινῇ δὲ προσεθέντος τοῦ αημ, ἔσεται ὁ τομεὺς Καμ = αγμμ· καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως· Ο. Ε. Δ.

201. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῶν δύω προτεθέντων θεωρημάτων δῆλον, ὡς οἱ τομεῖς, καὶ τὰ ὑπερβολικὰ τραπέζια, τὰ ἐπὶ τῶν κατὰ γεωμετρικὴν πρόοδον χωρούντων ἀποτετμημένων βεβηκότα, συνιστῶσι πρόοδον ἀριθμητικήν· δύναται

ἄρα θεωρηθῆναι ὡς ὄντα αὐτῶν λογάριθμοι (Συμβ. Λογ. 313)· ὅθεν ἐὰν ὑποτεθῇ ὡς ἄρα Κγ ἐμφαίνει ἀριθμὸν, ὃ λογάριθμος ἐστι ο, τὸ χωρίον αγμμ ἐμφανεῖ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ Κμ, τὸ δὲ αγνν, τοῦ Κν, κτ. ἀκέουσι δὲ οὗτοι λογάριθμοι ὑπερβολικοὶ τῆς ὑπερβολῆς κυκλικῆς οὔσης.

202. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ὑποτεθείσης κυκλικῆς τῆς ὑπερβολῆς ακ, καὶ τῆς ἀποτετμημένης Κο = τῇ τεταγμένῃ οο = 1, εὑρεῖν τὸ χωρίον οονν.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τὴν φυσικὴν ἰδιότητα τῆς ὑπερβολῆς ῥηθείσης ον = χ, ἕξομεν οο × Κο = Κν × νν (188), εἴτ' οὖν 1 × 1 = (1 + χ) × υ, εἴτ' οὖν 1 = υ × (1 + χ)· ὅθεν

$$υ = \frac{1}{1 + χ} = 1 - χ + χ^2 - χ^3, \text{ κτ.}$$

τούτου τεθέντος, ἐὰν ἀθροισθῶσι πᾶσαι αἱ υ, αἱ ἀπὸ τῶν τεταγμένων οο, καὶ νν ἀπολαμβανόμεναι, εὑρεθήσεται τὸ ζητούμενον, ἤ, ὃ δὴ ταὐτὸν, ἐὰν εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν σειρῶν $χ^0 - χ + χ^2 - χ^3$ κτ. τῶν ἀντιστοιχουσῶν ἑκάστῃ υ· ἀλλὰ δυνάμεθα τὰς χ ἐπινοῆσαι αὐξούσας κατὰ τὴν πρόοδον ÷ ο. 1 . 2 . 3 . 4, κτ. μέχρι τῆς τελευταίας χ = ον, ἥτις ὑποτεθῆναι ἔχει = ∞, ὡς οὖσα ἀπειράκις μείζων τῆς πρώτης, ἥτις ὑποτίθεται ἐκείνης ἀπειροστή· ἐὰν οὖν ληφθῇ ἡ ἄπειρος σειρὰ τῶν $χ^0 = 1$, εἶτα ἡ ἄπειρος σειρὰ τῶν − χ, εἴτ' οὖν τῶν κατὰ φυσικὴν τάξιν προϊόντων λειπτικῶν ἀριθμῶν − 1 . − 2 . − 3 . − 4, κτ., ἑξῆς δὲ ἡ ἄπειρος σειρὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 κτ., καὶ αἱ σειραὶ τῶν ἀκολούθων ὅρων ὁμοίως, εὑρεθήσεται τὸ ζητούμενον χωρίον· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων 1, 1, 1, 1 κτ. ἐστιν = χ· τὸ δὲ τῶν − χ ἐστιν = −

$\frac{\chi^2}{2}$, τὸ δὲ τῶν χ^3 ἐςὶν $= \frac{\chi^3}{3}$ κτ. (ὡς ἐκ τȣ̃ ἀποδοθέντος (Συμϐ. Λογ. 567) τύπȣ δῆλον)· ἄρα τὸ ζητȣ́μενον χωρίον ἐςὶν $= \chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{2} - \frac{\chi^4}{4}$ κτ.· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ογ $= - \chi$ (ὅτι αἱ ἀπὸ τȣ̃ ο πρὸς τὸ ν χωρȣ̃σαι χ κατ' ἐναντίαν ἔννοιαν ταῖς ἤδη τιθεμέναις ἐλήφθησαν), ἔςαι Κγ $= 1 - \chi$, ϗ ὑποτεθείσης αγ $= \upsilon$, πορισθήσεται $(1 - \chi) \times \upsilon = 1$, εἴτ' ȣ̃ν $\upsilon = \frac{1}{1-\chi}$, ἢ (τῆς διαιρέσεως ἐνεργείᾳ γενομένης) $\upsilon = 1 + \chi + \chi^2 + \chi^3$, κτ. τὸ δὲ χωρίον οοαχγ εὑρεθήσεται ὂν $= \chi + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{3} + \frac{\chi^4}{4}$ κτ. Ο. Ε. Π.

203. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐπείπερ τῶν δύο διαληφθέντων χωρίων, τὸ μὲν ἐμφαίνει τὸν λογάριθμον τȣ̃ ἀριθμȣ̃ Κν, ὅς ἐςι μονάδος μείζων, θάτερον δὲ, τȣ̃ ἀριθμȣ̃ Κγ $< 1 =$ Κο, ἐξ ὑποθέσεως, αἱ ἤδη ἡμῖν εὑρεθεῖσαι σειραὶ ἐμφανȣ̃σι τȣ̀ς ὑπερϐολικȣ̀ς λογαρίθμȣς τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν $1 + \chi$, ϗ $1 - \chi$· ἀλλ' ὁ λογάριθμος τȣ̃ ἀριθμȣ̃ $1 - \chi$, ὅς ἐςιν ἐλάττων μονάδος, ϗ ἑπομένως κλασματίας, ὀφείλει εἶναι λειπτικὸς (Συμϐ. Λογ. 330)· τρεπτέον ἄρα τὸ τῶν ὅρων τῆς δευτέρας σειρᾶς σύμϐολον, ϗ πάντας τȣ̀ς ὅρȣς ἀναδεικτέον λειπτικȣ́ς· ȣ̓κȣ̃ν πορισθήσεται ἐν γένει ἡ σειρὰ $\pm \chi - \frac{\chi^2}{2} \pm \frac{\chi^3}{3} - \frac{\chi^4}{4} \pm \frac{\chi^5}{5}$ κτ., δι' ἧς ἐκδηλȣ̃νται οἱ ὑπερϐολικοὶ λογάριθμοι ἀριθμȣ̃ παντὸς μείζονος, ἢ γȣ̃ν ἐλάττονος, τῆς μονάδος.

204. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ σειρὰ αὕτη ἐ μὴ εὐχρηστήσει, εἰμὴ ὑποτεθείη $\chi = 1$, ἢ $\chi < 1$· ἄλλως γὰρ ἐκ ἂν γένοιτο συγκλίνεσα.

205. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἵν᾽ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμῦ κλασματώδες, ἀφαιρεῖν ἐπάναγκες τῦ κατὰ τὸν ἀριθμητὴν λογαρίθμε τὸν κατὰ τὸν παρονομάζοντα (Συμϐ. Λογ. 336), ἄρα $\Lambda\left(\frac{1+\chi}{1-\chi}\right)$ εὑρεθήσεται ἀφαιρεμένης τῆς σειρᾶς $-\chi - \frac{\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3}$, κ.τ.λ. ἀπὸ τῆς σειρᾶς, $\chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{3}$ κ.τ.λ. ὅθεν εὑρεθήσεται $\Lambda\left(\frac{1+\chi}{1-\chi}\right) = 2\chi + \frac{2\chi^3}{3} + \frac{2\chi^5}{5} +$ κ.τ.λ.

206. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ὑποτεθείσθω $\frac{1+\chi}{1-\chi} = \frac{\pi}{\kappa}$, ἢ δὴ τῶν κλασμάτων ἀρθέντων ποριςθήσεται $\kappa + \kappa\chi = \pi - \pi\chi$, ἢ μεταθέσει, $\kappa\chi + \pi\chi = \pi - \kappa$, ἢ διαιρέσει διὰ $\pi + \kappa$, $\chi = \frac{\pi - \kappa}{\pi + \kappa}$· ἀλλὰ $\Lambda\left(\frac{\pi}{\kappa}\right) = 2\chi + \frac{2\chi^3}{3}$ κτ.· ἐὰν ἄρα ἐν ταύτῃ τῇ σειρᾷ εἰσαχθῶσιν αἱ δυνάμεις τῦ χ, χ, κτ. ποριζόμεναι ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi = \frac{\pi - \kappa}{\pi + \kappa}$, θηρευθήσεται ὁ λογάριθμος ὗτος ἐν ἀριθμοῖς γνωςῶν ὑποτιθεμένων τῶν ἀριθμῶν π ἢ κ.

Ζητηθήτω φέρ᾽ εἰπεῖν ἀριθμῦ τῦ 2 ὁ ὑπερϐολικὸς λογάριθμος· ἐκεῖν ἐςι $\frac{1+\chi}{1-\chi} = \frac{\pi}{\kappa} = \frac{2}{1}$, τιθεμένων

$\pi = 2$ ϗ $\kappa = 1$ (εἴδ' εἴη ὁ προκείμενος ἀριθμὸς κλασματίας ϗ $= \frac{5}{2}$ φέρε, γενήσεται $\frac{5}{2} = \frac{\pi}{\kappa}$)· ϗ δὴ ἕξομεν

$$\chi = \frac{\pi - \kappa}{\pi + \kappa} = \frac{1}{3}$$

· τιθεμένης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῇ σειρᾷ $2\chi + \frac{2\chi}{3} +$ κτ. ποριοθήσεται ὁ ζητέμενος ὑπερβολικὸς λογάριθμος· ὃ δὴ πραχθήσεται ἀναγομένων τῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ προκύπτοντα μέχρι τῶν ἑκατὸν μιλλιονίων

$$\chi = \frac{1}{3} = \frac{1}{1} \times 0,33333333 = 0,33333333$$

$$\frac{\chi^3}{3} = \frac{1}{9} \times \frac{\chi}{3} = \frac{1}{3} \times 0,03703703 = 0,01234567$$

$$\frac{\chi^5}{5} = \frac{1}{9} \times \frac{\chi^3}{5} = \frac{1}{5} \times 0,00411522 = 0,00082304$$

$$\frac{\chi^7}{7} = \frac{1}{9} \times \frac{\chi^5}{7} = \frac{1}{7} \times 0,00045724 = 0,00006532$$

$$\frac{\chi^9}{9} = \frac{1}{9} \times \frac{\chi^7}{9} = \frac{1}{9} \times 0,00005080 = 0,00000564$$

$$\frac{\chi^{11}}{11} = \frac{1}{9} \times \frac{\chi^9}{11} = \frac{1}{11} \times 0,00000564 = 0,00000051$$

ἄθροισμα = ... 0,34657351

ἔ τὸ διπλῦν 0,69314702

ὁ ὑπερβολικός ἐςι λογάριθμος τῦ 2.

207. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐν δυσὶν ὑπερβολαῖς τὰ ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ἀντίσοιχα χωρία, τὰ συγκείμενα ἐκ τῶν βεβηκότων ἐπὶ ταῖς διαφοραῖς τῶν ἐφεξῆς κειμένων ἀποτετμημένων, τῶν κατὰ πρόοδον βαινυσῶν γεωμετρικὴν,

ϗ ἰσȣμένων ἑκάςȣ ἑκάςῳ, εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀτρέπτῳ τὸ τῆς ἑτέρας πρὸς τὸ ἐν θατέρᾳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἰλήφθωσαν γὰρ τέσσαρα χωρία τῆς ἑτέρας ϗ τέσσαρα τῆς ἑτέρας ὑπερβολῆς· ταῦτα ȣ̃ν ἐν ἑκατέρᾳ ἰσάλληλα ἔσονται (196)· τὰ δὲ αὐτῶν ἀθροίσματα, ὧν ἑκάτερον ἐμφαίνει ὁ λογάριθμος τῆς μείζονος ἀποτετμημένης (τῆς πασῶν ἐλάττονος ὑποτιθεμένης = 1), ἔσονται πρὸς ἄλληλα ὡς ἓν ὁποιονȣ̃ν χωρίον τῆς ἑτέρας πρὸς ἓν ὁποιονȣ̃ν χωρίον τῶν ἐν θατέρᾳ· ἄρα κτ.

208. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ ὑπερβολὴ, ἐν ᾗ τὰ μὲν χωρία τῶν ἀσυμπτώτων παρισῶσι τȣ̀ς τῶν κανονίων λογαρίθμȣς, αἱ δ' ἀπὸ τῶν ἀσυμπτώτων ἀποτετμημέναι τȣ̀ς αὐτοῖς συςοιχȣ̃ντας ἀριθμȣ̀ς, εὑρεθήσεται ἀεὶ ὁ λογάριθμος ἀριθμȣ̃ παντὸς τȣ̃ ἐν τοῖς κανονίοις, τȣ̃ 10 δὸς εἰπεῖν, λόγον ἔχων πρὸς τὸν ὑπερβολικὸν λογάριθμον τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃, ὃν ἔχει ὁ ἐν τοῖς κανονίοις λογάριθμος τȣ̃ ἀριθμȣ̃ 2 πρὸς τὸν ὑπερβολικὸν λογάριθμον τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃ 2· ἄρα 0, 301030 (λογ. ἐν τοῖς κανον. τȣ̃ 2) : 0, 693147 (λογ. ὑπερβ. τȣ̃ 2 ἐν ἑπτὰ μόνοις χαρακτῆρσι) :: 1 (λογ. ἐν τοῖς κανον. τȣ̃ 10) : 2, 302585 (λογ. ὑπερβ. τȣ̃ 10)· τοιγαρȣ̃ν, ὅπως ἂν εὑρεθείη λογάριθμος ὁ ἐν τοῖς κανονίοις ἀριθμȣ̃ παντὸς χ, ȣ̃ δέδοται ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος, ὑποτιθεμένȣ μ τȣ̃ ὑπερβολικȣ̃ λογαρίθμȣ τȣ̃ χ, γενέσθω ἡ ἀναλογία· 2, 302585 : 1 :: μ : υ = $\mu \times \frac{1}{2,302585}$, ἢ (ἐνεργείᾳ πραχθείσης τῆς τȣ̃ 1 διὰ 2, 302585 διαιρέσεως) υ = μ × 0, 434294· ἄρα, ἵν' εὑρεθῇ ὁ τοῖς κανονίοις λογάριθμος παντὸς ἀριθμȣ̃, ἀπόχρη πολλαπλασιάσαι τὸν αὐτȣ̃ ὑπερβολικὸν λογάριθμον ἐπὶ 0, 434294· ἐπεὶ δὲ υ

$= \mu \times 0,434$, κτ., πορισθήσεται $\mu = \dfrac{\upsilon \times 1}{0,430,\ \text{κτ.}}$
$= \upsilon \times 2,302585$, τετ' ἔςιν ,, ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθ-
,, μος παντὸς ἀριθμȣ̃ ἴσος ἐςὶ τῷ ἐν τοῖς κανονίοις λογαρίθ-
,, μῳ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ 2,302585.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ ὑπερβολικῶν ἡμιτόνων ϗ συνημιτόνων.

209. Ἐπεὶ δὲ περὶ ὑπερβολικῶν λογαρίθμων εἴρηται, ȣ̓κ ἂν εἴη ἄπο σκοπȣ̃ παραθέσθαι βραχέα ϗ περὶ ὑπερβολικῶν ἡμιτόνων ϗ συνημιτόνων· ὑπερβολῆς ȣ̃ν κυκλικῆς τῆς ΣΑΖ (σχ. 93) ὁ ἡμιάξων ΠΑ $=$ Ο καλείσθω ὁλόκληρον ἡμίτονον ἀναλόγως τῷ κατὰ τὸν κύκλον· ἔςω δὲ $= \mu$ ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος ἀριθμȣ̃ δηλȣμένȣ διὰ ΠΘ, ϗ τετάχθω ΓΘ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἀσυμπτώτῳ ΠΘ, ϗ ἤχθω κάθετος τῷ ἄξονι ἡ ΓΒ· τοιγαρȣ̃ν ἡ μὲν ΠΒ ἔςαι τὸ συνημίτονον, ἡ δὲ ΒΓ τὸ ἡμίτονον τȣ̃ ἀριθμȣ̃ μ· ϗ τὸ μὲν ἡμίτονον τȣ̃ μ δηλȣ́σθω διὰ ἡμ. υ.μ, τὸ δὲ συνημίτονον διὰ συνημ. υ.μ· ἐπεὶ δὲ πρὸς τῷ σημείῳ α ἔςι $\beta\gamma = 0$, ϗ ΠΒ $=$ Ο $=$ ΠΑ ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΣΡ, ΑΚ παραλλήλως τῇ ΘΓ, πορισθήσεται ὑπὲρ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ ΠΚ, ἡμ. υ.μ $= 0$, ϗ συνημ. υ.μ $=$ Ο· οἱ ἀριθμοὶ μ οἱ ἐλάττονες τȣ̃ ΠΚ, ὃν δυνάμεθα ὑποθεῖναι $= 1$ (ἡ γὰρ 1 ἔςι ποσότης λαμβανομένη πρὸς τὸ δοκȣ̃ν) εἰσὶ λειπτικοὶ, ὑπαρκτικὰ μὲν συνημίτονα, λειπτικὰ δὲ ἡμίτονα, ἔχοντες· ἐὰν ȣ̃ν γένηται ΠΘ : ΠΚ :: ΠΚ : ΠΡ, πορισθήσεται ΠΡ $= \dfrac{1}{\text{ΠΘ}}$ (ὅτι ΠΚ $= 1$)· ἐκȣ̃ν ὁ λογάριθ-

μος τῦ ΠΡ ἔσεται = Λ. 1 — μ = ο — μ = — μ, εἴγε ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος τῦ 1 ἐςιν = ο, ὥσπερ ϗ ὁ ἐν τοῖς κανονίοις· ἀχθείσης ῦν τῆς ΣΡ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ εὐθεῖα ΣΓ κάθετος ἐφεςήξει τῷ ἄξονι· ἐπεὶ γὰρ τὰ τρίγωνα ΙΘΓ, ΙΡΣ ὅμοιά εἰσι διὰ τὰς παραλλήλυς ΘΓ, ΡΣ. ἄρα ΙΘ : ΙΡ : : ΘΓ : ΡΣ : : ΡΠ : ΠΘ (διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ὑπερβολῆς) (*) ϗ διαιρέσει λόγυ, ΙΘ : ΡΘ : : ΡΠ : ΡΘ· ἄρα ΙΘ = ΠΡ· ἔςι δὲ ϗ ΠΡ : ΡΚ : : ΥΡ : ΑΚ (διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΠΡΥ, ΠΑΚ) ϗ ἐπείπερ ΠΡ : ΠΚ : : ΠΚ : ΠΘ : : ΘΓ : ΑΚ, ἔσεται ΡΥ : ΑΚ : : ΘΓ : ΑΚ, εἴτ' ῦν ΤΥ : ΘΓ : : ΑΚ : ΑΚ· ἄρα ΘΓ = ΡΥ· ἄρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΠΡΥ, ΙΘΓ ἔχυσι τὰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχύσας πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἄρα εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις· ἡ δὲ γωνία ΘΙΓ = ΥΠΡ· ἀλλὰ ΥΠΡ = 45°· ἄρα ϗ τὸ αὐτῆς παραπλήρωμα ΠΥΡ = 45°· ἄρα τριγώνυ τῦ ΠΒΙ ἔςιν ἥτε Π ϗ Ι γωνία ἑκατέρα = 45°· ἄρα ἡ γωνία Β = 90°· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΣΓΙ κάθετος ἐφέςηκε τῷ ἄξονι.

210. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ ταύτης τῆς δείξεως ἕπεται εἶναι συνημ. υ . μ = συνημ. υ . — μ· ἑκάτερον γάρ ἐςιν = ΠΒ, εἴγε συνημίτονον τῦ μ ἔςι μέρος τῦ ἄξονος ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῦ κέντρυ, ϗ τῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα τεταγμένως ἀγομένης ἀπὸ τῦ σημείυ, ἀφ' ῦ ἄγεται κάθετος τῇ ἀσυμπτώτῳ κατὰ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ λήγει ὁ ἀριθμὸς ΠΡ, ἢ ΠΘ· ἀλλὰ ἡμ. υ — μ = — ημ. υ . μ· ϗ

(*) Ἔςι γὰρ $υχ = x^2$ (188). ἐὰν ῦν κληθῇ $ΠΡ = χ$, ϗ $ΡΣ = υ$, ϗ $ΠΘ = χ'$, ϗ $ΘΓ = υ'$· ἔςαι $χυ = x^2$, ϗ $χ'υ' = x^2$· ἄρα $χυ = χ'υ'$· ἄρα $υ' : υ : : χ : χ'$, εἴτ' ῦν $ΘΓ : ΡΣ : : ΡΠ : ΠΘ$.

γὰρ ἡμ. υ. μ = ΒΓ, ϗ ἡμ. υ. $-\mu$ = ΒΣ· ἀλλὰ καίτοι ΒΓ = ΒΣ, τὸ μὲν ἔμπης ὑπαρκτικὸν, θάτερον δὲ ἐκληφθήσεται λειπτικὸν διὰ τὴν ἐναντίαν αὐτῶν θέσιν.

211. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δοθέντων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων δύω λογαρίθμων μ, ν, εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον ϗ τὸ συνημίτονον τῦ αὐτῶν ἀθροίσματος $\mu + \nu$.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ΠΒ = συνημ. υ. μ, ϗ ΒΓ = ἡμ. υ. μ, ϗ ΠΔ = συνημ. υ. ν, καὶ ΔΖ = ἡμ. υ. ν· καὶ ὑποτεθείσθω ΠΜ = συνημ. υ. $\overline{\mu + \nu}$, ϗ ΜΝ = ημ. υ. $\overline{\mu + \nu}$· ἐπεὶ δὲ ἡ γωνία ΑΠΚ = 45° = ΠΙΒ, ἔςαι ΠΒ = ΒΙ, ϗ δὴ ϗ ΠΔ = ΔΛ, ϗ ΠΜ = ΜΞ· ἔςαι ἄρα ΓΙ = ΙΒ — ΒΓ = ΠΒ — ΒΓ = συνημ. υ. μ — ημ. υ. μ, ϗ ΖΛ = συνημ. υ. ν — ἡμ. υν, ϗ Νκ = συνημ. υ. $\overline{\mu + \nu}$ — ἡμ. υ. $\overline{\mu + \nu}$· παρὰ ταῦτα, ἐπεὶ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΠΚ ἐςὶν ὀρθογώνιον κατὰ τὸ Κ, ϗ ΠΑ = Ο, ἔςαι $ΠΚ^2 + ΑΚ^2$, ἢ $2ΠΚ^2 = Ο^2$, ϗ $ΠΚ^2 = \frac{Ο^2}{2}$ ϗ ΠΚ $= \frac{Ο}{\sqrt{2}}$· διὰ δὲ τὸ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΙΘΓ, ἔςι $2ΘΙ^2 = ΓΙ^2$, ἢ ΘΙ $= \frac{ΓΙ}{\sqrt{2}} = \frac{\text{συνημ. υ. } \mu - \text{ἡμ. υ. } \mu}{\sqrt{2}}$. ὡσαύτως ΗΛ $= \frac{\text{συνημ. υ. } \nu - \text{ἡμ. υ. } \nu}{\sqrt{2}}$, καὶ κΟ $= \frac{\text{συνημ. υ } (\mu + \nu) - \text{ἡμ. υ } (\mu + \nu)}{\sqrt{2}}$· τελευταῖον δὲ, ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΠΒΙ ὀρθογώνιόν ἐςι κατὰ τὸ Β, πρόεισι $ΠΙ^2 = ΠΒ^2 + ΒΙ^2 = 2ΠΒ^2$, ἢ ΠΙ $= \sqrt{2} \times$ συνημ. υ. μ· κατάδηλον δὲ, ὅτι ϗ ΠΛ $= \sqrt{2} \times$ συνημ. υ. ν, ϗ Πκ

$= \sqrt{2} \times$ συνημ. $\upsilon\, \overline{\mu + \nu}$· ἐντεῦθεν ἄρα $\Pi\Theta = \sqrt{2} \times$ συνημ. $\upsilon\mu - \left(\frac{\text{συνημ.}\, \upsilon\mu - \text{ημ.}\, \upsilon\, .\, \mu}{\sqrt{2}}\right)$, ἢ ἀναχθέντος τῦ ὁλοσχερῦς εἰς κλάσμα, $\Pi\Theta = \frac{\text{συνημ.}\, \upsilon\, .\, \mu + \text{ἡμ.}\, \upsilon\, .\, \mu}{\sqrt{2}}$.

ὡσαύτως $\Pi H = \frac{\text{συνημ.}\, \upsilon\, .\, \nu + \text{ἡμ.}\, \upsilon\, .\, \nu}{\sqrt{2}}$, καὶ $\Pi O = \frac{\text{συνημ.}\, \upsilon\, (\mu + \nu) + \text{ἡμ.}\, \upsilon\, (\mu + \nu)}{\sqrt{2}}$. ἀλλὰ ΠΚ : ΠΘ : : ΠΗ : ΠΟ (*)· ἄρα $\frac{O}{\sqrt{2}} : \frac{\text{συνημ.}\, \upsilon\, \mu + \text{ἡμ.}\, \upsilon\, \mu}{\sqrt{2}} : : \frac{\text{συνημ.}\, \upsilon\, .\, \nu + \text{ημ.}\, \upsilon\, .\, \nu}{\sqrt{2}} : \frac{\text{συνημ.}\, \upsilon\, (\mu + \nu) + \text{ημ.}\, \upsilon\, (\mu + \nu)}{\sqrt{2}}$

ὅθεν ἀποφέρεται ἡ ἐξίσωσις (A) συνημ. $\upsilon\, (\mu + \nu) +$ ημ. $\upsilon\, (\mu + \nu) = \frac{(\text{συνημ.}\, \upsilon\, .\, \mu + \text{ημ.}\, \upsilon\, .\, \mu) \times (\text{συνημ.}\, \upsilon\, .\, \nu + \text{ημ.}\, \upsilon\, .\, \nu)}{O}$.

ἐπεὶ δὲ ἡ τῆς κυκλικῆς ὑπερβολῆς ἐξίσωσις (164) δίδωσιν $\upsilon^2 = B\Gamma^2 = \overline{\text{ημ.}\, \upsilon\, .\, \mu}^2 = \chi^2 - \alpha^2 = \Pi B^2 - \Pi A$ $= \overline{\text{συνημ.}\, \upsilon\, .\, \mu}^2 - O^2$ · ἄρα $\overline{\text{συνημ.}\, \upsilon\, .\, \mu}^2 - \overline{\text{ημ.}\, \upsilon\, .\, \mu}^2 = O^2 = (\text{συνημ.}\, \upsilon\, .\, \mu + \text{ημ.}\, \upsilon\, .\, \mu) \times (\text{συνημ.}\, \upsilon\, .\, \mu - \text{ημ.}\, \upsilon\, .\, \nu)$,

(*) Ὁ μὲν γὰρ λογάριθμος τῦ ΠΚ = ι ἔςιν = ο· τῦ δὲ κατὰ τὸν ΠΟ ἴσε ὄντος ἐξ ὑποθέσεως τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῦ ΠΘ ϗ τῦ ΠΗ, οἱ λογάριθμοι τῦ ΠΚ ϗ τῦ ΠΟ ἔσονται ὅροι ἄκροι ἀναλογίας ἀριθμητικῆς, ἧς μέσοι ἔσονται οἱ λογάριθμοι τῦ ΠΘ ϗ τῦ ΠΗ· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ, ὧν ἦτοί εἰσι λογάριθμοι, συγκροτῦσιν ἀναλογίαν γεωμετρικήν.

ἢ $\text{συνημ. } \upsilon.\mu + \text{ημ. } \upsilon.\mu = \dfrac{O^2}{\text{συνημ. } \upsilon.\mu - \text{ημ. } \upsilon.\mu}$· διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον, $\text{συνημ. } \upsilon.\nu + \text{ημ. } \upsilon.\nu = \dfrac{O^2}{\text{συνημ. } \upsilon.\nu - \text{ημ. } \upsilon.\nu}$, ϗ $\text{συνημ. } \upsilon.\overline{\mu+\nu} + \text{ημ. } \upsilon.\overline{\mu+\nu} = \dfrac{O^2}{\text{συνημ. } \upsilon(\mu+\nu) - \text{ημ. } \upsilon(\mu+\nu)}$· εἰσαχθεισῶν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει Α τῶν εὑρεθεισῶν δυνάμεων τοῦ $\text{συνημ. } \upsilon\mu + \text{ημ. } \upsilon\mu$, ϗ τοῦ $\text{συνημ. } \upsilon.\nu + \text{ημ. } \upsilon.\nu$, ϗ ἀναγωγῆς γενομένης, πορισθήσεται

$$\frac{O^2}{\text{συνημ. } \upsilon(\mu+\nu) - \text{ημ. } \upsilon(\mu+\nu)} = \text{συνημ. } \upsilon(\mu+\nu) + \text{ημ. } \upsilon(\mu+\nu) = \frac{O^3}{(\text{συνημ. } \upsilon\mu - \text{ημ. } \upsilon\mu) \times (\text{συνημ. } \upsilon.\nu - \text{ημ. } \upsilon.\nu)}$$

· αἰρομένων ἄρα τῶν κλασμάτων, διαιρέσει διὰ O^3 ϗ μεταθέσει, εὑρεθήσεται ἡ ἐξίσωσις $\text{συνημ. } \upsilon\,\overline{\mu+\nu} - \text{ημ. } \upsilon\,\overline{\mu+\nu} = \dfrac{(\text{συνημ. } \upsilon\mu - \text{ημ. } \upsilon\mu)}{O}$ $\dfrac{\times\ (\text{συνημ. } \upsilon.\nu - \text{ημ. } \upsilon.\nu)}{O}$ (Β)· συναπτομένης δὲ τῆς ἐξισώσεως Β τῇ ἐξισώσει Α (τὰς δὲ δύω ἐξισώσεις ταύτας ὡς δύω ἐξαίρετα θεωρήματα ἐκληπτέον)· εἶτα ἀφαιρουμένης Β ἀπὸ τῆς Α εὑρεθήσεται $\text{συνημ. } \upsilon(\mu+\nu) =$

$$\frac{(\text{συνημ. } \upsilon\mu + \text{ημ. } \upsilon\mu) \times \overline{(\text{συνημ. } \upsilon.\nu + \text{ημ. } \upsilon.\nu}}{2O} + \frac{\overline{\text{συνημ. } \upsilon\mu - \text{ημ. } \upsilon\mu) \times (\text{συνημ. } \upsilon\nu - \text{ημ. } \upsilon\nu)}}{2O} \quad (\Gamma)$$

$$\text{ϗ ἡμ. υ } (\mu + \nu) = \frac{\overline{(\text{συνημ. υ } \mu + \text{ ημ. υ } \mu) \times}}{2\text{O}}$$

$$\frac{\overline{(\text{συνημ. υ.}\nu \times \text{ημ. υ.}\nu) - (\text{συνημ. υ } \mu. - \text{ ημ. υ } \mu}}{2\text{O}}$$

$$\frac{\overline{\times \text{ συνημ. υ}\nu \mp \text{ ημ. υ}\nu)}}{2\text{O}} = \frac{\text{συνημ. υ.}\mu \times \text{ημ. υ.}\nu +}{\text{O}}$$

$$\frac{\text{συνημ. υ.}\nu \times \text{ημ. υ.}\mu}{\text{O}} \ (\Delta). \text{ Ο. Ε. Π.}$$

212. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὸ συνημίτονον ϗ τὸ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς δύω λογαρίθμων μ ϗ ν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\mu > \nu$, ἀπόχρη θεῖναι ἐν τοῖς δυσὶν ἐσχάτοις τύποις ἀντὶ συνημ. υ.ν ϗ ἡμ. υ.ν, τὰς ποσότητας συνμ. υ—ν ϗ ἡμ. υ—ν· ἀλλὰ ἡμ. υ—ν = — ημ. υ.ν, ϗ συνημ. υ—ν = συνημ. υ.ν (εἰ γὰρ ΠΡ ὑποτεθείη ἴσος ἀριθμῷ $< \iota =$ ΠΚ, τὸ μὲν ἡμίτονον αὐτῦ ΣΒ ἔςιν ἀριθμὸς λειπτικὸς, τὸ δὲ αὐτῦ συνημίτονον ΠΒ προδήλως ὑπαρκτικός)· ἀπόχρη ἄρα ἐν τοῖς προεκτεθεῖσι τύποις ἀπονεῖμαι τὸ σύμβολον — τῷ ημ. υ.ν· καὶ δὴ πορισθήσεται

$$\text{συνημ. υ } (\mu - \nu) = \frac{\text{συνημ. υ.}\mu \times \text{συνημ. υ.}\nu -}{\text{O}}$$

$$\frac{\text{ημ. υ.}\mu \times \text{ημ. υ.}\nu}{\text{O}}, \ \text{ἡμιτ. υ } (\mu - \nu) = \frac{\text{συνημ. υ.}\nu \times \text{ημ υ.}\mu}{\text{O}}$$

$$\frac{- \text{ συνημ. υ.}\mu \times \text{ημ. υ.}\nu.}{\text{O}}$$

Ἐὰν δ ὑποτεθῇ μ—ν, συνήφθω ἡ ἐξίσωσις Δ τῇ ἐξισώσει Γ, ϗ εἶτα ἀφηρήσθω ἡ Δ τῆς Γ· ϗ δὴ εὑρε-

θήσονται δύω ἕτεραι ἐξισώσεις

$$\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon.\,2\mu + \eta\mu.\,\upsilon.\,2\mu = \frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon.\mu + \eta\mu.\,\upsilon.\mu)^2}{O} \quad (Z)$$

$$\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon.\,2\mu - \eta\mu.\,\upsilon.\,2\mu = \frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon.\mu - \eta\mu.\,\upsilon.\mu)^2}{O} \quad (\Theta).$$

συναπτομένης δὲ τῆς Θ τῇ Ζ ϰ̀ διὰ 2 διαιρȣμένης, εἶτα δὲ τῆς Θ ἀπὸ τῆς Ζ ἀπαγομένης ϰ̀ διὰ 2 διαιρȣμένης, προΐασιν αἱ δύω ἐφεξῆς ἐξισώσεις

$$\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon.\,2\mu = \frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon.\mu + \eta\mu.\,\upsilon.\mu)^2 +}{2O}$$

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon.\mu - \eta\mu.\,\upsilon.\mu)^2}{2O}, \quad \eta\mu.\,\upsilon\,2\mu =$$

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon\,\mu + \eta\mu.\,\upsilon\,\mu)^2 - (\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon\,\mu - \eta\mu.\,\upsilon\mu)^2}{2O}$$

ἐὰν δὲ πρὶν ἢ ἀλλήλαις συναφθῶσιν, ἢ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἐξισώσεις Θ, Ζ, ἐξαχθῶσιν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι αὐτῶν, ἐν τῇ μετ' ἀλλήλων συνάψει, ϰ̀ ἐν τῇ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσει, προΐασιν αἱ ἐξισώσεις

$$\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon\,\mu = \frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon\,2\mu + \eta\mu.\,\upsilon\,2\mu)^{\frac{1}{2}} +}{2O^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon\,2\mu - \eta\mu.\,\upsilon\,2\mu)^{\frac{1}{2}}}{2O^{\frac{1}{2}}}, \quad \eta\mu.\,\upsilon\,\mu =$$

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon\,\mu + \eta\mu.\,\upsilon\,2\mu)^{\frac{1}{2}} - (\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\,\upsilon\,2\mu - \eta\mu.\,\upsilon\,2\mu)^{\frac{1}{2}}}{2O^{\frac{1}{2}}}.$$

ἐὰν δὲ τοῖς δυσὶ λογαρίθμοις μ, ν προσεθῇ τρίτος ὁ π, ἐκ τῶν ἐξισώσεων Α, Β (211) ἕπεται

$$\text{συνημ. υ}\,(\mu+\nu+\pi) + \text{ἡμ. υ}\,(\mu+\nu+\pi) = \frac{\overline{\text{συνημ. υ}\,(\mu+\nu) + \text{ημ. υ}\,(\mu+\nu)} \times \overline{\text{συνημ. υ}\,\pi + \text{ημ. υ}\,\pi}}{O},$$

$$\text{ϗ συνημ. υ}\,(\mu+\nu+\pi) - \text{ἡμ. υ}\,(\mu+\nu+\pi) = \frac{\overline{\text{συνημ. υ}\,(\mu+\nu) - \text{ημ. υ}\,(\mu+\nu)} \times \overline{\text{συνημ. υ}\,\pi - \text{ημ. υ}\,\pi}}{O}.$$

εἰσαχθεισῶν δὲ ἐν ταύταις ταῖς ἐξισώσεσι τῶν δυνάμεων τῦ συνημ. υ $(\mu+\nu)$ + ημ. υ $(\mu+\nu)$ ϗ τῦ συνημ. υ $(\mu+\nu)$ — ημ. υ $(\mu+\nu)$, λαμβανομένων ἐκ τῶν ἐξισώσεων A, B, πορισθήσονται ταῦτα τὰ δύω ἄλλα θεωρήματα·

$$\text{συνημ. υ}\,(\mu+\nu+\pi) + \text{ἡμ. υ}\,(\mu+\nu+\pi) = \frac{(\text{συνημ. υ}\,\mu + \text{ημ. υ}\,\mu) \times (\text{συνημ. υ.}\,\nu + \text{ημ. υ.}\,\nu)}{O^2} \times \frac{(\text{συνημ. υ}\,\pi + \text{ημ. υ}\,\pi)}{O^2} \quad (\text{H})\cdot$$

$$\text{συνημ. υ}\,(\mu+\nu+\pi) - \text{ἡμ. υ}\,(\mu+\nu+\pi) = \frac{(\text{συνημ. υ}\,\mu - \text{ημ. υ}\,\mu)}{O^2} . \frac{(\text{συνημ. υ}\,\nu - \text{ημ. υ}\,\nu) . (\text{συνημ. υ.}\,\pi - \text{ημ. υ}\,\pi)}{O^2} \quad (\text{I})\cdot$$

ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\mu = \nu = \pi$, ϗ προςεθῇ ἡ I τῇ H, καὶ ἀπ' αὐτῆς εἶτα ἀφαιρεθῇ, προκύψυσι

$$\text{συνημ. υ.}\,3\mu = \frac{(\text{συνημ. υ.}\,\mu + \text{ημ. υ}\,\mu)^3}{2.O^2} + \frac{(\text{συνημ. υ.}\,\mu + \text{ημ. υ}\,\mu)^3}{2.O^2},\ \text{ϗ ἡμ. υ.}\,3\mu =$$

$$\frac{(\text{συνημ. υ}\,\mu + \text{ημ. υ}\,\mu)^3 - (\text{συνημ. υ}\,\mu - \text{ημ. υ}\,\mu)^3}{2.O^2}.$$

ἐὰν δὲ πρὸ τῆς προσθέσεως ϗ ἀφαιρέσεως ληφθῶσιν αἱ κυβικαὶ ῥίζαι, εὑρεθήσεται

$$\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon.\mu = \frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\ 3\mu + \eta\mu.\ \upsilon\ 3\mu)^{\frac{1}{3}}}{2.\ O^{\frac{2}{3}}} +$$

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\ 3\mu - \eta\mu.\ \upsilon\ 3\mu)^{\frac{1}{3}}}{2.\ O^{\frac{2}{3}}},\ \text{ϗ}\ \eta\mu.\ \upsilon\mu =$$

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon.\ 3\mu + \eta\mu.\upsilon.\ 3\mu)^{\frac{1}{3}} - (\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\ 3\mu + \eta\mu\ \upsilon\ 3\mu)^{\frac{1}{3}}}{2.\ O^{\frac{2}{3}}}$$

καὶ ἐν γένει:

$$\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon.\ \nu\mu = \frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\ \mu - \eta\mu.\ \upsilon\mu)^{\nu}}{2.\ o^{\nu-1}} +$$

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\ \mu - \eta\mu.\ \upsilon\ \mu)^{\nu}}{2.\ o^{\nu-1}},\ \text{ϗ}\ \eta\mu.\ \upsilon.\ \nu\mu =$$

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon.\ \mu + \eta\mu.\ \upsilon\ \mu)^{\nu} - (\sigma\upsilon\nu\eta\mu.\ \upsilon\ \mu - \eta\mu.\ \upsilon\ \mu)}{2.\ o^{\nu-1}}$$

τȣ̃ ν πάντα ἀριθμὸν δυναμένȣ. Παραβαλλομένων δὲ τῶν δε τῶν τύπων πρὸς τὰς τῶν ἡμιτόνων ϗ συνημιτόνων τῶν πολλαπλῶν κυκλικῶν τόξων (Γεωμ. 507, 508), μεγάλη ἀναλογία φανήσεται τῶν κυκλικῶν πρὸς τὰ ὑπερβολικά.

ΚΕΦΑΛ. ΔΕΚΑΤ. ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ διαμέτρων τῆς ὑπερβολῆς.

213. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Πᾶσα διάτετρος Μν δίχα τέμνεται κατὰ τὸ κέντρον (σχ. 99).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἤχθω τεταγμένως ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ ΜΕ ϗ ἔσω ΚΔ = ΚΕ, ϗ Δμ κάθετος τῇ ΚΔ· ȣ̓κȣ̃ν τὸ ΚΕΜ = ΚΔμ· ἄρα ΕΜ = Δμ· ἀλλ' ἐν τῇ ὑπερβολῇ δύω ἴσον ἀπέχȣσαι τȣ̃ κέντρȣ Κ εἰσὶν ἴσαι· τῆς ΕΜ ἄρα τεταγμένης ȣ̓́σης, ϗ Δμ ἔσεται τεταγμένη· ἄρα τὸ σημεῖον μ πέρας τῆς Δμ ϗ τῆς Μμ ὡσαύτως ἔςαι ἐν τῇ καμπύλῃ· ἄρα Κμ = ΚΜ ἔςι τὸ ἀληθὲς μέρος τῆς διαμέτρȣ τὸ ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ Κ ϗ τῆς καμπύλης ἀπολαμβανόμενον. Ο. Ε. Δ.

214. ΘΕΩΡΗΜΑ Β. Πᾶσα διάμετρος μΜδ δίχα τέμνει τὰς ἐφ' ἑαυτὴν διπλᾶς τεταγμένας, δΙ = δτ (σχ. 100).

ΔΕΙΞΙΣ Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΜΤ, Κδρ ἔςι ΜΤ : δρ :: ΚΜ : Κδ· ἐκ δὲ τῶν ΚξΜ, Κοδ ὁμοίων ϗ αὐτῶν, Μξ : δο :: ΚΜ : Κδ· ἄρα ΜΤ : δρ :: Μξ : δο, ϗ ἐναλλὰξ, ΜΤ : Μζ :: δρ δο· ἀλλὰ ΜΤ = Μξ (190)· ἄρα δρ = δο· ἀλλὰ Ιρ = οτ (189)· ἄρα δΙ = δτ. Ο. Ε. Δ.

215. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὁρίζεται ἐν ὑπερβολῇ διάμετρος ἡ Μ″μ′ συζυγὴς ἑτέρᾳ διαμέτρῳ τῇ Μμ, διαπερωμένης διὰ τȣ̃ Κ κέντρȣ τῆς Μ″μ′ παραλλήλȣ τῇ ΤΜ ἀπτομέ-

νῃ διὰ Μ ἀρχῆς τῆς πρώτης διαμέτρȣ Μμ διηκέσῃ, ϗ γινομένης Κμ′ ϗ ΚΜ″ = ΤΜ.

216. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ′. Ἐν ὑπερβολῇ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τεταγμένης ἐπὶ διάμετρον Μμ ἔςι πρὸς τὸ περιεχόμενον ἐκ τῶν ὑπ᾽ αὐτῆς ἀποτετμημένων, εἴτ᾽ ȣ̄ν $\delta\mu \times \delta M$, ὡς τὸ τετράγωνον $K\mu'^2$ τὸ ἀπὸ τῆς συζυγȣ̃ς ἡμιδιαμέτρȣ πρὸς τὸ τετράγωνον KM^2 τὸ ἀπὸ τῆς ἑτέρας συζυγȣ̃ς.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω $\delta\tau = \upsilon$, ϗ $K\mu' = \beta$, ϗ $KM = \alpha$, ϗ $K\delta = \chi$· ὅθεν $\delta M = \chi - \alpha$, ϗ $\delta\mu = \chi + \alpha$, ϗ $\delta M \times \delta\mu = \chi^2 - \alpha^2$· φημὶ δὴ ὡς ἔςιν $\upsilon^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$.

Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΚΜΤ, Κδρ, ἔςι $KM = \alpha : TM :: K\delta = \chi : \delta\rho$· ἀλλὰ $TM = K\mu = \beta$ (215)· ἄρα $\alpha : \beta :: \chi : \delta\rho$· ἄρα $\delta\rho = \frac{\beta\chi}{\alpha}$· ἔςι δὲ $I\delta = \delta\tau$ (214) υ. ἄρα $I\rho = \frac{\beta\chi}{\alpha} - \upsilon$, ϗ $Io = I\delta + \delta\tau + \tau o, = \frac{\delta\chi}{\alpha} + \upsilon$ (ἐπεὶ $\tau o = I\rho$)· ἄρα $I\rho \times Io = \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \upsilon^2$

Ἀλλὰ $I\rho \times Io = MT^2$ (193), $K\mu'^2 = \beta^2$· ἄρα $\beta^2 = \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \upsilon^2$· ἄρα $\upsilon^2\ \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \beta^2 = \frac{\beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^2}$· ἐντεῦθεν ἄρα $\upsilon^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (Ρ) Ο. Ε. Δ.

217. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πρὸς τῷ κέντρῳ μὲν τῆς ἀποτο-

μῆς γινομένης, ὡς δέδεικται, ἔςαι $υ^2 = \frac{β^2χ^2 - α^2β^2}{α^2}$ ἐξίσωσις τῶν ἐπὶ πᾶσαν διάμετρον τεταγμένων· ὁ δὲ τύπος ταὐτίζεται τῷ εὑρεθέντι ὑπὲρ τῶν ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα τεταγμένων (164).

Πρὸς μέντοι τῇ κορυφῇ Μ τῆς διαμέτρε Μμ ἀρχομένης τῆς ἀποτομῆς, ἔςαι δΜ $= χ$, ϗ δμ $= 2α + χ$, ϗ δΜ × δμ $= 2αχ + χ^2$· ἡ δὲ ῥηθεῖσα ἐξίσωσις ἐπὶ πάσης διαμέτρε γενήσεται $υ^2 \frac{2αχβ^2 + χ^2β^2}{α^2}$, ὥσπερ κἀπὶ τε πρώτε ἄξονος εὕρηται (166).

218. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἐν ὑπερβολῇ τὸ ὑπὸ δύω συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ΚΜμΤ, ἰσεται τῷ ὑπὸ τῶν ἡμιαξόνων ΒηΚΣ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ Μν × Κν = ΚΠ × ΣΠ (186, 187) ἔςι ΚΠ : Κν :: Μν : ΣΠ· ἤχθωσαν ἐν κάθετοι αἱ Μυ, Σχ· ἐκ δὴ τῶν ὁμοίων τριγώνων Μυν, ΣχΠ (*) ἔςαι Μν : ΣΠ :: Μυ : Σχ· ἄρα ΚΠ : Κν :: Μυ : Σχ· ἄρα ΚΠ × Σχ = Κν × Μυ.

Παρὰ ταῦτα α΄. ΚΠ × Σχ = 2ΚΠΣ (Γεωμ. 285)· ἔςι δὲ 2ΚΠΣ = ΚηΣ, ὅτι ΚΠ = Πη (Γεωμ. 244)· ἄρα Κν × Μυ = ΚηΣ· β΄. Κν × Μυ = ΚΜΤ· ἐπεὶ Κν × Μυ = 2ΚνΜ = 2ΚΜΑ (Γεωμ. 237)· ἀλλὰ 2ΚΜΑ =

(*) Ἡ μὲν γὰρ Μν ἔςι παράλληλος τῇ ἀσυμπτώτῳ Κρ· ἀλλὰ ϗ ΣΠ ἔςι παράλληλος τῇ αὐτῇ ἀσυμπτώτῳ Κρ, ὅτι ἐκ κατασκευῆς (179) παραλληλόγραμμόν ἐςι τὸ ΒΣΚη· ἄρα Μν παράλληλός ἐςι τῇ ΣΠ· ἐντεῦθεν ἄρα δύω τρίγωνα τὰ Μνυ, ΣΠχ ἔχεσι δύω πλευρὰς παραλλήλες ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ϗ ἑπομένως εἰσὶν ὅμοια.

ΚΜΤ, εἴγε ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΚξΤ, ΤΜΑ, ἐςὶ ΤΚ : ΤΑ :: Τξ : ΤΜ· ἄρα ἐπεὶ $ТМ = \frac{Т\xi}{2}$ (190), ἔςαι $ТА = \frac{ТК}{2}$· ἄρα 2ΚΜΑ = ΚΜΤ· ἄρα Κυ × Μυ = ΚΜΤ· ἄρα ΚηΣ = ΚΜΤ· ἐντεῦθεν ἄρα (Γεωμ. 237), τὸ ὅλον ὀρθογώνιον ΒηΚΣ, τὸ ὑπὸ τῶν δύω ἡμιαξόνων περιεχόμενον, ἴσον ἐςὶ τῷ ὅλῳ παραλληλογράμμῳ ΚΜμΤ, τῷ ὑπὸ δύω συζυγῶν ἡμιδιαμέτρων περιεχομένῳ (Συμϐ. Λογ. 234) Ο. Ε. Δ.

219. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὡς δέδεικται κἀν τῇ ἐλλείψει, ἐπεὶ ΚΤΜμ′ = μ′Κ × ΜΞ, ἔςαι ΜΞ × μΚ = ΚΣ (= x) × ΒΚ (= β) (181).

220. Ἐὰν αἱ ἐπὶ ἀσύμπτωτον ὑπερϐολῆς τεταγμέναι ΜΡ, παράλληλοι δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ ΚΒ, προαχθῶσιν, ἐς ὃ ἂν γένηται ΜΡ = ΡΔ· αὐτὸ δὲ τοῦτο γένηται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τριῶν κλωνῶν τῶν δύω ἀντικειμένων ὑπερϐολῶν, διὰ δὲ τῶν οὕτως ὁριζομένων σημείων διαχθῶσιν αἱ καμπύλαι δΛΔ, Νλν, πορισθήσονται δύω ἀντικείμεναι ὑπερϐολαί, αἵτινες κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι ταῖς ΜΣμ, Οσο, ὡς καὶ αὗται ἐκείναις, ἀκοῦσι, τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πᾶσαι ἄξονας, πλὴν ὅτι, ὁ μὲν δεύτερος τῶν πρώτων ἔςαι πρῶτος, ὁ δὲ πρῶτος, δεύτερος ἄξων τῶν δευτέρων ὑπερβολῶν· ὅτι δὲ ὑπερβολαὶ ἡμῖν αἱ καμπύλαι, δῆλον· ὄντος γὰρ ΚΡ × ΜΡ = ΚΥ^2 = $\varkappa^2$, ἐπεὶ ΜΡ = ΡΔ, ἔςαι καὶ ΚΠ × ΡΔ = ΚΥ^2 = $\varkappa^2$ (188) = $\chi\upsilon$.

221. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄρα $\upsilon = \frac{\varkappa^2}{\chi}$ ἐπὶ ἑκατέρου

τῶν κλωνῶν ΣΜ, ΛΔ· ὅσῳ τοίνυν αὔξει ἡ χ, τοσέτῳ μειῦται ἡ υ, τὺτ᾽ ἔςιν αἱ τεταγμέναι ἐπὶ τὺς συςοίχυς κλῶνας τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ὑπερβολῶν ἐν λόγῳ εἰσὶν ἀντιπεπονθότι τῶν ὑπ᾽ αὐτῶν ἀποτετμημένων πρὸς τῷ κέντρῳ· ἐὰν δὲ γένηται $\chi = \infty$, ἔςαι $\upsilon = \frac{\kappa^2}{\infty} = o$ (Συμβ. Λογ. 530), τὑτέςιν ἡ ἀσύμπτωτος ΓΡ ἐφάψεται ἑκατέρυ κλωνὸς, ὅταν οἵτε κλῶνες ϗ ἡ ἀσύμπτωτος ἐπ᾽ ἄπειρον προαχθέντα ἐπινοηθῶσι· συνελόντι δ᾽ εἰπεῖν, αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν πρώτων ὑπερβολῶν ἔσονται αἱ αὐταὶ ταῖς τῶν κατὰ συζυγίαν ἐκείναις ἀντικειμένων· ἐὰν ὖν οἱ ὀκτὼ κλῶνες προαχθῶσιν ἐπ᾽ ἄπειρον, συνδραμῦνται ἀδιατμήτως ταῖς ἀσυμπτώτοις ἀνὰ δύω, ϗ ὕτως ἀπογεννηθήσεται σχῆμα, πρὸς τοῖς τέσσαρσι τοῖς συνδρομῆς σημείοις περατύμενον, τοῖς τῦ κέντρυ ἀπείρως ἀπέχυσι.

222. Ἤχθω ἐκ τῦ Σ τεταγμένως ἡ ΣΥ, ϗ προήχθω εἰς τὴν συζυγῆ ὑπερβολήν· ἐπεὶ ὖν ἐςι ΜΡ = ΡΔ ἔςαι ϗ ΣΥ = ΥΛ· τὸ δὲ Λ ἔςαι κορυφὴ τῆς ὑπερβολῆς δΛΔ, καθάπερ ϗ τὸ Σ τῆς ΜΣμ· ἐπεὶ δὲ αἱ ἀσύμπτωτοι ἁπάσης ὑπερβολῆς ποϱίζονται ἀγομένων εὐθειῶν ἐκ τῦ κέντρυ Κ, ϗ τῶν περάτων b, Β εὐθείας καθέτυ ἀγομένης τῷ πρώτῳ ἄξονι, ἰσυμένης τῷ δευτέρῳ, ϗ δίχα τεμνομένης ὑπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὑπερβολῆς (179), δῆλον ὅτι Αb μέν ἐςι δεύτερος ἡμιάξων, ΛΚ δὲ πρῶτος ἡμιάξων τῆς δΛΔ ὑπερβολῆς.

223. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Ἐὰν ἐκ τῦ πέρατος Δ τῆς ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον τῆς ὑπερβολῆς δΛΔ τεταγμένης ἀχθῇ εὐθεῖα ἡ ΔΚΝ, διὰ μὲν τῦ κέντρυ Κ διήκυσα, τῇ δ᾽ ἀντικειμένῃ ὑπερβολῇ συμβάλλυσα, ἡ ΔΝ ἔςαι συ-

ζυγῆς διάμετρος τῆς ΜΟ, τῆς ἀπὸ τῦ Δ σημείῳ τῦ ἀντισοίχῳ τῷ Ν ἀρχομένης, ϗ διὰ τῦ κέντρῳ διερχομένης, ϗ πρὸς τῷ Ο σημείῳ τῆς ΟσΟ ὑπερβολῆς περατῳμένης.

ΔΕΙΞΙΣ. Διάμετρος γὰρ συζυγὴς τῇ ΜΟ ἐστιν ἡ ἀγομένη διὰ τῦ κέντρῳ Κ παραλλήλως τῇ κατὰ τὸ Μ ἁπτομένῃ ϑΜε (215)· ἀλλ' ἐστὶ ΚΔ = Μϑ, ϗ ΚΝ = Με διὰ τὰ παραλληλόγραμμα ΚΔΜϑ, ΚεΜΝ· ἐπεὶ γὰρ ἐκ κατασκευῆς ΔΠ = ΠΜ, ϗ ΔΜ = Κϑ, (εἴγε διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα εΔϑ, εΡΜ ἐπεί ἐστι ϑε = 2Με (190), ἐστὶ ϗ Κϑ = 2ΡΜ = ΔΜ)· ἄρα τὸ ΔΚΜϑ ἐστὶ παραλληλόγραμμον, ϗ ΔΚ παράλληλός ἐστι πρὸς τὴν Μϑ, ὅπερ ἀπαιτεῖ ἡ ἰδιότης τῶν συζυγῶν διαμέτρων. Ο. Ε. Δ.

224. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ ἄρα συζυγεῖς ὑπερβολαὶ διήκῳσι διὰ τῶν περάτων τῶν συζυγῶν διαμέτρων τῶν ἐν ταῖς πρώταις ὑπερβολαῖς, ϗ τὸ ἀνάπαλιν.

225. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἐξίσωσις τῶν ὑπερβολῶν, αἷς ἄξων ἐστὶ Σσ, ὑπάρχει $υ = \frac{β^2}{α^2} = (χ^2 - α^2)$ (164)· ἀλλὰ τῦ Σσ ὄντος δευτέρῳ ἄξονος τῶν συζυγῶν ὑπερβολῶν, ἡ αὐτῶν ἐξίσωσις περιέχῳσα τὸν εἰρημένον ἄξονα ἐστὶ $Υ^2 = \frac{β^2}{α^2} \times (α^2 + χ'χ')$, ὡς εἴτις ἐπισαμένως τὰ ῥηθέντα (171) ἐπισκέψαιτο γνώσεται· ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις αὕτη τῆς προτέρας μακρῷ διενήνοχεν· ἄρα αἱ συζυγεῖς ὑπερβολαὶ, ἐὰν μὴ ὦσι κυκλικαὶ, μακρῷ διαφέρῳσι τῶν αὐταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων.

225. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῆς εἰρημένης σημειώσεως μανθάνομεν, ὡς εἰ ληφθεῖεν δύω τεταγμέναι ἐπὶ τὸν πρω-

τον ἄξονα τῆς ὑπερβολῆς ΣΜ, ϗ κληθεῖεν υ Υ, ϗ δύω τεταγμέναι ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἄξονα Σσ τῆς ὑπερβολῆς ΛΔ, ϗ κληθεῖεν π, Π, πορισθήσεται $υ^2 = \frac{β^2}{α^2}(χ^2 - α^2)$ καὶ $Υ^2 = \frac{β^2}{α^2}(χ'χ' - α^2)$, καὶ $π^2 = \frac{β^2}{α^2}(α^2 + ω^2)$ καὶ $Π^2 = \frac{β^2}{α^2}(α^2 + ω'ω')$· συντομίας δὲ χάριν ὑποτεθέντων $\frac{β^2}{α^2} = δ$, ϗ $χ^2 - α^2 = σ$, ϗ $χ'χ' - α^2 = Σ$ ϗ $αα + ω^2 = ξ$, ϗ $αα + ω'ω' = Ξ$ (ω δὲ ϗ ω' τὰς ἐν τῇ ὑπερβολῇ δΛΔ ἀποτετμημένας ἐμφαινόντων) προκύψουσιν $υ^2 : δσ :: Υ^2 : δΣ :: π^2 : δξ :: Π^2 : δΣ$· (εἴγε ἑκάστου τῶν δε τῶν λόγων οἱ ὅροι εἰσὶν ἰσάλληλοι)· διαιρεθέντων δὲ ἑκάστου τῶν ἑπομένων ὅρων διὰ δ, πρόεισιν $υ^2 : σ :: Υ^2 : Σ :: π^2 : ξ :: Π^2 : Ξ$· ἐκ τούτων ἄρα δῆλον ὅτι $υ^2 : σ :: π^2 : ξ$, εἴτ' οὖν (ἀντικαθισαμένων τῶν δυνάμεων τοῦ σ, ϗ ξ) $υ^2 : χ^2 - α^2 :: π^2 : αα + ω^2$· ὅθεν ϗ $υ^2 : π^2 :: χ^2 - α^2 : α^2 + ω^2$· „τοῦτ' ἔστι τὰ „τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων, ὧν αἱ μὲν ἐπὶ „τὴν ἑτέραν, αἱ δ' ἐπὶ τὴν ἑτέραν τῶν ἀντιστοίχων συ-„ζυγῶν ὑπερβολῶν τετάχαται, λόγον ἔχουσι πρὸς ἄλλη-„λα, ὃν τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀποτετμημένων πρὸς τῷ „κέντρῳ ἀπὸ τοῦ πρώτου ἄξονος πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀπὸ τοῦ „δετοῦ πρώτου ἄξονος τετραγώνου, ϗ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ „τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένης ὑπὸ τεταγμένης „ἀπὸ τυχόντος σημείου τῆς ὑπερβολῆς τῆς συζυγοῦς ἐπ' „αὐτὸν ἐκεῖνον τὸν πρῶτον ἄξονα.“

226. ΘΕΩΡΗΜΑ ς'. Ἐὰν ἀπὸ τῶν περάτων Μ,

Ν δύω συζυγῶν διαμέτρων ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα ΣΣ τῶν πρώτων ὑπερβολῶν αἱ ΜΠ, ΝΞ, ἔσαι τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ΚΞ τῆς ἐναπολαμβανομένης ὑπὸ τȣ͂ κέντρȣ Κ ϗ τῆς τεταγμένης ΝΞ ἴσον τῷ γινομένῳ ἐκ τῶν ἀποτετμημένων ὑπὸ τῆς ἑτέρας τεταγμένης ΜΠ, εἴτ' ȣ͂ν τῷ $\chi^2 - \alpha^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐκ γὰρ τȣ͂ ἤδη ἐκτεθέντος πορίσματος (225) ἐςὶ $\text{ΜΠ}^2 : \text{ΝΞ}^2 :: \chi^2 - \alpha^2 : \alpha^2 + \omega^2$· ἀλλὰ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΤΜΠ, ΚΞΝ (ἔχȣσι γὰρ δύω πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς παραλλήλȣς ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΜΠ τῇ ΞΝ ἐξ ὑποθέσεως, τὴν δὲ ΜΤ τῇ ΚΝ κατὰ τὸ 223) ἐςὶ $\text{ΜΠ}^2 : \text{ΝΞ}^2 :: \text{ΤΠ}^2 : \text{ΚΞ}^2$· ἄρα $\chi^2 - \alpha^2 : \alpha^2 + \omega^2 :: \text{ΤΠ}^2 : \text{ΚΝ}^2 :: \frac{(\chi^2 - \alpha^2)^2}{\chi^2}$ (177) $: \omega^2$· ὥςε $\omega^2 \times (\chi^2 - \alpha^2) = (\alpha^2 + \omega^2) \times \frac{(\chi^2 - \alpha^2) . (\chi^2 - \alpha^2)}{\chi^2}$· διαιρεθεῖσα δὲ αὕτη ἡ ἐξίσωσις διὰ $\chi^2 - \alpha^2$, ϗ πολλαπλασιαθεῖσα ἐπὶ χ^2, γίνεται $\omega^2 \chi^4 = (\alpha^2 + \omega^2) . (\chi^2 - \alpha^2) = \alpha^2 \chi^2 - \alpha^4 + \omega^2 \chi^2 - \alpha^2 \omega^2$· διὰ δὲ μεταθέσεως γενήσεται $\alpha^2 \omega^2 = \chi^2 \alpha^2 - \alpha^4$, διαιρέσει δὶ α^2 ἀποβαίνει $\omega^2 = \chi^2 - \alpha^2$. Ο. Ε. Δ.

227. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄρα $\chi^2 = \alpha^2 + \omega^2$.

228. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ὑπερβολῆς δοθείσης τῆς ΣΜμ, εὑρεῖν τȣ̀ς ἄξονας, ϗ τὰς ἀσυμπτώτȣς, ϗ τὸ κέντρον αὐτῆς (σχ. 102).

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τῶν μέσων σημείων δύω παραλλήλων τῶν βΣ, δρ, ϗ δίω ἑτέρων τῶν οξ, ΣΕ, δίω εὐθεῖαι ἀχθεῖσαι αἱ ΚΝ, Κν, διάμετροι ȣ̓͂σαι (214), σημανȣ͂σι

διὰ τῆς αὐτῶν ὑπ' ἀλλήλων διατομῆς τὸ κέντρον Κ, ϗ ΚΣ ἀχθεῖσα ἐκ τῦ Κ ἐπὶ τὸ ἔγγιϛα σημεῖον τῷ Κ, ἔσεται ὁ πρῶτος ἡμιάξων· ἐπεὶ ΚΣ μετενεχθείσης ἐπὶ τὴν ἀπέραντον κάθετον ΚΡ, = ΒΚ, φημὶ, ὡς μετενεχθείσης τῆς ΒΣ ἐπὶ τὴν ΚΣΘ, = ΠΚ, ἡ τεταγμένη ΠΜ, ἥτις ἀντιϛοιχεῖ τῷ σημείῳ Π, ἔσεται ὁ δεύτερος ζητύμενος ἡμιάξων Κχ, = β.

Καὶ γὰρ $\Sigma B^2 = K\Sigma^2 + BK^2 = 2K\Sigma^2$ (ἐκ κατασκευῆς) $= 2\alpha^2$ · ἄρα $K\Pi^2 = \chi^2 = \Sigma B^2$ (ἐκ κατασκευῆς) $= 2\alpha^2$.

Ἐν ἐν τῇ ἀναλογίᾳ $\Pi M^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (163) ἀντικαταϛάσης ἀντὶ χ^2 τῆς κατ' αὐτὴν δυνάμεως $2\alpha^2$, ϗ ἀναγωγῆς γενομένης ἔϛαι $\Pi M^2 : \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ · $\Pi M^2 : \beta^2 :: \alpha^2 : \alpha^2$ · ἄρα $\Pi M = \beta$· ἀναϛαθεισῶν ἄρα ἐκ τῦ Σ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΚΘ τῶν εὐθειῶν ΣΚ, ΣΨ, = ΠΜ, = β, ἀχθήσονται αἱ ἀσύμπτωτοι ΚΓΤ, ΚΨε. Ο. Ε. Π.

229· ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν διὰ προσεγγίσεως τὸ ἐμβαδὸν (Δ) ὑπερβολῆς τῆς ΣϑΘ (σχ. 93).

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθείσης τῆς ἐπιφανείας (Β) τῦ τραπεζίου ΣΞδε, ϗ ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν δϑ, ΒΓ κτ. ἔγγιϛα ἀλλήλων, παραλλήλως τῇ ΞΣ, συϛαθήσονται ὡς πρὸς αἴσθησιν τραπέζια τὰ δϑΒΓ κτ, ὧν ληφθέντος τῦ Α ἀθροίσματος τῶν ἰδίων ἐπιφανειῶν, ἔϛαι Β — Α = Σϑε, ϗ 2Σϑε = Δ· ὃ καθ' ἑαυτὸ δῆλον.

230. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Εὑρεῖν τὸν κυβισμὸν τῆς ὑπερβολικῆς κωνοΐδος ΣΤτ (σχ. 103).

ΛΥΣΙΣ. Ἔϛωσαν αἱ ἀσύμπτωτοι ΚΗ, Κβ, ϗ ἡ κάθετος Σξ = ΚΜ, εἴτ' ἐν τῷ δευτέρῳ ἡμιάξονι, = ΣΞ· ἡ δὲ ΣΟ τετμήσθω διὰ τῶν ἔγγιϛα καθέτων Σξ, Πρ,

κτλ. ἤχθωσαν δὲ ϗ αἱ ἄλλαι εὐθεῖαι ἐν τῷ σχήματι· ϗ περιηνέχθω ὅλον τὸ μέρος Σξβο περὶ τὴν ΣΟ· ϗ δὴ πάντα μὲν τὰ ἐφεξῆς κείμενα παραλληλόγραμμα καταγράψȣσι κυλίνδρȣς· τὸ δὲ τραπέζιον Σξβο κῶνον κόλȣρον τὸν ΣξβΗΞ, τὸ δὲ ἡμιυπερβόλιον ΣτΟ ὑπερβολικὴν κωνοΐδα τὴν ΣΤτ.

Ἔςω ȣ̓͂ν Α μὲν κύλινδρος ὁ ἀπογεννηθεὶς ἐκ Σχπρ, Β δὲ ὁ ἐκ ΣΠΜν· ϗ Δ μὲν κύκλος ὁ γραφεὶς ὑπὸ Πρ· ὁ δὲ ὑπὸ ΠΜ = Ε· Θ δὲ ὁ ὑπὸ Σξ· ἔςαι ȣ̓͂ν Α = Δ × ΣΠ, ϗ Β = Ε × ΣΠ (Γεωμ. 456). ἄρα Α — Β = Δ—Ε = ΣΠ. (Ρ).

Ἀλλ᾽ ἐν τοῖς δυσὶν ὁμοκέντροις κύκλοις Δ, Ε, ἡ ὑπεροχὴ τȣ͂ μείζονος ὑπὲρ τὸν ἐλάσσονα Δ — Ε ἴση ἐςὶ κύκλῳ, ȣ̔͂ ἡ ἀκτίς ἐςι μέση ἀνάλογος τῆς ΝΜ, (*) ϗ Μρ· φημὶ ταύτην εἶναι τὴν Σξ, ἢ τὸν δεύτερον ἡμιάξονα· ϗ γὰρ ΜΝ × Μρ = $Σξ^2$ (193)· ἄρα ΜΝ : Σξ :: Σξ : Μρ· ȣ̔͂τως ȣ̓͂ν Θ = Δ — Ε· ἄρα ἐν τῇ Ρ ἐξισώσει ἐςὶν Α — Β = Θ × ΣΠ.

Ἀλλ᾽ ἐφόδῳ συλλογισμȣ͂ ὁμοίᾳ φανήσεται, ὅτι τῆς Σξ μέσης ȣ̓͂σης ἀναλόγȣ μεταξὺ ἑκάςης Μ′ρ′ ϗ τȣ͂ ἑτέρȣ τμήματος Μ′Ν′, ἡ ὑπεροχὴ ἑκάςȣ κυλίνδρȣ περιγεγραμμένȣ περὶ τὸν κόλȣρον κῶνον ΣξΗβΞ ὑπὲρ τὸν ἀντίςοιχον κῶνον, τὸν τῇ ὑπερβολικῇ κωνοΐδι περιγεγραμμένον, ἐςὶ Θ × ΣΠ· ἄρα ἡ ὑπεροχὴ τȣ͂ ἀθροίσματος πάν-

(*) *ΝΜ* γὰρ ἐςὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν δύω κύκλων *Δ*, *Ε*· ἔςι γὰρ *ΠΜ* + *ΠΡ* = *ΠΜ* + *ΠΝ* = *ΜΝ*, ὅτι δὲ ἡ διαφορὰ τȣ͂ *Ε* ὑπὲρ τὸν *Δ* κύκλον ἴση ἐςὶ κύκλῳ γεννωμένῳ ὑπὸ μέσης ἀναλόγȣ τȣ͂ ἀθροίσματος *ΜΝ*, ϗ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς *Μρ*, δῆλον (*Γεωμετ*. 355, 401).

των τῶν προτέρων κυλίνδρων ὑπὲρ τὸ πάντων τῶν ὑςέρων ἐςὶ ΘχΣΠ, ὁσάκις ἂν ἐπαναληφθῶσιν, ὅσητε ἂν ᾖ ἡ πυκνότης τέτων τῶν κυλίνδρων· ἄρα ἡ ὑπερβολικὴ κωνοῒς ΣΤτ ἴση ἐςὶ τῷ κολέρῳ κώνῳ ΞξΗβ πλὴν ΘχΣΟ.

Τετέςιν, ἡ ςερεότης τῆς ὑπερβολικῆς κωνοΐδος ποριϑήσεται εὑρεθείσης τῆς ςερεότητος Ε κώνε κολέρε, ὗ ἀκτὶς, τῆς μὲν ὕπερθεν βάσεως ἔςιν ὁ δεύτερος ἡμιάξων, τῆς δ' ἔνερθεν, ἡ ἐσχάτη κάθετος Οβ, ἀγομένη ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτε ἐπὶ τὸν ἄξονα, ϗ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ Ε τῆς ςερεότητος κυλίνδρε, ὗ ἀκτὶς μέν ἐςιν ὁ δεύτερος ἡμιάξων, ὕψος δὲ τὸ τῆς ὑπερβολικῆς κωνοΐδος.

ΑΙΤΗΜΑ. Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν περὶ τὸν κόλερον κῶνον περιγεγραμμένων κυλίνδρων ὡς ςερεότητα αὐτῦ τῦ κολέρε κώνε ἐκλαβεῖν· πράγματι γὰρ ἀπειροςόντι ἀλλήλων διενηνόχασιν (70)· τὸ αὐτὸ δὲ νοητέον ϗ περὶ τῶν τῇ ὑπερβολικῇ κωνοΐδι περιγεγραμμένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῆς ἐν τῇ Διοπτρικῇ χρήσεως τῆς ὑπερβολῆς.

231. Ἔςω ὑπερβολὴ (σχ. 104), ἐν ᾗ Σσ : Εε :: 2 : 3 ϗ Μβ = ΜΕ· ϗ κέντρῳ μὲν τῷ Μ, ἀκτῖνι δὲ τῇ Μβ, γεγράφθω κύκλος ὁ βΕτ, διήκων διὰ τῶν Ε, β· ἡ ὗν αβ ἡ τῇ αΜ κάθετος ἔςαι πάντως ἡμίτονον τῆς ὑπὸ βΜα γωνίας· ἡ δὲ ΕΟ ἡ τῇ ΜΟ κάθετος ἡμίτονον τῆς ὑπὸ ΕΜΟ γωνίας· ἔςω δὲ ϗ κατὰ τὸ Μ ἁπτομένη ἡ Μϑ, ϗ ἐςάϑωσαν πρὸς ὀρθὰς τῇ ϑΜχ αἱ ΟΜ, εΡ.

Τέτων τεθέντων φημὶ, ὡς ἀκτίς τις φωτὸς ἡ βΜ

εἰσδύȣσα τὸ ἐπίπεδον νΙΜ τȣ̃ ὑπερβολοειδȣ̃ς σνΙΜ, τȣ̃ περιαγωγῇ τῆς σΜν καμπύλης περὶ τὴν σΙ ἀποτελȣμένȣ, ἐξελθȣ̃σα ἐκ τȣ̃ Μ, πρὸς τὸ Ε χωρήσει.

Ἐπιςαθείσης γὰρ πρὸς ὀρθὰς τῇ Εη τῆς Κδ, τὰ τρίγωνα ΕΜΟ, ΚΜδ εἰσὶν ὅμοια, διὰ τὰς ὀρθὰς γωνίας Ο, δ, ϗ ἐπεὶ ΕΜΟ = ΚΜδ, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα Κδ : ΕΟ : : ΚΕ : ΕΜ = Μβ.

Καὶ τὰ τρίγωνα δὲ ΙΜΚ, αβΜ ὅμοιά εἰσιν· εἴγε παρὰ τὰς ὀρθὰς γωνίας Ι, α, ἔςι ϗ ὑπὸ ΙΚΜ = αΜβ διὰ τὰς παραλλήλȣς Μβ, ΙΚ· ἄρα ΚΜ : Μβ : : ΙΜ : αβ· ἄρα Κδ : ΕΟ : : ΙΜ : αβ· ϗ (Συμϐ. Λογ. 242) αβ : ΕΟ : : ΙΜ : Κδ.

Τέλος δὲ ϗ τὰ τρίγωνα ΕΚδ, ΕΙΜ ὅμοιά εἰσιν, ἐπείπερ παρὰ τὰς ὀρθὰς γωνίας δ, Ι, ἔχȣσι κοινὴν τὴν Ε· τοιγαρȣ̃ν ΙΜ : Κδ : : ΕΜ : ΕΚ· ἄρα αβ : ΕΟ : : ΕΜ : ΕΚ.

Ἐπεὶ τοίνυν τῶν εΡ, ΚΜ παραλλήλων ȣ̉σῶν, ὡς καθέτων τῇ ἀπτομένῃ Μϑ, ϗ ἔτι (Γεωμ. 318) ΕΜ : ΕΚ : : ΕΡ : εΕ, ἔςαι αβ : ΕΟ : : ΕΡ : εΕ· ἀλλὰ ΕΡ = ΕΜ — εΜ, εἴγε (173) Με = ΜΡ· ἔτι δὲ ΕΜ — εΜ = Σσ (180)· ἄρα ΕΡ = Σσ· ἄρα αβ : ΕΟ : : Σσ : Εε : : 2 : 3.

Ἄρα ἀκτῖνες ὁποιαιȣ̃ν αἱ βΜ παράλληλοι τῷ ἄξονι ἡμίτονον τῆς μὲν κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνίας ποιȣ̃σαι τὸ αβ, τῆς δὲ κατὰ τὴν ϑλάσιν τὸ ΕΟ, ἔχοντα πρὸς ἄλληλα : : 2 : 3, ἐκ τῆς ὑέλȣ εἰς τὸν ἀέρα μεταϐαίνȣσαι, φέρονται πρὸς τὸ Ε.

232. Φακὸς ἄρα ὑέλινος ὁμοιοχήμων τῷ εἰρημένῳ ἔχων τὴν ἰδιότητα τȣ̃ συλλέγειν ἐν τῇ ἑςίᾳ Ε πάσας τὰς ἀκτῖνας, καυςικωτάτην ἕξει τὴν δύναμιν.

233. Τἀνάπαλιν δὲ ἀκτὶς φωτὸς ἡ ΕΜ ἐκ τȣ̃ Ε ἐρχομένη, προσβάλλȣσα κατὰ τὸ Μ τῇ κυρτότητι τȣ̃ ὑπερβολοειδȣ̃ς, χωρήσει τὴν βΜ φορὰν παράλληλον τῷ ἄξονι· ϗ γὰρ τὸ ἡμίτονον ΕΟ τῆς κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνίας πρὸς τὸ ἡμίτονον αβ τῆς κατὰ τὴν θλάσιν, τῆς διόδȣ ἀπ' ἀέρος ἐφ' ὕελον γινομένης, ἔςαι :: 3 : 2.

234. Ἀλλὰ γὰρ ἀκτὶς φωτὸς ἡ ξΜ παράλληλος τῷ ἄξονι ἐλευθέρως φερομένη ἐν ἀέρι πρὸς τὸ β, εἰ διέλθοι τὴν κυρτοτητα τῆς ὑπερβολῆς, θλαθήσεται ȣ̆τως, ὡς φαίνεσθαι ἐρχομένη ἀπὸ τȣ̃ Ε, τῆς φορᾶς Μβ γινομένης Μη· ἔςι γὰρ ἡ κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνία ξΜτ ὑπὲρ τῆς ξΜ ἴση τῇ βΜα τῇ ὑπὲρ τῆς βΜ, ὡς κατὰ κορυφὴν ἀντικείμεναι· ὡσαύτως ἄρα ἔςαι ἡ αὐτὴ ϗ ἡ κατὰ θλάσιν γωνία· ἔςι δὲ ὑπὲρ τῆς βΜ γωνία κατὰ θλάσιν ἡ ΕΜΟ = αΜη (231)· ἄρα ὑπὲρ ξΜ ἔσεται αΜβ· ἄρα ἡ ξΜ ἀκτὶς τὴν φορὰν Μη χωρήσει.

235. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν ἐν ςερεῷ ἀπογεννωμένῳ (σχ. 105) ἐκ τȣ̃ σχήματος ΠνΗΣρΟ, ἐφ' ȣ̃ ΠνηΣ εἴη ὑπερβολὴ, ἔχȣσα εςίαν ἐκτὸς κειμένην τὴν Τ, ϗ ΠΟρΣ ἑτέρα ὑπερβολὴ, ἔχȣσα ἑςίαν ἐκτὸς κειμένην τὴν τ, ἄξονα δὲ κοινὸν ἑκατέρα τὸν Τθ, ὀφθαλμὸς ἐπιτεθῇ αὐτῷ πρὸς τὸ θ, ὄψεται κατὰ τὸ τ πὸ ἐν τῷ Τ κείμενον ὁρατόν· αἱ γὰρ ἀκτῖνες τȣ̃ φωτὸς ἐκ τȣ̃ Τ ἥκȣσαι πρὸς τὴν κυρτότητα ΠνηΣ παράλληλοι γενήσονται τῷ ἄξονι (233)· εἰσιȣ̃σαι δὲ εἰς τὴν καινὴν ὑπερβολικὴν κυρτότητα ΠΟρΣ, ȣ̆τω χωρήσȣσιν, ὡς τὴν φορὰν αὐτῶν διευθύνεσθαι πρὸς τὴν τ ἑςίαν αὐτῆς τῆς δευτέρας ὑπερβολῆς (234).

Αὕτη ἄρα ἡ ὕελος μέγιςον οἴσει πρὸς ὁράσεως ἐνί-

χυσιν τοῖς ἀμβλυωπῦσιν· ὃ γὰρ κατὰ τὸ Τ ὲ θεῶνται, κατὰ τὸ τ γῦν, ἐν διαςήματι ἀμέλει ἐλάσσονι, ὄψονται.

236. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τὐναντίον δὲ, ἐὰν Τ ἑςία ᾖ τῆς ΠΟρΣ, ϗ τ τῆς ΠνΗΣ, αἱ ἀπὸ τῦ τ ἀποχωρῦσαι ἀκτῖνες, διὰ μὲν τῆς πρώτης θλάσεως παράλληλοι τῷ ἄξονι γενήσονται, διὰ δὲ τῆς δευτέρας, ἀλλήλων ἀποςήσονται, ὡς ἥκυσαι ἐκ τῦ Τ· ὁρατόντι ἄρα κείμενον κατὰ τὸ τ, ὁραθήσεται ὡς εἰ ἦν ἐν τῷ Τ· ὕελος ἄρα τοιάδε καλλιςος ἂν εἴη φακὸς ὀπτικὸς τοῖς πρεσβύωψιν, οἳ τὰ ἐγγὺς μὴ δυνάμενοι ἰδεῖν, ἀφεςηκότα μικρὸν ὡς ἀπὸ τῦ τ ἐπὶ τὸ Τ τηλαυγῶς ὁρῶσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος.

237. Κύκλος ὁ διήκων διὰ τριῶν σημείων, ἔγγιςα ἀλλήλων κειμένων (σχ. 103, 107) τῶν ν, Μ, ν΄ καμπύλης τινὸς, ἧς ἡ κατὰ τὸ Μ καμπυλότης τῇ τῦ κύκλυ συμπίπτει, καλεῖται κύκλος φιλῶν· ἡ δὲ αὐτοῦ ἀκτὶς, ἥτις διορίζει τὴν καμπυλότητα τῆς καμπύλης καθ' ἓν σημεῖον δεδομένον, ὀνομάζεται ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος, ἢ ἀκτὶς τῦ φιλῦντος κύκλυ, ἢ ἀκτὶς τῆς ἐξειλιγμένης.

238. ΛΗΜΜΑ. Τὸ πλάγιον ἡμίτονον ΠΒ (Γεωμ. 492) τόξυ ἀπειροςῦ τῦ ΒΡΜ (σχ. 108) ἐςὶν $= \frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha}$.

ΔΕΙΞΙΣ. $\upsilon\upsilon = 2\alpha\chi - \chi^2$ (12) $= \chi \times \overline{2\alpha - \chi}$. ἄρα $\chi = \frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha - \chi}$ (Συμβ. Λογ. 253)· ἀλλὰ $2\alpha - \chi$

$= 2\alpha$, ὅτι $\chi =$ ΠΒ ἐςὶν ἀπειροςὴ (Συμϐ. Λογ. 530)·

ἄρα $\chi = \Pi B = \frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha} = \frac{\Pi M^2}{AB}$. Ο. Ε. Δ.

239. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔςω $\alpha = \xi$· ἄρα $\chi = \frac{\upsilon\upsilon}{2\xi}$.

240. Ἔςω ὁ πρῶτος ἄξων (σχ. 106, 107) $\Sigma\sigma =$ 2Α, ϗ ὁ δεύτερος $=$ 2Β, ϗ ἡ διάμετρος ΑΜ $= 2\alpha$, ϗ ἡ αὐτῇ συζυγὴς ΒΔ $= 2\beta$, ϗ ἡ ὀρθία πλευρὰ εΜ $= \rho$, ϗ ἡ τῦ φιλῦντος κύκλυ ἀκτὶς Μτ $= \xi$, ϗ τὸ μέρος ΜΟ τὸ ἀπολαμϐανόμενον ὑπὸ Μ, ϗ τῆς συζυγῦς διαμέτρυ $= \eta$, ϗ ἡ ἀπειροςὴ τεταγμένη νΙ, ἢ νε $= \upsilon$, ϗ ἡ ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένη ΜΙ, ἡ ἐπὶ τῆς ΜΑ, $= \chi$, τὸ δὲ τῦ κυκλικῦ τόξυ Μν πλάγιον ἡμίτονον Με $= \frac{\upsilon\upsilon}{2\xi}$, ϗ ἡ τῇ ἁπτομένῃ κάθετος εΓ $= \psi$· τύτων τεθέντων. . .

241. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ἔντε τῇ ἐλλείψει κἀν τῇ ὑπερϐολῇ ἔςι $\frac{\beta\beta}{\eta}$. (*)

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΙε, ΜΚΟ, ἔςι ΜΙ $= \chi$: Με $= \frac{\upsilon\upsilon}{2\xi}$ (239) :: ΜΚ $= \alpha$: ΜΟ $=$ η· ἄρα $\eta\chi = \frac{\alpha\upsilon\upsilon}{2\xi}$ (Ρ)· ἀλλ' ἔςιν $\upsilon\upsilon : 2\alpha\chi \mp \chi\chi$::

(*) Τῦτ' ἔςιν ἰσῦται τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ ἡμιδιαμέτρυ τῆς *ΒΔ* συζυγῦς διαμέτρῳ δεδομένῃ τῇ *ΑΜ*, διῃρημένῳ διὰ τῦ μέρυς *ΜΟ* τῆς ἀκτῖνος ταύτης, τῦ ἀπολαμβανομένυ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς *Μ* τῆς διαμέτρυ *ΑΜ*, ϗ τῆς ταύτῃ συζυγῦς *ΒΔ*.

$\beta\beta : \alpha\alpha$ (92, 217)· ϗ $\chi\chi$ ἐστιν ἄπειροστὸν δευτεροταγὲς, εἴγε τὰ σημεῖα Μ, ν, ν′ ἀπείρως ἐτέθησαν ἔγγιστα (237), κἀκ τούτου ἡ ἀποτετμημένη ΜΙ $= \chi$ ἐστιν ἀπειροστὸν πρωτοταγὲς, ἀφ᾽ οὗ τὸ τετράγωνον ἀποτελεῖται δευτεροταγές· ἔσται ἄρα ἀναμφηρίστως $\nu\upsilon : 2\alpha\chi :: \beta\beta : \alpha\alpha$ (Συμβ. Λογ. 528)· ἄρα $\nu\upsilon = \frac{2\alpha\chi\beta\beta}{\alpha\alpha} = \frac{2\chi\beta\beta}{\alpha}$.

Ἐν οὖν τῇ Ρ ἐξισώσει ἀντὶ $\nu\upsilon$ ἀντικαταστάσης τῆς εὑρεθείσης δυνάμεως, ἔσται $\eta\chi = \frac{2\alpha\chi\beta\beta}{2\alpha\xi} = \frac{\beta\beta\chi}{\xi}$· ἄρα $\eta = \frac{\beta\beta\chi}{\xi\chi} = \frac{\beta\beta}{\xi}$ (Συμβ. Λογ. 250)· ἄρα $\eta\xi = \beta\beta$, ϗ $\xi = \frac{\beta\beta}{\eta}$. Ο. Ε. Δ.

242. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. $\beta \times \eta$ ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν ἡμιαξόνων Α, Β (130, 219) εἴτ᾽ οὖν $\beta\eta = \mathrm{AB}$· ἄρα $\beta = \frac{\mathrm{AB}}{\eta}$· ϗ $\beta\beta = \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2}{\eta^2}$· ἀντικαταστάσει δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἀντὶ $\beta\beta$, ἐστι $\xi = \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2}{\eta^3}$· ἐντεῦθεν ἄρα $: \xi : \Xi :: \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2}{\eta^3} : \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2}{\mathrm{H}^3}$· ἀλλαμὴν $\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2}{\eta^3} : \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2}{\mathrm{H}^3} :: \mathrm{H}^3 : \eta^3$ (Συμβ. Λογ. 259)· ἄρα $\xi : \Xi : \mathrm{H}^3 : \eta^3$ (Π) τουτέστιν „αἱ ἀκτῖνες τῆς καμπυλότητος ἐν διαφόροις σημείοις τῆς ἐλλείψεως ϗ τῆς ὑπερβολῆς ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογοι τοῖς κύβοις τῶν τμημάτων ΜΟ $= \eta$ (240) τῶν ἀκτίνων αὐτῶν, ἀπολαμβανομένων ὑπὸ τῆς ἀρχῆς Μ διαμέτρου τινὸς ΑΜ, ϗ τῆς αὐτῇ συζυγοῦς ΒΔ.“

243. Ἐκ τῆς ἀναλογίας Π πρόεισι $\xi = \frac{\Xi \times H^3}{\eta^3}$.
ἀλλὰ παραθέσει, τῆς μὲν ξ πρὸς Ξ, τῆς δὲ η πρὸς Η, ἐκληφθῆναι ἀεὶ δύναται ὡς πρὸς τὴν ξ ἡ Ξ = 1, ϗ ὡς πρὸς τὴν η ἡ Η = 1· ὅτως ὖν ἡ εἰρημένη ἐξίσωσις γενήσεται $\xi = \frac{1 \times 1}{\eta^3} = \frac{1}{\eta^3}$.

244. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ξ ἐν διαφόροις σημείοις τῆς ἐλλείψεως, ἢ τῆς ὑπερβολῆς, ἴση ἐςὶ τῷ κύβῳ ρ^3 τῆς ὀρθίας πλευρᾶς, διαιρεθέντι διὰ τῦ κύβυ ψ^3 τῆς ἐπιςαθείσης καθέτυ ἐκ τῆς ἑςίας ἐπὶ τὴν ἀπτομένην (240)· εἶτ᾽ ὖν $\xi = \frac{\rho^3}{\psi^3}$.

ΔΕΙΞΙΣ Α΄. Ἐν τῇ ἐλλείψει ἀχθείσης τῆς ΕΥ παραλλήλυ τῇ ΜΓ, ἔςαι ἡ ὑπὸ ΜΕΥ = ΕΜΖ (Γεωμ. 133)· ἀλλ᾽ ἔςιν ὑπὸ ΕΜΖ = ΥΜΓ (104)· ἄρα ΜΕΥ = ΥΜΓ· ἀλλ᾽ ἔςιν ὑπὸ ΜΥΕ = ΥΜΓ· ἄρα ΜΕΥ = ΜΥΕ· τῦ ἄρα τριγώνυ ΕΜΥ ἰσοσκελῦς ὄντος, ἔςι ΜΕ = ΜΥ (Γεωμ. 204)· ἄρα εΜ + ΜΥ = εΜ + ΕΜ· ἄρα εΥ ἔςιν ἡ διαφορὰ τῶν δύω ἀποςημάτων εΜ· ἄρα $2\text{ΜΥ} + \varepsilon\Upsilon = 2\text{Α}$· ἄρα $\text{ΜΥ} + \frac{\varepsilon\Upsilon}{2} = \text{Α}$.

β΄. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕεΥ, εΚψ ἔςιν Εε = 2κ : ΕΚ = κ :: εΥ : εψ· ἄρα $\varepsilon\psi = \Upsilon\psi = \frac{\psi\Upsilon}{2}$· ἄρα ΜΥ + Υψ = Α· ἄρα Μψ = Α.

γ΄. Ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ, ἀχθείσης παραλλήλυ τῇ ΜΓ τῆς εΥ, διὰ τῶν αὐτῶν ἐφόδων, τιθεμένης μέντοι ε ἀντὶ Ε, ἔςαι α΄. εΜ = ΜΥ· β΄. ἐκ τῶν τριγώνων

ΕεΥ, ΕΚψ, $\text{Υψ} = \frac{\text{ΕΥ}}{2}$· ἀλλ' ἔςιν ἐν τῇ ὑπερβολῇ 2Α = ΕΜ — εΜ (140) = ΕΜ — ΜΥ (διὰ τὸ εἶναι εΜ = ΜΥ) = ΕΥ — 2ΜΥ = 2ψΥ — 2ΜΥ· ἄρα Α = ψΥ — ΜΥ = Μψ.

δ'. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜεΓ, ΜΟψ, ἔςι ΜΟ = η (240) : Μψ = Α (ἐν τῇ ἀνὰ χεῖρας δείξει) : : εΓ = ψ (240) : ϱ· ἄρα $\eta = \frac{\text{Α}\psi}{\varrho}$· ἄρα $\eta^3 = \frac{\text{Α}^3\psi^3}{\varrho^3}$· ἀλλ' ἔςι $\xi = \frac{\text{Α}^2\text{Β}^2}{\eta^3}$ (242)· ἄρα $\xi = \text{Α}^2\text{Β}^2 : \frac{\text{Α}^3\psi^3}{\varrho^3} = \frac{\text{Α}^2\text{Β}^2\varrho^3}{\text{Α}^3\psi^3} = \frac{\text{Β}^2\varrho^3}{\text{Α}\psi^3}$· ἄρα διὰ τὴν ἀμετάτρεπτον $\frac{\text{Β}^2}{\text{Α}}$, ἔςι $\xi = \frac{\varrho^3}{\psi^3}$. Ο.Ε.Δ.

245. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ταυτὰ δὲ δείκνυται καὶ ἐν τῇ παραβολῇ· ἀλλ' ἐν τῷ κύκλῳ, ἡ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ξ, ϗ ἡ ἀκτὶς τȣ̃ κύκλȣ, ϗ ἡ ὀρθία πλευρὰ ϱ, ϗ ἡ τῇ ἀπτομένῃ κάθετος ψ, ἅπαντα ὑπάρχει ταυτά· διὸ ἔςαι $\xi = \frac{\varrho^3}{\psi^3} = \frac{1}{1}$· ἐν γένει ἄρα ἁπάσης κωνικῆς τομῆς ἡ τῆς καμπυλότητος ἀκτὶς ἔςι $\xi = \frac{\varrho^3}{\psi^3}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΠΕΜΤΟΝ.

Περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν παραθέσεως.

246. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ ἐπὶ τῶν ἀξόνων γενικὴ ἐξίσωσις ἁπάσης κωνικῆς τομῆς, περιέχουσα τὰς πρὸς τῇ κορυφῇ ἀποτετμημένας, ἐστὶν $\upsilon^2 = \frac{\alpha\beta^2\chi}{\alpha} \mp \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$ (Α).

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἐὰν τεθῇ $\alpha = \beta$, καὶ ληφθῇ τὸ σύμβολον — ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ τοῦ δευτέρου μέλους, ἡ ἐξίσωσις Α γενήσεται $\upsilon^2 = \frac{2\alpha^2\chi}{\alpha} - \frac{\alpha^2\chi^2}{\alpha^2} = 2\alpha\chi - \chi^2$, ἐξίσωσις τοῦ κύκλου (12).

β΄. Ἐὰν α ἀπειράκις μεῖζον ᾖ τοῦ β, τοῦ — συμβόλου τεθέντος ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ, ἡ ἐξίσωσις Α γίνεται $\upsilon^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\infty} - \frac{\beta^2\chi^2}{\infty^2}$. ἀλλὰ $-\frac{\beta^2\chi^2}{\infty^2}$ ἀπειροσόν ἐστι δευτεροταγὲς, καὶ μηδὲν πρὸς τὸ $\frac{2\beta\chi}{\infty}$. ἄρα (Συμβ. Λογ. 528) πάντως, $\upsilon^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\infty} = \frac{2\beta^2\chi}{\alpha} = \pi\chi$ (169), ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς.

γ΄. Ἐὰν α μείζων ᾖ τοῦ β μεγέθει πεπερασμένῳ, καὶ τεθῇ — ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ, ἀποτελεσθήσεται $\upsilon^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\alpha} - \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$, ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως (92).

δ΄. Ἐὰν δὲ τέλος ᾖ $\alpha = \beta$, ἢ $\alpha < \beta$, ἢ $\alpha > \beta$,

ϰ̔ ληφθῇ τὸ + ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ, ἡ Α ἀποκατασαθήσεται $υ^2 = \frac{2β^2χ}{α} + \frac{β^2χ^2}{α^2}$, ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς (164). Ο. Ε. Δ.

247. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ο῾ μὲν ἄρα κύκλος ἐςιν ἔλλειψις, ἐν ᾗ $α = β$· ἡ δὲ παραβολὴ, ἔλλειψις, ἐν ᾗ $α = \infty$· ἡ δὲ τέλος ὑπερβολὴ ἔλλειψίς ἐςιν, ἧς ἡ ἑτέρα τῶν ἑςιῶν, ναὶ μὴν ϰ̔ τῶν κορυφῶν, εἰσὶ λειπτικαὶ, εἴτ᾽ οὖν τεθειμέναι κατὰ θέσιν ἐναντίαν θατέρᾳ ἑςίᾳ ϰ̔ κορυφῇ· ὃ δὴ, ἀπεργαζόμενον τὸ τῶν ἀποτετμημένων γινόμενον $= α^2 + χ^2$, τρέπει τὸ δεύτερον σύμβολον τῆς κοινῆς ἐλλείψεως ἐκ — ἐπὶ +

248. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τῶν ἐξισώσεων τῆς τε ἐλλείψεως ϰ̔ τῆς ὑπερβολῆς μόνοις τοῖς — + κατὰ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ δευτέρου μέλους διαφερουσῶν, οἱ λογισμοὶ καθ᾽ ἕνα τρόπον ἐν ἑκατέρᾳ διαπερανθῆναι ἔχουσι.

249. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Η῾ ἐν ἁπάσῃ κωνικῇ τομῇ γενικὴ ἐξίσωσις τῆς παραμέτρου τοῦ πρώτου ἄξονος ἐςιν

$$υ^2 = πχ \mp \frac{πχ^2}{2α} \text{ (Β)}.$$

ΔΕΙΞΙΣ. Ε᾽ν γὰρ ἁπάσῃ κωνικῇ τομῇ ἐςι $π = \frac{2β^2}{α}$ (169), ϰ̔ ἑπομένως $\frac{π}{2α} = \frac{2β^2}{α \times 2α} = \frac{β^2}{α^2}$· δυνατὸν ἄρα ἐν τῇ γενικῇ ἐξισώσει Α τῇ ἐπὶ τοῦ πρώτου ἄξονος (246) ἀντικατασῆναι, $π$ μὲν ἀντὶ $\frac{2β^2}{α}$, $\frac{π}{2α}$ δὲ ἀντὶ $\frac{β^2}{α^2}$· ὅθεν ἡ Α τραπήσεται εἰς τὴν $υ^2 = πχ \mp \frac{πχ^2}{2α}$. Ο. Ε. Δ.

250. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ε᾽κ τῆς γενικῆς ἐξισώσεως

$\upsilon\upsilon = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}$ πρόεισι $2\alpha\upsilon\upsilon = 2\alpha\pi\chi \mp \pi\chi\chi = \pi$ $(2\alpha\chi \mp \chi\chi)$· ὅθεν ἡ ἀναλογία $\upsilon\upsilon : 2\alpha\chi \mp \chi\chi :: \pi : 2\alpha$· ἀλλαμὴν $2\alpha\chi \mp \chi\chi = (2\alpha \mp \chi)\,\chi = \sigma\Pi \times \Pi\Sigma$, ἐν γένει ἄρα „τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ἐπὶ τὸν „πρῶτον τῆς ἐλλείψεως ϗ τῆς ὑπερβολῆς ἄξονα τετρά- „γωνα πρὸς τὰ ὑπὸ τῶν συζοιχȣσῶν ἀποτετμημένων γι- „νόμενα λόγον ἔχει, ὃν ἡ παράμετρος πρὸς τὸν πρῶτον ἄξονα.“

251. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἔςαι ἄρα, ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως $\upsilon^2 = \pi\chi - \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς $\upsilon^2 = \pi\chi + \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$ (248)· ἐπὶ δὲ τȣ͂ κύκλȣ, ἐπεὶ $\pi = 2\alpha$ (99), $\upsilon^2 = \pi\chi - \chi^2$· ἐπὶ δὲ τέλος τῆς παραβολῆς, $\upsilon^2 = \pi\chi - \frac{\pi\chi^2}{2\,\infty} = \pi\chi$ (Συμβ. Λογ. 530).

252. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἡ παράμετρος τῆς κωνικῆς τομῆς π ἐςιν, ἴση μὲν τῷ $\mathrm{HE} = \nu$ ἀποςήματι, καθ᾽ ὃ ἀπέχει ἡ κορυφὴ ἀπὸ τῆς ἑςίας, τετράκις εἰλημμένῳ ἐν τῇ παραβολῇ, εἴτ᾽ ȣ͂ν $\pi = 4\nu$· ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει $\pi < \nu$· ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ $\pi > \nu$· εἰλήφθω γὰρ ἡ διὰ τῆς ἑςίας διϊȣ͂σα υ· ϗ δὴ ἔςαι $2\upsilon = \pi$· $\upsilon = \frac{\pi}{2}$· $\upsilon^2 = \frac{\pi^2}{4}$· ἀντικαταςάσης ἄρα ἐν B ἀντὶ υ^2 ταύτης τῆς δυνάμεως ἔςαι $\frac{\pi^2}{4} = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$· διαιρέσει διὰ π, $\frac{\pi}{4} = \chi, \mp \frac{\chi^2}{2\alpha}$.

$$\pi = 4\chi \mp \frac{4\chi^2}{2\alpha} \quad (\Delta).$$

Α'λλ' ὑπὲρ τῆς παραμέτρε, ἡ ἀποτετμημένη $\chi =$ ΗΕ $= \nu$ ἀποςήματι τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς ἑςίας, ἡ ἐξίσωσις Δ γενήσεται $\pi = 4\nu \mp \frac{4\nu^2}{2\alpha}$· ἐπὶ δὲ τέτοις, ἐν τῇ παραβολῇ, ἔςι $2\alpha = \infty$· ἄρα $\frac{4\nu^2}{2\alpha}$ ἔςι μηδὲν ὡς πρὸς 4ν· ἔςαι ἄρα ἀναμφιβόλως $\pi = 4\nu$· ἀλλ' ἐν τῇ ἐλλείψει ἔςι $\pi = 4\nu - \frac{4\nu^2}{2\alpha}$, ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ, $\pi = 4\nu + \frac{4\nu^2}{2\alpha}$.

253. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ε'ν ἁπάσῃ κωνικῇ τομῇ πᾶσα ὀρθία πλευρὰ εμ λόγον ἔχει πρὸς τὸ ἀπόσημα τε πρὸς τῇ καμπύλῃ πέρατος αὐτῆς μ ἀπὸ παντὸς τῆς διευθετέσης σημείε ϑ, ὃν ἄλλη τις ὀρθία πλευρὰ εμ' πρὸς τὸ ἀπόσημα τε πέρατος αὐτῆς μ' ἀπὸ τε αὐτε τῆς διευθετέσης σημείε ϑ, τετ' ἔςιν εμ : μϑ : : εμ' : μ'ϑ (Σχ. 109).

ΔΕΙΞΙΣ. Ε'ςι γὰρ εμ : εμ' : : μΠ' : μ'Π (17)· ἀλλ' ὀρθῶν μὲν ἐσῶν τῶν πρὸς τοῖς Π, Π γωνιῶν, κοινῆς δὲ τῆς πρὸς τῷ ϑ, τὸ μ'Πϑ τρίγωνον ὅμοιόν ἐςι τῷ μΠ'ϑ τριγώνῳ· ἄρα μΠ' : μ'Π : : μϑ : μ'ϑ· ἀντικαταςάντος δὲ ἐκ τῆς προτέρας ἀναλογίας τε ἴσε λόγε εμ : εμ', ἔςαι εμ : εμ' : : μϑ : μ'ϑ· ταὐτὰ δ' εὐμαρῶς δείκνυται ἐπὶ πάσης τομῆς· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

254. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ε'ν πάσῃ κωνικῇ τομῇ, ἐὰν εὐθεῖα ΜΠ, διὰ τῆς ἑςίας Ε διήκεσα, συμβάλῃ, τῇ μὲν διευθετέσῃ κατὰ τὸ Ξ, τῇ δὲ καμπύλῃ κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Π, τὸ δὲ σημεῖον Μ κέηται μεταξὺ τῶν σημείων Ε, Ξ, τμηθήσεται αὕτη ἡ εὐθεῖα κατὰ τὰ σημεῖα Μ,

Ε (σχ. 110), ϗ κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Ξ (σχ. 111), ἐν ἁρμονικῇ ἀναλογίᾳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστι γὰρ (243) ΕΠ : ΕΜ :: ΠΞ : ΜΞ (σχ. 110)· ἀλλ᾽ ἐν μὲν ταῖς τρισὶν εὐθείαις ΠΞ, ΕΞ, ΜΞ, αἱ ΠΞ, ΜΞ εἰσὶν ἄκρα, αἱ δὲ ΕΠ, ΕΜ, αἱ διαφοραὶ, αἷς τὰ ἄκρα τῆς μέσης διαφέρουσιν· ἐν δὲ ταῖς τρισὶν (σχ. 111) ΕΠ : ΕΞ, ΕΜ, αἱ μὲν ΕΠ, ΕΜ εἰσὶ τὰ ἄκρα, αἱ δὲ ΠΞ, ΜΞ, αἱ διαφοραὶ, αἷς τὰ ἄκρα διενήνοχε τῆς μέσης· ἄρα ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων τὰ ἄκρα εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ διαφοραὶ τῶν ἄκρων, αἷς τῆς μέσης διαφέρουσι· τοῦτο δέ ἐστιν ἐν ἁρμονικῇ ἀναλογίᾳ (Συμ. Λογ. 543). Ο. Ε. Δ.

255. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τῷ 110 σχήματι χρήσασθαι ἔχομεν ὑπέρ τε τῆς ἐλλείψεως ϗ τῆς παραβολῆς· ἡ δὲ κοινὴ αὐτοῖς διευθετοῦσα ἐστιν ἡ ΞΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΕΚΤΟΝ.

Περὶ ὁμοίων κωνικῶν τομῶν.

256. Δύω ὁμοειδεῖς κωνικαὶ τομαὶ ὅμοιαι λέγονται, ὅταν ὦσιν ἀνάλογοι οἱ αὐτῶν ἄξονες.

257. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν ἄρα δύω ὅμοιαι ἐλλείψεις, ἢ δύω ὅμοιαι ὑπερβολαὶ, κοινὸν μὲν ἔχωσι κέντρον τὸ Κ (σχ. 112, 113), τοὺς δὲ ἄξονας ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, αἱ ἀντίστοιχοι συζυγεῖς αὐτῶν διάμετροι ἔσονται ϗ αὐταὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· περιέχουσι γὰρ μετὰ τῶν ἀξόνων γωνίας ἴσας, εἴγε αἱ κωνικαὶ τομαὶ οὐδενὶ ἀλλήλων διαφέρουσιν, εἰ μὴ ὅτι αἱ ἐν θατέρᾳ εὐθεῖαι μείζονές εἰσι τῶν ἐν θατέρᾳ ἀντιστοίχων εὐθειῶν· ἐν ἑκατέρᾳ δὲ ἐ-

χεσι θέσιν τὴν αὐτὴν πρός γε τὲς ἄξονας· ὥςε τῶν ἀξόνων ᾗ τῶν διαμέτρων τῆς ἐλάσσονος κατὰ τὴν αὐτὴν θέσιν προεκϐαλλομένων, ἐς ὃ ἂν ἰσωθῶσι ταῖς τῆ μείζονος, αἱ δύω τομαὶ συμπεσὲνται ἀλλήλαις, ᾗ μία ἐξ ἀμφοῖν ἀποϐήσεται καμπύλη.

258. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἡ ΡΣ τέμνῃ δύω ὁμοίας ᾗ ὁμοκέντρες κωνικὰς τομάς, τὰ τμήματα ΡΟ, ΣΟ', τὰ ὑπὸ τῶν καμπύλων ἐναπολαμϐανόμενα, ἴσα ἔσονται· ἁπτομένη γὰρ τῆς ἐσωτερικῆς καμπύλης ἡ σρ ἔςω παράλληλος τῇ ΣΡ (χ. 112, 113, 114)· ᾗ διάμετρος ἡ χυ διηκέτω τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον· ἐκὲν ἡ ΟΞ τεταγμένη ἔςαι ἐπὶ ταύτην τὴν διάμετρον (57)· ᾗ ἐπείπερ ἡ ἀντίςοιχος διάμετρος τῆς ἐσωτερικῆς τομῆς ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεῖται εὐθείας τῇ τῆς ἐξωτερικῆς (257), δῆλον ὅτι ΣΡ ᾗ σρ ἔσονται διπλαῖ τεταγμέναι ἐν τῇ ἐξωτερικῇ τομῇ· ἄρα ΡΞ $=$ ΣΞ, ᾗ ρτ $=$ τς· ἐπεὶ δὲ ᾗ Ο'Ξ $=$ ΞΟ, ἄρα ᾗ ΣΟ' $=$ ΟΡ· διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον, ᾗ ΟΜ $=$ ΙΝ, ᾗ δλ $=$ δΛ· ἃ δ' εἴρηται ἐνταῦθα, ᾗ ἐπὶ τῆς παραϐολῆς κρατεῖ, ἀπείρε οἷον ἐλλείψεως ὅσης.

259. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ἐὰν τῆς τε ἐσωτερικῆς καὶ τῆς ἐξωτερικῆς τῶν ὑπερϐολῶν ὑποτεθῇ παράμετρος ἡ αὐτὴ $= \pi$ κειμένη ἐπὶ τῆ αὐτῆ ἄξονος, ᾗ γένηται ἡ ἁπτομένη $ΔΛ = δ$, ἔςαι $ΜΟ \times ΟΝ = δ^2$ (χ. 113).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςι γάρ, ἐν μὲν τῇ ἐξωτερικῇ ὑπερβολῇ $\pi \times ΑΠ = ΜΠ^2$, ἐν δὲ τῇ ἐσωτερικῇ $\pi \times ΔΟ = ΟΠ^2$ (29)· ἀλλὰ $ΜΠ^2 - ΠΟ^2 = ΝΟ \times ΜΟ$ (Γεωμ. 356) $= ΑΠ \times \pi - ΔΠ \times \pi = ΑΔ \times \pi$· καὶ $ΑΔ \times \pi = ΛΔ^2$ (29)· ἄρα $ΝΟ \times ΜΟ = ΛΔ^2 = δ^2$. Ο. Ε. Δ.

260. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Ἐὰν ἀντὶ τῶν ἐπὶ τὸν ἄ-

ξονα τεταγμένων ληφθῶσιν αἱ ἐπὶ τὰς διαμέτρȣς χυ, εὑρεθήσεται ρο × ος = ΡΤ² = ΤΣ² (258).

261. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐπειδὴ αἱ παραβολαὶ πᾶσαι ȣδενὶ ἀλλήλων διαφέρȣσιν ὅτι μὴ ταῖς παραμέτροις, ὥσπερ οἱ κύκλοι πάντες τῷ μεγέθει τῶν κατ' αὐτȣ̀ς ἀκτίνων· τȣ́τȣ χάριν ἅπασαι ὑπάρχȣσιν ὅμοια σχήματα.

262. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἐν ὁμοίαις ἐλλείψεσι καὶ ὑπερβολαῖς ἀεί ἐστι ΡΟ × ΟΣ = ρτ² (σχ. 112, 114).

ΔΕΙΞΙΣ. Κληθήτω γὰρ ἡ διάμετρος χυ = 2α, ἡ δ' αὐτῇ συζυγὴς = 2β, καὶ αἱ ἐπὶ τὴν χυ τεταγμέναι ρΞ = υ, καὶ Υ, αἱ ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον τῆς ἐσωτερικῆς καμπύλης διάμετρον = 2γ, καὶ 2δ ἡ συζυγὴς αὐτῇ διάμετρος, καὶ ΚΞ = χ· καὶ δὴ ἔσαι, ἐπὶ μὲν τῆς ἐξωτερικῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ἐξωτερικῆς ὑπερβολῆς $\upsilon^2 : \pm \alpha^2 \mp \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (121, 216)· ἐπὶ δὲ τῶν ἐσωτερικῶν $\Upsilon^2 : \pm \gamma^2 \mp \chi^2 :: \delta^2 : \gamma^2$ (αὐτ.)· ἀλλ' ἐπείπερ αἱ ἐσωτερικαὶ ταῖς ἐξωτερικαῖς εἰσιν ὅμοιαι· ἐκ τȣ́τȣ (256) $\beta^2 : \alpha^2 :: \delta^2 : \gamma^2$· ἄρα $\upsilon^2 : \pm \alpha^2 \mp \chi^2 :: \Upsilon^2 : \mp \gamma^2 \mp \chi^2$, καὶ $\upsilon^2 : \Upsilon^2 :: \pm \alpha^2 \mp \chi^2 : \pm \gamma^2 \mp \chi^2$, καὶ (ἀφαιρέσει τῶν ἑπομένων ὅρων) $\upsilon^2 - \Upsilon^2$ (= ΡΟ × ΟΣ (Γεωμ. 356)) $: \upsilon^2 :: \pm \alpha^2 \mp \gamma^2 : \pm \alpha^2 \mp \chi^2 :: \tau\rho^2 : \upsilon^2 =$ ($Ρ\Xi^2$) (*)· ἄρα ΡΟ × ΟΣ $: \upsilon^2 :: \tau\rho^2 : \upsilon^2$, καὶ ΡΟ × ΟΣ $: \tau\rho^2 :: \upsilon^2 : \upsilon^2$· ἄρα ΡΟ × ΟΣ $= \tau\rho^2$.

(*) Ῥᾶστα δ' ἄντις συνίδοι τὴν ἀναλογίαν $\pm \alpha^2 \mp \gamma : \pm \alpha^2 \mp :: \tau\rho^2 : Ρ\Xi^2$, τὰ ἐν τοῖς (94, 216) ἀναμνησθεὶς, καὶ τοῖς προκειμένοις σχήμασι τὸν νȣ̃ν μικρὸν ἐπιστήσας· ἔστι γὰρ ΚΙ = γ (ὡς πρὸς τὴν ἐσωτερικὴν καμπύλην κατὰ τὴν ὑπόθεσιν) = χ ὡς πρὸς τὴν τεταγμένην ΡΤ ἐπὶ τὴν διάμετρον χυ, καὶ ΚΞ = χ ἀποτετμημένη ἄλλη ὑπὸ τῆς τε-

263. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι τεταγμέναι ὦσιν ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα, ποριϑήσεται ΜΟ × ΟΝ = ΔΛ² = ϑ, κληϑείσης ϑ τῆς ΔΛ.

264. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν ὑποτεϑῇ ΜΟ = μ, καὶ ΟΝ = ω (ὑποτιϑεμένου ὡσαύτως κἂν τῇ παραβολῇ σχ. 113, ΔΛ = ϑ), ἔσται ἐπὶ τῶν προεκτεϑέντων ϑεωρημάτων καὶ τοῦ ἀνωτέρου πορίσματος, μω = ϑ² · γινομένου δὲ ἀπείρου τοῦ ω, ὃ τῇ ἐλλείψει οὐδέποτε συμβαίνει, εὑρεϑήσεται $\mu = \frac{\vartheta^2}{\omega} = \frac{\vartheta^2}{\infty} = o$, τοῦτ' ἔστιν ἡ ἐξωτερικὴ καμπύλη συνέρχεται τῇ ἐσωτερικῇ, ἐς ἄπειρον χωρήσασα διάστημα, ὃ οὐδέποτε συμβαίνει τῇ ἐλλείψει, ἅτε μηδέποτε ἐπ' αὐτῆς γινομένου ω = ∞.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τοῦ λογισμοῦ τῶν στοῶν.

265. Τοσαῦται διαφέρουσαι εἴδει στοαὶ ὑπάρχειν δύνανται, ὅσα καὶ εἴδη καμπύλων· αἱ μέντοι μᾶλλον εὔχρηστοι εἰσὶν αἱ ἐφεξῆς.

Στοὰ μὲν ἔγκεντρός ἐστιν, ὅταν ἡ περιφέρεια αὐτῆς ΑΟΒ (σχ. 115), ἀρχὰς ἔχουσα τὰς Α, Β, ᾖ μέρος τι κυκλικόν· τριτόσημος δὲ, ὅταν ΑΟΒ ᾖ ὥσπερ τριγωνική· ταπεινὴ δὲ, ὅταν ΑΟΒ ᾖ ἡμιελλεί-

ταγμένης ΡΞ· τὰ δὲ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων κατὰ τοὺς εἰρημένους παραγράφους εἰσὶν ἐν τῷ λόγῳ τῶν γινομένων ὑπὸ τῶν ἀποτετμημένων.

ψιον· ἀλλὰ α΄. εἰς κατασκευὴν ςοᾶς τȢ δοθέντος εἴδȢς, ἐπιςαθήτω τῷ ἐδάφει ἡ καμπύλη ΑΟΒ, καθ' ἣν ἡ ςοὰ τὸ σχῆμα κατασκευασθήσεται, ϗ ἐφηρμόσθωσαν αὐτῇ ὑπὸ τȢ οἰκοδόμȢ οἱ λίθοι· β΄. εἰς καταμέτρησιν τῆς ςερεότητος μιᾶς τινος ςοᾶς, εὑρεθήτω ἡ ἐπιφάνεια ΑΟΒ, καθ' ὃν ἡ καμπύλη αὕτη τετραγωνίζεται τρόπον, ϗ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ Μν μῆκος τῆς ςοᾶς· ϗ ὕτως εὑρεθήσεται ἡ ςερεότης εἴτε πλήρȢς, εἴτε κενῆς, τῆς ςοᾶς τῆς ἀπογεννηθείσης ὑπὸ τῆς ΑΟΒ καμπύλης, ἑρπυσάσης τὴν Μν ὁδόν· ἀλλὰ γὰρ μόνης τῆς ςερεότητος τȢ οἰκοδομήματος ζητȢμένης, εὑρεθήτω ἡ ἐπιφάνεια Κοδ ἡ ὁμοία τῇ ΑΟΒ, ϗ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ Μν· τὸ δὲ γινόμενον ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς προευρεθείσης ςερεότητος· τὸ δὴ κατάλοιπον ἔςαι ἡ ζητȢμένη ςερεότης, ἡ ἀπογεννωμένη ἐκ τȢ σχήματος ΑΚΟΒδ, ἑρπύσαντος τὴν ὁδὸν Μν.

Ἀλλ' ἐὰν ἡ ςοὰ ᾖ ἐξειργασμένη κατὰ τὸ σχῆμα τȢ οἰκίσκȢ αβγδΟο (σχ. 116), θεωρηθῆναι δύναται ὡς γεγεννημένη ἐκ τῆς περιςροφῆς τȢ αΟδ περὶ τὸν αὐτȢ ἄξονα, ἡ δ' ὁλικὴ αὐτῆς ςερεότης, εἴτε πλήρȢς, εἴτε κενῆς, ἔσεται ἡμισφαίριον, ἢ ἡμιπαραβολοειδὲς, ἢ ἡμιελλειψοειδὲς, κτ., ἀμέλειτοι ὡς ἔχει φύσεως ἡ καμπύλη αΟδ· ζητηθείσης ἄρα τῆς ςερεότητος ταύτης, κατὰ τὴν εὐχρηςῆσαν πρὸς τὸ ςερεὸν τόδε μέθοδον, εὑρεθήτω εἶτα ϗ ἡ ςερεότης τȢ ἐκ τῆς βογ ἀπογεννωμένȢ σώματος· ϗ τῆς δευτέρας ἀπὸ τῆς πρώτης ἀφαιρεθείσης, γνωσθήσεται ἡ τȢ οἰκοδομήματος τῆς ςοᾶς ςερεότης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ Κωνικῶν τομῶν γενῶν ὑπερτέρων.

266. Ἐὰν ᾖ καμπύλη αμΑ (σχ. 117), ἐν ᾗ αΑ $= 2\alpha$ (ἣ κληθείη ἂν ἄξων), ϗ ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ ἀποτετμημένη αΠ $= \chi$, ϗ ἡ τεταγμένη Πμ $= \upsilon$, ὑπάρχῃ δὲ $\chi^\mu : \upsilon^\mu :: \upsilon^\nu : \text{АП}^\nu = (2\alpha - \chi)^\nu$, προκύψει ἐξίσωσις $\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^\mu (2\alpha - \chi)^\nu$, ἥτις καλεῖται ἐξίσωσις κύκλων γενῶν ὑπερτέρων· καλῦνται δὲ ἕτω διὰ τὴν ταύτης τῆς ἐξισώσεως πρὸς τὴν τῦ συνήθυς κύκλυ ἐμφέρειαν· ἐὰν γὰρ ὑποτεθῇ $\mu = \nu = 1$, πρόεισιν $\upsilon^2 = 2\alpha\chi - \chi^2$ ἐξίσωσις τῦ συνήθυς κύκλυ· ὡς εἰ διὰ τῶν παρὰ ταύτην τὴν ὑπόθεσιν ἐξισώσεων κύκλοι γραφῶσιν, ἔσονται ἐ ϛρογγύλοι, καθ' ὃν ἅπαντες ἴσμεν κύκλον, μακρῷ δὲ διαφέροντες ἐκείνυ τῷ σχηματισμῷ, καθ' ἣν ἔχει φύσιν ἡ ἐξίσωσις· ἐὰν δὲ ἀποτμηθῶσιν αἱ εὐθεῖαι πρὸς μέσῳ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ κ, πορισθήσεται $\upsilon^{\mu+\nu} = (\alpha - \chi)^\mu \times (\alpha + \chi)^\nu$· τῦ δὲ Αα ὑποτεθέντος $= \alpha$, ἡ πρώτη ἐξίσωσις γενήσεται $\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^\mu (\alpha - \chi)^\nu$· ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^\mu (\alpha - \chi)^\nu$ ὑποτεθῇ ἐκ διαδοχῆς $\mu = 1, 2, 3, 4, 5$ κτ, ϗ $\nu = 1$, πορισθήσεται ὁ καλύμενος πρῶτος κύκλος πάντων τῶν γενῶν, τῦτ' ἔϛιν $\upsilon^2 = \alpha\chi - \chi^2$, $\upsilon^3 = \alpha\chi^2 - \chi^3$, κτλ.· εἰ δὲ γένηται $\mu = 3$ ϗ $\nu = 2$, εὑρεθήσεται $\upsilon^5 = \chi^3 (\alpha - \chi)^2$, ἥτις ἐμφαίνει τὸν δεύτερον κύκλον τῆς πρώτης τάξεως, ὑποτιθεμένυ δὲ $\mu = 2$, ϗ $\nu = 3$, ἔϛαι $\upsilon^5 = \chi^2 (\alpha - \chi)^3$, ἐκδηλῦσα κύκλον τρίτον τάξεως πέμπτης· ἐν γένει δὲ ὁ κύκλος εἴωθε λέγεσθαι πρῶτος, δεύ-

τερος, τρίτος κτ, ὡς ἂν εἴη ὑποτεθειμένον τὸ ν (δείκτης τῦ καταλοίπυ τῦ ἄξονος) = 1, 2, 3 κτλ.

267. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ γένος τῆς γραμμῆς ἐκ τῦ βαθμῦ τῆς κατ' αὐτὴν ἐξισώσεως ἐκλογιζόμεθα· δυνάμεθα μέντοι ἀρχὴν ποιήσαθαι τῶν γενῶν ϗ ἀπὸ τῦ συνήθυς κύκλυ, ὃν ἐκλάβοιμεν ἂν κύκλον πρωτογενῆ, ἢ πρωτοταγῆ, ἑξῆς δὲ, ὃν ὠνομάσαμεν πέμπτης τάξεως, ἢ πέμπτυ γένυς, ὡς τετάρτης τάξεως, ἢ τετάρτυ γένυς, ἐκδέξαθαι, ὥϛε τὸν κύκλον τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^{\mu+1} = \alpha\chi^{\mu} - \chi^{\mu+1}$ ἐγκαταριθμεῖθαι τάξει δηλυμένῃ διὰ $\mu + 1 - 1 = \mu$· δῆλον ῦν ὡς ἀδιάφορον τῦτο.

268. Πᾶσαι αἱ παραβολαὶ παραϛαθῆναι δύνανται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu} = \chi^{\nu}$, ὑποτιθεμένυ $\alpha = 1$· ἐὰν μὲν ῦν ἐπὶ πασῶν τύτων τῶν καμπύλων γένηται $\chi = 0$, ἔϛαι ϗ $\upsilon = 0$· ἐὰν δὲ γένηται $\chi = \infty$, ἔσεται ϗ $\upsilon = \infty$, εἰ μόνον μὴ εἴη ἀνύπαρκτος τύπος· ἡ γεμὴν ποικιλία τῶν δεικτῶν μ καὶ ν προσδιορίζει τὴν θέσιν τῶν παραβολικῶν κλωνῶν· κείθω γὰρ ἐξαγαγεῖν τὴν ῥίζαν $\mu+\nu$ ἀφ' ἑκατέρυ τῶν μελῶν τῆς γενικῆς ἐξισώσεως· ὅθεν εὑρίσκεται $\upsilon = \sqrt[\mu+\nu]{\alpha^{\mu}\chi^{\nu}}$· εἰ μὲν τοίνυν μ ϗ ν εἶεν ἀριθμοὶ περιττοὶ ϗ ὑπαρκτικοὶ, $\mu+\nu$ ἔϛαι ἀριθμὸς ἄρτιος, ϗ χ^{ν} ποσὸν ὑπαρκτικὸν, ϗ ῥίζα ἀρτιοβάθμιος ποσότητος ὑπαρκτικῆς· υ ἄρα δύω ἕξει δυνάμεις, τὴν μὲν ὑπαρκτικὴν, τὴν δὲ λειπτικήν· ϗ ἔνθεν μὲν αἱ ἀποτετμημέναι ΚΒ ὑπαρκτικαὶ εἶεν (σχ. 118), ἡ καμπύλη πρὸς ταῦτα ἀναφύσει δύω κλῶνας ΚΠ, ΚΞ, τὸν μὲν πρὸς τὰ ἐπὶ ΚΜ, ὅπυ ὑπαρκτικαί εἰσιν αἱ ἀποτετμημέναι, τὸν ἕτερον δὲ πρὸς τὰ ἐπὶ ΚΜ, ῦ εἰσὶ λειπτικαί· ἔνθεν δὲ λειπτικαὶ εἶεν αἱ χ, ϗ χ^{ν} ἔσεται ποσότης λει-

πτικὴ, ἡ δὲ υ γενήσεται ἀνύπαρκτος, ῥίζα ἔσα ἀρτία ποσότητος λειπτικῆς (τῆ α ὑπαρκτικῆ ὑποτιθεμένε)· πρὸς ἄρα τὰ ἐπὶ ΚΑ, ὅπε λείπεσιν αἱ χ, ἐδένα ἐπεκτενεῖ κλῶνα ἡ καμπύλη. Ἐὰν δὲ συνάμα τῇ χ ἢ α ὑπάρχῃ λειπτικὸν, ἢ ἕτως ἔςαι ἡ ἐξίσωσις $\upsilon^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu}$, ἐξ ἧς ἡ καμπύλη, δύω μὲν ἕξει κλῶνας, ἔνθα λειπτικαί εἰσιν αἱ ἀποτετμημέναι, ἐδένα μέντοι, ἔνθα ὑπαρκτικαί· θῶμεν ἔν ἤδη, τὸν μὲν μ ἄρτιον, τὸν δὲ ν περιττὸν, ὡς εἶναι μ + ν ἀριθμὸν περιττεύοντα· ἐὰν μὲν ἔν ὑποτεθῇ ὑπαρκτικὸν τὸ χ, ἔσεται ἢ χ^{ν} ὑπαρκτικὸν, ἢ υ ἔσεται ῥίζα περισσὴ ποσότητος ὑπαρκτικῆς, μίαν μόνην ἐχέσης ῥίζαν πραγματικὴν ἢ ὑπαρκτικήν· σαφὲς γὰρ ὡς ὑποτιθεμένης ἐξισώσεως $\chi^3 = \gamma^3$, ἐξ ἧς πρόεισι $\chi = \sqrt[3]{\gamma^3} = \gamma$, αἱ δύω λοιπαὶ ῥίζαι, αἳ πορίζονται διαιρεμένης τῆς $\chi^3 - \gamma^3 = o$ διὰ $\chi - \gamma = o$, εἰσὶν ἀνύπαρκτοι, εἴγε τὸ πηλίκον $\chi^2 + \gamma\chi + \gamma^2 = o$ προβάλλει ῥίζας ἀνυπάρκτες τὰς $\chi = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\gamma}{2}\sqrt{-3}$· ἄρα ἡ καμπύλη (σχ. 119) ἕνα μόνον κλῶνα ἔχει τὸν ΚΠ, ἐπεκτεινόμενον πρὸς ἅπερ εἰσὶν ὑπαρκτικαὶ αἵτε ἀποτετμημέναι ἢ τεταγμέναι· ἐὰν δ' ὑποτεθῇ τὸ χ λειπτικὸν, ἔσεται ἢ χ^{ν} ποσότης λειπτική· ἄρα υ ἔσεται ῥίζα περισσὴ ποσότητος λειπτικῆς, μίαν μόνην, πραγματικὴν μὲν, λειπτικὴν δὲ, ἐχέσης δύναμιν· ἡ ἄρα καμπύλη ἕξει ἢ ἕτερον κλῶνα ΚΞ, ἔνθ' αἵτε ἀποτετμημέναι ἢ αἱ τεταγμέναι εἰσὶ λειπτικαί· δῆλον δὲ πρὸς τέτοις, ὡς ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon^{\mu+\nu} = -\alpha^{\mu}\chi^{\nu}$, ταῖς μὲν ὑπαρκτικαῖς ἀποτετμημέναις ἀντιςοιχεσι τεταγμέναι λειπτικαὶ, ταῖς δὲ λειπτικαῖς τἐναντίον ὑπαρκτικαί· ἐὰν μὲν γὰρ ἡ λει-

πτικὴ ἡ χ, ἔσαι $υ^{μ+ν} = -α^μ \times -χ^ν$, ϰ̀ δὴ $υ^{μ+ν} = α^μ χ^ν$· ἐὰν δὲ ᾖ ὑπαρκτική, γενήσεται $υ^{μ+ν} = - α^μ \times + χ^ν$, ϰ̀ δὴ $υ^{μ+ν} = - α^μ χ^ν$, εἴτ᾽ οὖν $- υ^{μ+ν} = - α^μ χ^ν$.

Θῶμεν ἐφεξῆς, ἄρτιον μὲν τὸν ν, περισσὸν δὲ τὸν μ· ϰ̀ δή, τοῦ χ ὑπαρκτικοῦ ὄντος, ἔσαι ϰ̀ $χ^ν$ ποσότης ὑπαρκτική· πορισθήσεται ἄρα, ὡς ϰ̀ πρότερον, εἷς κλὼν ὁ ΚΠ (σχ. 120) πρὸς ἅπερ εἰσὶν ὑπαρκτικαὶ αἵτε χ ϰ̀ αἱ υ· ἀλλ᾽ ἐπειδὴ βαθμὸς ἅπας ἄρτιος ἀπὸ ποσότητος λειπτικῆς καθίσαται ποσότης ὑπαρκτική, τοῦ χ λειπτικοῦ ὄντος, $χ^ν$ γενήσεται ποσότης ὑπαρκτική· υ ἄρα ἔσεται ῥίζα περισσὴ ποσότητος ὑπαρκτικῆς· ἡ καμπύλη ἄρα ἕξει ϰ̀ ἕτερον κλῶνα τὸν ΚΞ, ἔνθα λειπτικαὶ μὲν εἰσὶν αἱ ἀποτετμημέναι, ὑπαρκτικαὶ δὲ αἱ τεταγμέναι· ἐν δὲ τῇ ἐξισώσει $υ^{μ+ν} = - α^μ χ^ν$ ἑκάτερος τῶν κλωνῶν κείσεται πρὸς τὰ ἐπὶ ΚΜ, ἔνθα εἰσὶν αἱ τεταγμέναι λειπτικαί.

Θῶμεν τελευταῖον τόν τε μ ϰ̀ τὸν ν ἀρτίους, ὡς ὑπάρχειν μ + ν ἀριθμὸν ἄρτιον· ὑποτιθεμένου οὖν τοῦ χ εἴτε ὑπαρκτικοῦ εἴτε λειπτικοῦ, $χ^ν$ ἀεὶ ἔσεται ποσότης ὑπαρκτική· υ ἄρα ἔσαι ῥίζα ἄρτιος ποσότητος ὑπαρκτικῆς, ϰ̀ δὴ ἕξει δυνάμεις δύω, τὴν μὲν ὑπαρκτικήν, τὴν ἑτέραν δὲ λειπτικήν· ἡ ἄρα καμπύλη τέσσαρας ἕξει κλῶνας (σχ. 121), ἐπεκτεινομένους, ἔνθα τε αἱ χ ϰ̀ υ εἰσὶν ὑπαρκτικαί, ϰ̀ ἔνθα αἱ χ ϰ̀ υ εἰσὶ λειπτικαί· ἡ δὲ καμπύλη $υ^{μ+ν} = - α^μ χ^ν$ ἔσαι ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει πάντῃ ἀνύπαρκτος.

269. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἰσέον ἐν παρόδῳ, ὅτι ἡ παραβολὴ τῆς ἐξισώσεως $χ^{μ+ν} = α^μ υ^ν$ ἡ αὐτή ἐσι τῇ, περὶ ἧς ἤδη εἰρήκαμεν, πλὴν ὅτι αἱ ἐν ἐκείνῃ τεταγμέναι

παράλληλοί εἰσι ταῖς ἐν τῇ πρώτῃ ἀποτετμημέναις, αἱ δὲ ἀποτετμημέναι παράλληλοι ταῖς τεταγμέναις· ὑποτιθεμένȣ δὲ $\mu = 4$, ϗ $\nu = 1$, πορισθήσεται $\upsilon^5 = \alpha^4\chi$, ἐξίσωσις τῆς πρώτης πεμπτογενȣ̃ς παραβολῆς· γινομένȣ δὲ $\mu = 3$, ϗ $\nu = 2$, πορισθήσεται $\upsilon^5 = \alpha^3\chi^2$, παραβολὴ δευτέρα πεμπτογενής· καθόλȣ δὲ εἰπεῖν, αἱ μὲν πρῶται παραβολαὶ προκύπτȣσι, γινομένȣ $\nu = 1$, αἱ δὲ δεύτεραι, ὑποτιθεμένȣ $\nu = 2$, αἱ δὲ τρίται, $\nu = 3$, κτλ.

270. Ἐὰν ἐν τῇ καμπύλῃ αμΑ (σχ. 117) ὑποτεθῇ $\upsilon^2 : \alpha\Pi \times \mathrm{A}\Pi = \alpha\chi - \chi^2 :: \pi : \alpha$, πορισθήσεται τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσις $\frac{\alpha}{\pi}\upsilon^2 = \alpha\chi - \chi^2$· διαιρεθεῖσα γὰρ αὕτη διὰ α, ϗ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ π, γενήσεται $\upsilon^2 = \pi\chi - \frac{\pi\chi^2}{\alpha}$, ἔνθα ἀντὶ α εἰσαγομένȣ 2α, προκύψει $\upsilon^2 = \pi\chi - \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$, ἐξίσωσις ἡ εὑρεθεῖσα (251)· ἐὰν μέντοι ὑποτεθῇ $\upsilon^{\mu+\nu} : \chi^\mu \times (\alpha - \chi)^\nu :: \pi : \alpha$, προκύψει $\frac{\alpha}{\pi}\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^\mu(\alpha - \chi)^\nu$, ἐξίσωσις τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη ἐλλείψεων· ϗ ἵνα μὲν εὑρεθείη ἡ πρώτη, φέρ' εἰπεῖν, πεμπτογενὴς ἔλλειψις, γενέσθω $\nu = 1$, ἵνα δὲ ἡ δευτέρα, ὑποτεθήτω $\nu = 2$ κτ.

271. Ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ ῥηθέντος, α μὲν τȣ̃ πρώτȣ ἄξονος, π δὲ τῆς παραμέτρȣ, ἀνακύψει $\frac{\alpha}{\pi}\upsilon^2 = \alpha\chi + \chi^2$· ἐὰν μέντοι γένηται $\upsilon^{\mu+\nu} : \chi^\mu \times (\alpha + \chi)^\nu :: \alpha : \pi$, ἐντεῦθεν προελεύσεται $\frac{\alpha}{\pi}\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^\mu(\alpha + \chi)^\nu$, ἐξίσω-

σις τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη ὑπερβολῶν· αἱ δὲ πρῶται, δεύτεραι, τρίται, κτ. ὑπερβολαὶ, αἱ πεμπτογενεῖς φέρε, διοριθήσονται γενομένε $\nu = 1, 2, 3$ κτ.

272. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν μὲν ὁ δείκτης $\mu + \nu$ τε υ ᾖ ἀριθμὸς περιττὸς, τὸ υ μίαν μόνην ῥίζαν πραγματικὴν περιέξει· δύω δὲ, ἐὰν ᾖ ἄρτιος· ἐκείνως μὲν ἄρα ἑκάςη ἀποτετμημένη μίαν σύςοιχον ἕξει τεταγμένην, ὅτω δὲ δύω· κἀκείνως μὲν εἷς κλῶν μόνος ἔσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ τε ἄξονος, ὅτω δὲ δύω· ταῦτα δ' ὀχ ἧττον κρατεῖ ἐπίτε τῶν κύκλων ϗ τῶν ἐλλείψεων ϗ τῶν παραβολῶν, τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη· ἑξῆς δ' ὀψόμεθα, ὡς ὀχὶ τ' αὐτὰ κρατεῖ κἀπὶ τῶν ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ὑπερβολῶν, τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη.

273. Ἐὰν γένηται $\chi^\mu : \alpha^\mu :: \alpha^\nu : \upsilon^\nu$, προκύψει $\chi^\mu \upsilon^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$ ἐξίσωσις τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ὑπερβολῶν (*) ὅθεν ἀποφέρεται $\upsilon^\nu = \frac{\alpha^{\mu+\nu}}{\chi^\mu}$· ἐὰν ὂν ὑποτεθῇ χ ἀπειροςὸν, προκύπτει $\upsilon^\nu = \infty$, ϗ $\upsilon = \sqrt[\nu]{\infty}$· εἰ δ' ὑποτεθείη $\chi = \infty$, ἔςαι $\upsilon^\nu = 0$, ϗ $\upsilon = 0$· ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^\nu = \frac{\alpha^{\mu+\nu}}{\chi^\mu}$, ἀποφέρεται $\upsilon = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha^{\mu+\nu}}{\chi^\nu}}$, ἐξίσωσις παρεχομένη τὰς ἐφεξῆς συνεπείας.

(*) Δυνάμεθα δὲ ποιῆσαι ϗ $\chi^\nu : \alpha\upsilon :: \alpha^{\mu-\nu} : \upsilon^{\mu-\nu}$, ὅθεν $\alpha^\mu = \upsilon^{\mu-\nu} \chi^\nu$, ἑτέρα ἐξίσωσις τῶν ὑπερβολῶν, παρέχεσα, ὃ ϗ ἡ πρώτη, ἀποτέλεσμα.

Α΄. Ἐὰν μὲν μ καὶ ν ὦσιν ἀριθμοὶ περιττοὶ, ὃ συμβαίνει τῇ συνήθει ὑπερβολῇ, ὑπαρκτικοῦ ὄντος τοῦ χ, ἔσεται καὶ $χ^μ$ ποσὸν ὑπαρκτικόν· ἄρα υ μίαν μόνον ἕξει δύναμιν πραγματικήν· διὸ δὴ ἕνα κλῶνα ἕξει ἡ καμπύλη τὸν Π (σχ. 122), ἔνθα αἱ ἀποτετμημέναι καὶ αἱ τεταγμέναι ὑπάρχουσιν ὑπαρκτικαί· λειπτικοῦ δὲ ὄντος τοῦ χ, ἔσεται καὶ $χ^μ$ ποσότης λειπτικὴ, καὶ υ ἔςαι ποσότητος λειπτικῆς ῥίζα περισσὴ, ἔχουσα μίαν μόνην δύναμιν, πραγματικὴν μὲν, ἀλλὰ λείπουσαν· ἐντεῦθεν ἄρα ἀναφυήσεται κλὼν ἕτερος ὁ Ξ, πρὸς ἃ μέρη λειπτικαὶ τίθενται αἱ χ καὶ αἱ υ.

Β΄. Ἐὰν δὲ ν μὲν ᾖ ἀριθμὸς περισσὸς, μ δὲ ἄρτιος, εἴτε ὑπαρκτικοῦ, εἴτε λειπτικοῦ ὑποτιθεμένου τοῦ χ, $χ^μ$ ἔσεται ἀείποτε ὑπαρκτικόν· ἄρα υ ἔςαι ποσότητος ὑπαρκτικῆς ῥίζα περισσὴ, μίαν μόνην δύναμιν πραγματικὴν καὶ ὑπαρκτικὴν ἔχουσα· ἡ ἄρα καμπύλη σύγκειται ἐκ δύω κλωνῶν Π καὶ Ξ (σχ. 123), ὧν ὁ μὲν πρῶτος τάς τε ἀποτετμημένας καὶ τὰς τεταγμένας ἕξει ὑπαρκτικὰς, θατέρῳ δὲ, λειπτικαὶ μὲν ἔσονται αἱ ἀποτετμημέναι, ὑπαρκτικαὶ δὲ αἱ τεταγμέναι.

Γ΄. Ἐὰν δὲ τοῦ ν ὄντος ἀριθμοῦ ἀρτίου, ὁ μ ὑπάρχῃ περισσὸς, ὑποτιθεμένου χ ὑπαρκτικοῦ, ἔςαι καὶ $χ^ν$ ποσότης ὑπαρκτικὴ, καὶ υ ἔσεται ποσότητος ὑπαρκτικῆς ῥίζα ἄρτιος, δύω εὐμοιροῦσα δυνάμεων, τῆς μὲν ἐν ὑπάρξει, ἐν λείψει δὲ τῆς ἑτέρας· ἡ ἄρα καμπύλη (σχ. 124) δύω προβαλεῖται κλῶνας, τόν τε Π, ἔνθα αἱ τεταγμέναι εἰσὶν ὑπαρκτικαὶ, καὶ τὸν Ξ, ἔνθα λειπτικαί εἰσιν αἱ υ· εἰ δὲ χ εἴη λειπτικὸν, ἔσεται καὶ $χ^μ$ ὡσαύτως· οὐκοῦν υ ἔςαι ποσότητος λειπτικῆς ῥίζα ἄρτιος, καὶ ἑπομένως ἀνύπαρκτος· ἡ ἄρα καμπύλη οὐδενὸς εὐμοιρήσει κλωνὸς, ἔνθα αἱ χ εἰσὶ

λειπτικαί· ἐν ἁπάσαις δὲ ταῖς ῥηθείσαις περιπτώσεσιν, εἴπερ εἴη ἐξίσωσις $\chi^{\mu} \upsilon^{\nu} = - \alpha^{\mu} + \nu$, ἀπογεννήσει τὰς αὐτὰς ὑπερβολὰς, μετατρεπομένων τῶν ὑπαρκτικῶν χ ϗ υ εἰς λειπτικὰς, ϗ τ' ἀνάπαλιν.

Δ΄. Τελευταῖον δὲ, ἐὰν μ ϗ ν ὦσιν ἀριθμοὶ ἄρτιοι, τȣ̃ χ εἴτε ὑπαρκτικȣ̃, εἴτε λειπτικȣ̃ ὄντος, ἔσεται ἀεί-ποτε χ^{μ} ποσὸν ὑπαρκτικὸν, ϗ υ, ῥίζα ȣ̃σα ἀρτία ποσότητος ὑπαρκτικῆς, δυεῖν δυνάμεων εὐμοιρήσει, τῆς μὲν ὑπαρκτικῆς, τῆς δ' ἑτέρας λειπτικῆς, ἀντιςοιχȣσῶν ἑκατέρας ἑκατέρᾳ ὑπαρκτικῇ, ἢ λειπτικῇ χ· ἡ ἄρα καμπύλη (σχ. 125) συγκείσεται ἐκ τεσσάρων κλωνῶν Π, Ξ, Θ, Ρ ἐπεκτεινομένων, ἔνθατε εἰσὶν αἱ ὑπαρκτικαὶ χ, υ, ϗ ἔθα αἱ λειπτικαὶ, ἐνταύτῃ δὲ τῇ περιπτώσει ἡ ἐξίσωσις $\chi^{\mu} \upsilon^{\nu} = - \alpha^{\mu} + \nu$ ὑπάρχει ἀδύνατος.

274. ΣΗΜΕΩΣΙΣ. Αἱ, περὶ ὧν ἤδη ἐν τῇ ἐσχάτῃ περιπτώσει εἰρήκαμεν, ὑπερβολαὶ ȣ̓δὲν ἀλλ' ἢ αἱ τῶν προεκτεθεισῶν περιπτώσεων ὑπάρχȣσιν, ἀθρόον εἰλημμένων· ἐξαγομένης γὰρ τῆς τετραγωνείȣ ῥίζης ἐς ὃ ἂν ἕτερος τῶν δεικτῶν τȣ̃ χ, ἢ τȣ̃ υ, ἢ ϗ ἑκάτερος, εἶεν περισσοὶ, πορισθήσεται ἐξίσωσις, ἐν ᾗ διὰ τὸ διπλȣ̃ν σύμβολον ± παραςήσονται ὑπερβολαὶ ἐπανήκȣσαι τινι τῶν εἰρημένων περιπτώσεων· κατάδηλον δε, ὅτι ὡσαύτως συλλογίζεσθαι προσήκει ἐν τῇ τῆς παραβολῆς ἐξισώσει $\upsilon^{\mu + \nu} = \alpha^{\mu} \chi^{\nu}$, ἡνίκα μ ϗ ν εἶεν ἀριθμοὶ ἄρτιοι.

ΥΨΗΛΟΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Καμπύλων ἐν γένει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ Γεωμετρικῶν Καμπύλων.

275. Πᾶσα γραμμὴ νοηθῆναι δύναται ὡς γεννωμένη ἐκ κινήσεως σημείου (Γεωμ. 10, 11)· καὶ εἰ μὲν τὸ γεννητικὸν σημεῖον κατὰ σταθερὸν νόμον ἕρπει, καλεῖται κανονική· ἀκανόνιστος δὲ, εἰ τοὐναντίον· Πᾶσα δὲ εὐθεῖα ὑποτεθῆναι δύναται ὡς πλευρὰ τριγώνου τοῦ ΗΔΜ (σχ. 63), ἐν ᾧ αἱ τεταγμένως ἐφ' ἕκαστον σημεῖον, καταλειπόμενον ὑπὸ τοῦ γεννητικοῦ σημείου, ἀχθεῖσαι, εἰσὶν ὡς αἱ ἀντίστοιχοι ἀποτετμημέναι, ὁ δὲ λόγος, καθ' ὃν τὸ σημεῖον εἵρπυσε, παρίσταται διὰ πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως τῆς $\upsilon = \frac{\Upsilon \times \chi}{X}$ (11)· πᾶσα ἄρα εὐθεῖα γραμμή ἐστι κανονική· ἄρα πᾶσα ἀκανόνιστος ἔσται ἀναγκαίως καμπύλη.

276. Καμπύλη Ἀριθμητική, ἢ Γεωμετρική, λέγεται, ὅταν τῇ κατ' αὐτὴν ἐξισώσει εὐθεῖαι ἐμπίπτωσιν, ὧν ὁ λόγος δηλωθῆναι δύναται ἐν ἀριθμοῖς· τοιαίδε εἰσὶν αἱ τέσσαρες ἐγνωσμέναι καμπύλαι, αἱ κωνικαὶ τομαὶ ἤκουσαν· καμπύλη δὲ Ὑπερβατική, ὅταν τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν συντιθῶσι γραμμαὶ, ὧν ὁ λόγος δι' οὐδενὸς ἀ-

ριθμȣ̃ δηλωθῆναι ἔχει· καμπύλη φέρ᾽ εἰπεῖν, ἧς συνέκθεσίς τις τεταγμένων πρὸς συνέκθεσιν ἀποτετμημένων ἔςιν, ὡς ἡμίτονόν τι πρὸς τὸ αὐτȣ̃ κυκλικὸν τόξον, ὑπάρχει ὑπερβατική· ἐπεὶ γὰρ γεωμετρικῶς ἡ κυκλικὴ περιφέρεια ȣ̓δέπω μεμέτρηται, ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς ῥηθῆναι τὸν μεταξὺ ἡμιτόνȣ καὶ κυκλικȣ̃ τόξȣ λόγον.

277. Οἱ μὲν ȣ̃ν διάφοροι βαθμοὶ τῶν ἐξισώσεων, οἱ ἐμφαίνοντες τὴν φύσιν τῶν ἀριθμητικῶν καμπύλων, διορίζουσι τὰ γένη, ἢ τὰς τάξεις, τῶν καμπύλων· οἱ δὲ ποικίλοι συνδυασμοὶ τῶν κατὰ τὰς ἀποτετμημένας καὶ τεταγμένας συνεκθέσεων τὰ ποικίλα εἴδη τῶν καμπύλων τὰ τῷ γένει ὑπαγόμενα ἐμφαίνȣσι· καλεῖται τοίνυν γραμμὴ πρωτοταγὴς, ἢ πρώτȣ γένȣς, ἧς πρωτοβάθμιος ἡ ἐξίσωσις, δευτεροταγὴς δὲ, ἢ δευτέρȣ γένȣς, ἧς δευτεροβάθμιος κτλ. καὶ τȣ̃ μὲν πρώτȣ γένȣς, μόνη ἡ εὐθεῖα ὑπάρχει· τȣ̃ δὲ δευτέρȣ αἱ τέσσαρες κωνικαὶ τομαί· τȣ̃ δὲ τρίτȣ παρὰ τὰς τῶν καθυπερτέρων γενῶν κωνικὰς τομὰς (266) καὶ ἄλλαι εἰσὶ πλεῖν ἢ 72· τȣ̃ δὲ τετάρτȣ πλείȣς ἢ 146· καὶ ȣ̔́τως ἐπ᾽ ἄπειρον αὔξȣσιν· εἰσὶν ἄρα ἄπειροι εἴδει διαφέρȣσαι καμπύλαι κανονικαὶ ἀριθμητικαί.

Ὥςε ἐν γένει, ἵνα γραφῇ καμπύλη, ἧς δέδοται ἡ καθόλȣ συμβολικὴ ἐξίσωσις, ἤχθω εὐθεῖα τέρματος ἄνευ, καὶ εἰλήφθω κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς σημεῖον, ὃ δεῖ τεθῆναι εἰς ἀρχὴν τῶν ἀποτετμημένων, καὶ ἀνεςάθωσαν ἐξῆς πρὸς αὐτὴν τεταγμέναι ὑπαρκτικαί τε καὶ λειπτικαὶ, ἀντιςοιχȣ̃σαι ἑκάςῃ τῇ οἰκείᾳ αὐτῆς ἀποτετμημένῃ· τȣτὶ δὲ μάλα φανήσεται διʼ ὑποδείγματος.

278. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Δοθείσης ἐξισώσεως καμπύλης ἀριθμητικῆς, ἀναγράψαι τὴν καμπύλην.

ΛΥΣΙΣ. Δεδόσθω ἓν ἐξίσωσις δευτεροβάθμιος ἡ $υ^2 = \frac{β^2χ^2 - α^2β^2}{α^2}$ (Ρ)· ὑποτεθείσθω δὲ κατὰ τὸ δοκῦν $α = 6$ (6 ὀργυιαῖς, ἢ ποσὶ ἢ κτλ.) καὶ $β = 3$· μετὰ δὲ τὸ ληφθῆναι τὴν δύναμιν $α =$ ΚΣ ἐπὶ τῆς ἀπεράντυ ΚΛ (σχ. 126)· υ ἐν τῇ ἐξισώσει Ρ, ἀεὶ εὑρίσκεται ἀνύπαρκτος, ἕως ὗ ὑποτίθεται $χ < 6$· ἐκ τύτυ ἄρα συνάγειν ἔξεσιν, ὡς ὐδεμία εὐθεῖα ταχθῆναι δύναται ἐπὶ τὴν ΚΣ· ὑποτεθείσης ἄρα $χ = 6$, υ ἐν τῇ Ρ εὑρίσκεται $= ο$· τυτέσιν ἡ καμπύλη διελεύσεται διὰ τῦ πέρατος Σ. β΄. γενομένης $χ = 7$, ἔςαι, $υ = \sqrt{\frac{117}{6}}$· εὑρεθεῖσα ἄρα διὰ προσεγγίσεως ἡ κατὰ τὴν υ δύναμις, ἡ ἀντίσοιχος τῇ $χ = 7$, ὑψύσθω ὡς τεταγμένη· ἀντὶ δὲ χ τεθεισῶν ἐκ διαδοχῆς τῶν 8, 9 κτλ, εὑρεθήσονται διὰ πράξεων ἐκ διαδοχῆς αἱ υ, καὶ ἡ διὰ τῶν περάτων τῶνδε τῶν τεταγμένων καταγραφομένη γραμμὴ ἔσεται ἡ ζητυμένη καμπύλη. Ο. Ε. Π.

Ἀλλὰ α΄. ἐπείπερ ἐν τῇ Ρ, $α^2$, $β^2$ εἰσὶν ἄτρεπτοι, τῶν χ αὐξομένων συναύξονται καὶ αἱ υ, καὶ μᾶλλον χωροῦσι πόῤῥω τοῦ ἄξονος ΣΤ οἱ κλῶνες· β΄. $υ = \mp \frac{\sqrt{β^2χ^2 - α^2β^2}}{α}$, τυτέσιν ἑκάςῃ ὑπαρκτικῇ ἀντιςοιχεῖ καὶ λειπτικὴ ἄλλη ἴση· πρὸς ἄρα τὰ ἀριςερὰ τῆς ΣΛ τιθεμένων κατὰ τὸ συνεχὲς τῶν ἀντιςοίχων λειπτικῶν θηρεύονται ἑκάτεροι οἱ κλῶνες τῆς ΣΤτ· ἀλλὰ γὰρ χ γενομένυ ἐν τῇ ἐξισώσει λειπτικῦ, προϊᾶσιν ἀποτετμημέναι χ ἐκ τῦ Κ, καὶ πᾶσαι αἱ ἐν τῇ Ρ υ ἐλέγχονται ἀνύπαρκτοι, ἔςτ' ἂν τεθῇ $-χ = -6$· γενομένης δὲ $-χ = -6$, εὑρίσκεται $υ = ο$, τῦτο δὲ δηλοῖ, τὴν καμπύ-

λην διελεύσεσθαι διὰ τῆς ἑτέρας κορυφῆς σ· τέλος δὲ, ἐπεὶ ἀεὶ ἐςὶ χ^2, κἂν ᾖ $-\chi$, κἂν $+\chi$, εὑρεθήσονται, ἐκ διαδοχῆς τιθεμένης $\chi = -7$, -8 κτ, αἱ αὐταὶ τεταγμέναι, αἱ κἂν τοῖς σημείοις 7, 8· μεταγομένων ἄρα ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ τῆς σχ τῶν ἀπὸ τοῦ Κ ἀποςημάτων, $=$ Κ7, Κ8, ὡς λειπτικῶν τε ϗ ὑπαρκτικῶν, εὑρεθήσονται αἱ δύω καινοὶ κλῶνες σΜν.

Φημὶ οὖν, ὡς εἰ δέοι ἔχειν τὴν καμπύλην ἀποτετμημένας, γνωσθήσεται ἐξ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως· οἷον ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon^2 = \pi\chi$ (τῇ τῆς παραβολῆς) ἐὰν τεθῇ λειπτικὸν τὸ χ, ἔςαι $\upsilon^2 = -\pi\chi$, ϗ $\upsilon = \pm\sqrt{-\pi\chi}$, ποσότης ἀνύπαρκτος· ἡ ἄρα ἐκ ταύτης τῆς ἐξισώσεως ἐμφαινομένη καμπύλη λειπτικῶν ἀποτετμημένων ἔσεται ἀνεπίδεκτος.

279 ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Δοθείσης ἐξισώσεως τῆς $\upsilon^3 - \alpha\chi^2 = 0$, τὴν δι' αὐτῆς ἐμφαινομένην ἀναγράψαι καμπύλην (σχ. 127).

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθωσαν αἱ τεταγμέναι κάθετοι ταῖς ἀποτετμημέναις, ϗ ἀπονεμηθήτωσαν τῇ χ δυνάμεις ἐκ διαδοχῆς ἀπὸ τοῦ ο ἀρχόμεναι ϗ εἰς ∞ τελευτῶσαι, ϗ ἑκάςης τῶν δυνάμεων τῆς χ ζητηθήτω δύναμις ἀντίςοιχος τῆς υ· ὑποτεθήτω οὖν $\chi = 0$· οὐκοῦν ἔςαι ϗ $\upsilon = 0$· λαμβανομένου ἄρα τοῦ σημείου κ ὡς ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων, ἡ καμπύλη δι' αὐτοῦ διαβήσεται· γενέσθω εἶτα $\chi = 1$· οὐκοῦν ἔςαι $\upsilon^3 = \alpha$ ϗ $\upsilon = \sqrt[3]{\alpha}$· ὑποτιθεμένου δὲ $\alpha = \frac{1}{8}$ (ἑνὶ φέρε ποδὸς ὀκτημορίῳ), εὑρεθήσεται $\upsilon = \frac{1}{2}$· εἰλήφθω τοιγαροῦν κα $= \chi = 1$, ϗ ἤχθω ἐπὶ τὸ α τεταγμένως ἡ αΒ $= \frac{1}{2}$· τὸ δὲ Β σημεῖον ἔςαι ἐν τῇ καμπύλῃ· ἑξῆς δὲ γενέσθω $\chi = 2$· ϗ δὴ προκύψει $\upsilon^3 = 4\alpha = \frac{1}{2}$, ϗ $\upsilon =$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$· τεθέντος ἦν κ Π $= \chi = 2$, ἀνεςάθω τεταγμένη ἡ Πμ $= \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (ὅπερ ὡς ἔγγιςα εὑρίσκεται ἐν δεκαδικοῖς ἡ δύναμις)· τιθεμένων δ' ἔπειτα ἐκ διαδοχῆς $\chi = 3, 4$, κτ, ζητηθήτωσαν αἱ αὐταῖς σύςοιχοι υ· γενομένων δὲ ϗ $\chi = -1, = -2$, κτ, εὑρεθήσονται δυνάμεις αἱ ἀντίςοιχοι ταῖς λειπτικαῖς ἀποτετμημέναις· γραμμῆς δὲ διελθούσης διὰ τῶν περάτων πασῶν τῶν εὑρημένων υ, ποριθήσεται καμπύλη ἡ Μκμ τοσούτῳ ἀκριβεςέρα, ὅσῳ ἂν προσεχέςερον ἀλλήλων τεθῶσιν αἱ υ, ϗ ἀκριβέςερον εὑρεθῶσιν αἱ κατ' αὐτὰς δυνάμεις. Ο. Ε. Π.

280. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Ἐξισώσεως τῆς $\upsilon = \sqrt{\chi} \pm \sqrt[4]{\chi^3}$ δοθείσης, τὴν ὑπ' αὐτῆς ἐμφαινομένην ἀναγράψαι καμπύλην (σχ. 128.)

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ΑΒ ἄξων, ϗ Α ἀρχὴ τῶν ἀποτετμημένων· ἐκεῖν ἡ καμπύλη οὐδένα κλῶνα ἕξει πρὸς τὰς λειπτικὰς χ· ϗ γὰρ λειπτικοῦ ὑποτιθεμένου τοῦ χ, προέρχεται $\upsilon = \sqrt{-\chi} \pm \sqrt[4]{-\chi^3}$ ποσότης ἀνύπαρκτος· ὑποτεθείσθω οὖν $\chi = 1$· ϗ δὴ ἔςαι $\upsilon = 1 \pm 1$, εἴτ' οὖν $\upsilon = 2$, ϗ $\upsilon = 0$· ὑποτιθεμένου ἄρα τοῦ Α Β $= 1$, εἷς μὲν τῶν κλωνῶν τῆς καμπύλης ὁ ΑΜ συμβαλεῖ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Β, ἅτερος δὲ διαβήσεται διὰ ν πέρατος τῆς τεταγμένης Β$\nu = 2$· εἰ δὲ εἴη $\chi =$ ΑΠ$= \frac{8}{10}$, εὑρεθήσεται διὰ προσεγγίσεως $\upsilon = 1, 741$, ϗ $\upsilon = 0, 047$· τὸ τοίνυν σημεῖον Ν τῆς μείζονος τεταγμένης ἐπανήκει τῷ κλωνὶ Αν, τὸ δὲ μ τῆς ἐλάτονος Πμ, τῷ κλωνὶ ΑμΒ· ϗ ἐπειδὴ μεταξὺ Α ϗ Β αἱ δύω δυνάμεις τῆς υ ἀεί εἰσιν ὑπαρκτικαὶ, ἑκάτερος τῶν δύω κλωνῶν Αμ, Αν κείσεται ὕπερθεν τοῦ ἄξονος· ὡς εἰ γένοιτο $\chi > 1$, εὑρεθήσονται τοῦ υ δύω δυνάμεις, ἡ μὲν ὑπαρκτικὴ, ἡ δὲ λειπτικὴ,

ὥςε τὸν μὲν Αν κλῶνα μένειν ἀεὶ ὕπερθεν τȣ̃ ἄξονος, τὸν δὲ ΑμΒ κατιέναι ἔνερθεν τȣ̃ αὐτȣ̃ ἄξονος· λογισθεισῶν δὲ τῶν τȣ̃ υ δυνάμεων ἐν δεκαδικοῖς, εὑρεθήσονται ὅσα ποτὲ βȣλόμεθα σημεῖα τῆς καμπύλης· τοσȣ́τῳ δ' ἀκριβέςερον, ὅσῳ ἂν ἐγγύτερον τȣ̃ ἀληθȣ̃ς τὸν λογισμὸν παραγάγωμεν· εἰ δ' ὑποτεθείη $\chi = \infty$, ἔςαι $\upsilon = \infty^{\frac{1}{2}} \pm \infty^{\frac{3}{4}} = \pm \infty^{\frac{3}{4}}$ (ὁ γὰρ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον ἀφανίζεται)· τοιγαρȣ̃ν ἑκάτερος τῶν κλωνῶν ἀπείρως ἀποχωρεῖ τȣ̃ ἄξονος, ὁ μὲν ἔνερθεν, ὁ δὲ ὕπερθεν· Σημειωτέον δὲ ἐν παρόδῳ, ὡς ἑκάτερος τῶν κλωνῶν τȣ̃ σημείȣ Α ἀποχωρῶν ςρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, ὡς τὴν θατέρȣ κοιλότητα ἐςράφθαι πρὸς τὴν θατέρȣ καμπυλότητα.

281. Ἐὰν δοθῇ ἐξίσωσις ἡ $\chi^5 - \chi + \upsilon + \upsilon^3 = 0$, ὑποτεθέντων ἐκ διαδοχῆς $\chi = 1, 2, 3$ κτ· $-1, -2$ κτ, τῇ ἐπιλύσει τῆς τριτοβαθμίȣ ἐξισώσεως, γνωσθήσονται αἱ συςοιχȣ̃σαι δυνάμεις τοῦ υ· κἂν μὴ ἀκριβῶς ἐπιλυθείη ἡ ἐξίσωσις, εὑρεθήσονται μέντοι αἱ προσεχέςαται ταῖς ἀληθέσι δυνάμεις τȣ̃ υ.

282. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀλλὰ περὶ μὲν τούτων, κἂν βραχέα, ἱκανὰ μέντοι ἐν τῇ προκειμένῃ ἡμῖν προθέσει· ἀφθονώτερα δ' ὁ βουλόμενος εὑρήσει ἐν ταῖς τῶν νεωτέρων βίβλοις, αἷς σκοπὸς αὐτὴν μόνην τὴν ὑψηλοτέραν Γεωμετρίαν πραγματεύσασθαι· μετιέτω δὲ πρὸς τοῖς ἄλλοις καὶ Σαυρίου τὴν πεντάτομον μαθηματικὴν ὁδὸν, ἀφ' ἧς ἡμῖν τὰ πλεῖςα ἐνταῦθα μετωχέτευται· ἀλλ' εἴπωμεν νῦν διὰ βραχέων καὶ περὶ τῶν Γεωμετρικῶν τόπων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Γεωμετρικῶν Τόπων.

283. Ἐξίσωσις πᾶσα ἀόριςος δύω ἀγνώςων περιεκτικὴ χ ϗ υ, δηλᾶσα εὐθεῖαν γραμμὴν ἢ καμπύλην, καλεῖται Τόπος Γεωμετρικός· ἐὰν γὰρ ληφθῇ ἡ ΜΝ γραμμὴ (σχ. 129) ὡς ἄξων τῶν χ, ϗ αἱ ΠΖ, ΣΔ, ΣΗ, κτλ. κληθῶσιν υ, τῶν μὲν ὑπαρκτικῶν υ ἐν ἀριςερᾷ, τῶν δὲ λειπτικῶν κειμένων ἐν δεξιᾷ τῆς ΜΝ, ἡ μὲν εὐθεῖα ΔΞ ἔςαι τόπος τῶν ὑπαρκτικῶν τεταγμένων, τῶν συςοιχάσῶν τῷ τμήματι ΚΝ τᾶ τῶν ἀποτετμημένων ἄξονος, ϗ ἔτι τόπος τῶν λειπτικῶν τεταγμένων, τῶν συςοιχάσῶν τῷ τμήματι ΚΜ· ἡ δὲ ἀπέραντος γραμμὴ Ηκ ἔςαι τόπος τῶν τε λειπτικῶν τεταγμένων, τῶν συςοιχάσῶν τῷ ΚΝ, ϗ τῶν ὑπαρκτικῶν τῶν συςοιχάσῶν τῷ ΚΜ· ἐὰν ἄν γένηται ΚΠ $= \alpha$, ϗ ΖΠ τετάρτη ἀνάλογος δεδομένων εὐθειῶν τῶν ν, μ, α, εἴτ' ἂν $= \frac{\mu\alpha}{\nu}$, ἐφιςαμένη κάθετος τῇ ΜΝ, ϗ ΠΤ $= \chi$, ϗ ἡ τεταγμένη ΤΨ τῇ ΠΖ παράλληλος $= \upsilon$, ἔςαι ΚΤ $=$ ΚΠ $+$ ΠΤ $= \alpha + \chi$· ϗ ἐπείπερ ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα ΚΖΠ, ΚΨΤ, ἔςαι ΚΠ $= \alpha :$ ΠΖ $= \frac{\mu\alpha}{\nu} ::$ ΤΚ $= \alpha + \chi :$ ΤΨ $= \upsilon = \frac{\mu\alpha + \mu\chi}{\nu}$· αὕτη ἄρα ἡ ἐξίσωσις ἔςαι τόπος γεωμετρικὸς τῶν ὑπαρκτικῶν ϗ λειπτικῶν υ· ἐὰν ἂν ἡ $\chi = o$, ἡ ΠΖ συμπεσεῖται τῇ ΤΨ, ϗ ὁ ζητάμενος τόπος ἔσεται

εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν ἀποτετμημένων· ἐὰν δὲ ᾖ $\upsilon = o$, ὁ τόπος τῶν χ ἔϛαι εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν τεταγμένων.

284. Ἐὰν ὦσι δύω γεωμετρικαὶ πρωτοβάθμιοι, δυεῖν ἀγνώϛων περιεκτικαὶ, ἐξισώσεις, δυνατὸν προσδιορίσαι ἐν γραμμαῖς πεπερασμέναις τὴν τῶν ἀγνώϛων, εἰ πεπερασμένη εἴη, δύναμιν· ἔϛωσαν γὰρ δύω ἐξισώσεις $\upsilon = \frac{\alpha\chi - \alpha\beta}{\nu}$, ϗ $\upsilon = \frac{\gamma\chi - \gamma\delta}{\mu}$· ϗ ζητηθήτω πρῶτον ἑκατέρας τῶ ἐξισώσεων ὁ τόπος· ὑποτεθείσθω δὴ τὸ Α ἀρχὴ τῶν χ, ϗ τεθήτω ΑΚ $= \beta$, ϗ ΚΠ $= \nu$, ϗ κατήχθω ΠΖ $= \alpha$ περιέχȣσα μετὰ τῆς ΜΝ γωνίαν ὁποιανȣ̃ν τὴν πρὸς τῷ Π, ϗ ἤχθω ἡ ΔΖΞ, ϗ ἡ ΝΞ παράλληλος τῇ ΠΖ· ἐπεὶ ȣ̃ν ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα ΚΠΖ, ΚΝΞ, ἔϛι ΚΠ : ΠΖ :: ΚΝ $=$ ΑΝ $-$ ΚΑ : ΞΝ $= \upsilon$, εἴτ᾽ ȣ̃ν $\nu : \alpha :: \chi - \beta : \upsilon = \frac{\alpha\chi - \alpha\beta}{\nu}$· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΚΞ ἔϛαι τόπος τῆς πρώτης ἐξισώσεως· ϗ ἀποτετμημέναι μὲν ἔσονται αἱ ΑΝ, τεταγμέναι δὲ αἱ ΝΞ· ὁ δὲ τῆς δευτέρας εὑρεθήσεται ȣ̃τως· ὑποτεθήτω τὸ Α ὡς ἀρχὴ τῶν χ, ϗ ἔϛω ΑΘ $= \delta$, ϗ Θτ $= \mu$, ϗ ἤχθω τῇ ΝΞ παράλληλος ἡ ΤΡ $= \gamma$, ϗ πέρατος ἄνευ ἡ ΘΡ· ȣ̃κȣ̃ν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΘΡΤ, ΘΟΒ ἔϛαι ΘΤ : ΤΡ :: ΘΒ : ΒΟ· ἀλλὰ ΘΤ $= \mu$, ϗ ΤΡ $= \gamma$, ϗ ΘΒ $=$ ΑΒ $-$ ΑΘ $= \chi - \delta$, ϗ ΒΟ ἔϛι τεταγμένη υ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως· ἄρα $\mu : \gamma :: \chi - \delta : \upsilon = \frac{\gamma\chi - \gamma\delta}{\mu}$· τοιγαρȣ̃ν ἡ ΘΡ ἔϛιν ὁ τόπος τῆς δευτέρας ἐξισώσεως· ἐὰν δὲ ἡ ΘΡ τέμνῃ τὴν ΚΞ κατάτι σημεῖον τὸ Ξ, ἡ τεταγμένη ΞΝ κοινὴ ἔϛαι ἑκατέρῳ

τόπῳ τῶν δύω δοθεισῶν ἐξισώσεων· ἡ ΝΞ ἄρα διοριϑήσεται ὑπὸ τῆς συνδρομῆς τῶν δύω εὐθειῶν ΚΞ, ΘΡ. τ' αὐτὸ δὲ γενήσεται ϗ περὶ τῆς χ, ἥτις ἔςαι = ΑΝ· ὥςε διὰ τῶν δύω δοθεισῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων δυνατόν ἐςι προσδιορίσαι τὴν γεωμετρικὴν δύναμιν τῶν ἀγνώςων υ καὶ χ.

285. Εἰς δέ γε πληρεςέραν κατάληψιν ταύτης τῆς κατασκευῆς σημειωτέον τὰ ἐφεξῆς· ἐὰν γὰρ λόγος ὁ ν: α ἴσος ᾖ τῷ μ:γ, ἔςαι ἐν τοῖς τριγώνοις ΚΠΖ, ΘΤΡ, ΚΠ : ΠΖ :: ΘΤ : ΤΡ· ἀλλ' αἱ γωνίαι Π, Τ εἰσὶν ἴσαι διὰ τὰς παραλλήλȣς ΠΖ, ΤΡ· ἄρα τὰ τρίγωνα ἔχȣσι δύω πλευρὰς ἀναλόγȣς δυσὶ πλευραῖς, ϗ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν γωνίας ἴσας· εἰσὶν ἄρα ὅμοια (Γεωμ. 337)· ἄρα ϗ αἱ γωνίαι Κ, Θ εἰσὶν ἴσαι ϗ ἑπομένως παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι ΚΖ, ΘΡ. Τοιγαρȣ̃ν τῶν εὐθειῶν τȣ́των ἀλλήλαις οὐδέποτε συμβαλλουσῶν, ἀδύνατόν ἐςι προσδιορίσαι τὰς χ ϗ υ, αἵτινες, ἐπεὶ τὸ Ξ δύναται θεωρηθῆναι ὡς ἀπείρως ἀφεςηκὼς διὰ τὸ τὰς δύω παραλλήλȣς δύνασθαι θεωρεῖσθαι ὡς συμπιπτȣ́σας ἐν διαςήματι ἀπείρῳ, δυνήσονται ἐκληφθῆναι ὡς ἄπειροι (*).

Ἀνίσων δὲ ὄντων τῶν λόγων υ : α, μ : γ, οἱ τό-

(*) Ἐὰν ἡ ὑπὸ *ΡΘΤ* γωνία ἐπινοηϑῇ κατὰ βραχὺ ἐλαττȣμένη, τὸ Ξ ἀεὶ κατὰ βραχὺ ἀποςήσεται· ἡνίκα δὲ ἡ γωνία ἐγγὺς εἴη τȣ̃ ἰσωϑῆναι τῇ ὑπὸ *ΠΚΖ* γωνίᾳ, αἱ εὐϑεῖαι *ΚΞ*, *ΘΡ*, μικρȣ̃ δεῖν παράλληλοι ȣ̃σαι, συμπεσȣ̃νται ἐν διαςήματι ὑπέρπολυ μεγάλῳ, ὅπερ ἔςαι μεῖζον παντὸς δεδομένȣ διαςήματος, ὅταν αἱ εἰρημέναι γωνίαι διαφέρωσιν ἀλλήλων ποσότητι ἐλάσσονι πάσης δεδομένης· ὅταν ἄρα ἰσάλληλοι ὦσιν αἱ δύω αὗται γωνίαι, τὸ διάςημα ϑεωρηϑήσεται ἄπειρον.

ποι συναντήσονται πάντως κατά τι σημεῖον τὸ Ξ, ἀλλ' ἐξεταςέον, εἴπερ ἡ γωνία ΤΘΡ εἴη ἐλάσσων ἢ μείζων τῆς ὑπὸ ΠΚΖ· ϗ οὕτω μὲν τὸ τῆς συνδρομῆς σημεῖον κείσεται πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ β, καθάπερ τὸ σχῆμα παρίςησιν· ἐκείνως δὲ τὸ Ξ πεσεῖται πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Δ.

Ἐὰν δ' ὑποτεθῇ $\beta = \delta$, εὑρεθήσεται $\chi = \beta$ ϗ $\upsilon = o$· ἐν ταύτῃ γὰρ τῇ περιπτώσει τὰ σημεῖα Ν, Ξ ἐπιπεσοῦνται τῷ Κ· πρὸς δὲ τῷ Κ, $\chi = $ ΑΝ ἐςιν $=$ ΑΚ $= \beta$, ϗ ΝΞ $= \upsilon = o$· ὃ δὴ ϗ ἡ ἀνάλυσις δείκνυσιν· ἐπεὶ γὰρ αἱ δυνάμεις τοῦ υ ἰσοῦσθαι ἀλλήλαις ὀφείλουσι πρὸς τῷ Ξ, ἔςαι πάντως $\frac{\alpha\chi - \alpha\beta}{\nu} = \frac{\gamma\chi - \gamma\beta}{\mu}$, ἢ $\frac{\alpha}{\nu} \times (\chi - \beta) = \frac{\nu}{\nu} \cdot (\chi - \beta)$, ἢ $(\frac{\alpha}{\nu} - \frac{\nu}{\mu}) \cdot (\chi - \beta) = o$· ἄρα ὁ ἕτερος τῶν δύω ποιητῶν τοῦ πρώτου μέλους ἀναγκαίως ἔσεται $= o$· ἀλλαμὴν οὐκ ἔςιν ὁ πρῶτος, ἅτε δὴ τῶν ἐν αὐτῷ ποσοτήτων πρὸς τὸ δοκοῦν λαμβανομένων· ἄρα $\chi - \beta = o$, ὅθεν $\chi = \beta$· ἐὰν οὖν ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν $\upsilon = \frac{\alpha\chi - \alpha\beta}{\nu}$, $\upsilon = \frac{\gamma\chi - \gamma\delta}{\mu}$ ἀντικαταςαθῇ β ἀντὶ χ, ἐπεὶ ϗ $\delta = \beta$, εὑρεθήσεται πανταχοῦ $\upsilon = o$· οὐδυσχερῶς δὲ καταφαίνεται, ὅ,τι ἂν συμβαίνῃ, εἴγ' εἴη $= o$, ἢ ϗ λειπτικὸν o· τελευταῖον δὲ, ἐπεὶ εὐθεῖαι δύω καθ' ἓν μόνον σημεῖον τέμνουσιν ἀλλήλας, κατάδηλον ὡς οἱ τόποι ΔΞ, ΘΡ μίαν μόνην δύναμιν τοῦ χ ϗ τοῦ υ παρέχονται.

Περὶ κατασκευῆς δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, δύω περιεχουσῶν ἄγνωςα.

286. Πᾶσα δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἀναχθῆναι δύ-

ναται εἰς μίαν τῶν τὰς κωνικὰς τομὰς ἐμφαινȣσῶν ἐξισώσεων· εἰσὶ δὲ αἱ γȣ̃ν ἡμῖν ἀποδεδομέναι αἱ ἐφεξῆς.

$\upsilon^2 = \pm \pi\chi$ τῆς παραβολῆς (28)

$\chi^2 = \pm \pi\upsilon$ τῆς παραβολῆς, τῶν χ λαμβανομένων ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἁπτομένης (52)

$\upsilon^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha - \chi^2)$. . τῆς ἐλλείψεως, πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτεμνομένων τῶν χ (91)

$\upsilon^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot (2\alpha\chi - \chi^2)$. τῆς ἐλλείψεως, τῶν χ πρὸς τῇ κορυφῇ ἀποτεμνομένων (92)

$\left.\begin{array}{l} \upsilon^2 = \alpha^2 - \chi^2 \\ \upsilon^2 = 2\alpha\chi - \chi^2 \end{array}\right\}$. . τῶν ἴσων συζυγῶν διαμέτρων τῆς ἐλλείψεως, εἰ ὀξεῖα εἴη ἡ γωνία τῶν συντεταγμένων (123), ἢ τȣ̃ κύκλȣ, εἰ ὀρθὴ

$\chi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot (2\alpha\upsilon - \upsilon\upsilon)$. τῆς ἐλλείψεως, τῶν χ ἐπὶ τῆς κατὰ τὴν κορυφὴν ἁπτομένης λαμβανομένων (115)

$\left.\begin{array}{l} \upsilon^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \times \overline{\chi^2 - \alpha^2} \\ \upsilon^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \times \overline{2\alpha\chi + \chi^2} \end{array}\right\}$ τῆς ὑπερβολῆς ἐπὶ τȣ̃ πρώτȣ ἄξονος (164, 166)

$\chi^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}(\upsilon^2 + \alpha^2)$. τῆς ὑπερβολῆς ἐπὶ τȣ̃ δευτέρȣ ἄξονος (171)

$\upsilon\chi = \kappa^2$ τῆς ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις (187)

ἴδωμεν οὖν ὅπως ἐξισώσεις αἱ δευτεροβάθμιοι εἰς ἕνα τινὰ τῶν ἐκτεθέντων τούτων τύπων ἀναχθῆναι ἔχουσι.

287. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας δοθείσης, κατασκευάσαι τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi + \alpha\beta = \upsilon$.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπειδὴ $\alpha\chi + \alpha\beta = \alpha \cdot \overline{\chi + \beta}$, ἐὰν τεθῇ $\chi + \beta = \psi$, προκύψει $\alpha\psi = \upsilon^2$, ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς· ἐπὶ διαμέτρου οὖν τῆς ΑΜ (σχ. 130), παραμέτρῳ $= \alpha$, γεγράφθω ἡ παραβολὴ ΓΑΝ, ἧς αἱ συντεταγμέναι ΑΠ, ΠΓ περιέχοιεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν· καὶ δὴ ΑΠ ἔσται $= \psi$, καὶ ΓΠ $= \upsilon$· ἀλλὰ $\chi = \psi - \beta$· ἄρα τιθεμένης ΑΔ $= \beta$, αἱ ΔΠ ἔσονται $\chi = \psi - \beta$· τοιγαροῦν τὸ σημεῖον Δ ἔσται ἀρχὴ τῶν χ τῶν, πρὸς μὲν τὸ Μ ὑπαρκτικῶν, πρὸς δὲ τὸ Α λειπτικῶν, ἐσομένων· εἰ δ' ὑπάρχοι ἐξίσωσις $\alpha\chi - \alpha\beta = \upsilon^2$, ποριςθείη ἂν $\chi - \beta = \psi$, καὶ δὴ $\chi = \psi + \beta$· ἐὰν οὖν γένηται ΑΘ $= \beta$, αἱ χ ἄρξονται ἀπὸ τοῦ Θ.

288. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Κατασκευάσαι τὴν ἐξίσωσιν $\chi\upsilon + \alpha\chi = \alpha^2 - \alpha\upsilon$.

ΛΥΣΙΣ. Γενέσθω πρῶτον $\upsilon + \alpha = \psi$, εἶτ' οὖν $\upsilon = \psi - \alpha$ εἰς εὕρεσιν $\psi\chi = 2\alpha^2 - \alpha\psi$, καὶ μεταθέσει, $2\alpha^2 = \psi\chi + \alpha\psi$· γενέσθω εἶτα $\chi + \alpha = \pi$· καὶ δὴ ἔσται $\psi\pi = 2\alpha^2 = \kappa^2$· γενομένου δὲ $2\alpha : \kappa :: \kappa : \alpha$ πρόεισιν ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ἡ $\psi\pi = \kappa^2$· τοιγαροῦν ἤχθωσαν ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν, ἢ τὴν τυχοῦσαν, εἰμὴ δέδοτο, γωνίαν, αἱ εὐθεῖαι Μμ, Νν (σχ. 131), καὶ γενέσθω Κα $= \alpha$, καὶ αβ $= 2\alpha$, καὶ ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις Μμ, Νν γεγράφθω ὑπερβολὴ διήκουσα διὰ τοῦ σημείου β (192)· αἱ τοίνυν ΚΖ ἔσονται $= \pi$, αἱ δὲ ΖΘ $= \psi$· ἀλλὰ $\chi = \pi - \alpha =$ ΚΖ $-$ αΚ· ἄρα αἱ χ ἄρξονται ἀπὸ τοῦ Α· ἐπεὶ δὲ $\upsilon = \psi - \alpha$, διηρή-

ϑω $\alpha B = 2\alpha$ δίχα κατὰ τὸ Δ, ϗ διήχθω δἰ αὐτȣ̃ παράλληλος τῇ Νν ἡ ΔΗ· ϗ δὴ πορισθήσεται $H\Theta = \psi - \alpha = \upsilon$· ϗ ἐπεὶ $\Delta H = \alpha Z$, πορισθήσονται αἱ μὲν $\chi = \Delta H$, αἱ δὲ $\upsilon = \Theta H$· ἐὰν δ' ὑπάρχῃ $\chi = o$, ἔςαι $\upsilon = \Delta B = \alpha$· ἐὰν δ' ᾖ χ ὑπαρκτικὸν ϗ $< \alpha$, αἱ τεταγμέναι ἔσονται ὑπαρκτικαί· εἰ δὲ $\chi = \alpha$, ἔςαι $\upsilon = o$· τηνικαῦτα γὰρ $\pi = \chi + \alpha = 2\alpha$· ἄρα $\psi = \frac{2\alpha^2}{\pi} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha} = \alpha$, ϗ $\upsilon = \psi - \alpha = \alpha - \alpha = o$· εἰ δὲ $\chi > \alpha$, αἱ τεταγμέναι ἔσονται λειπτικαί· ὑποτιθεμένȣ δὲ $\chi = \infty$, ἔςαι $\upsilon = -\alpha$· τȣ̃ δὲ χ λειπτικȣ̃ τε ὄντος ϗ $< \alpha$, αἱ τεταγμέναι ἔσονται ὑπαρκτικαί· τȣ̃ δὲ χ ὄντος $= -\alpha$, ἡ τεταγμένη υ ἔςαι ἄπειρος.

Εἰ δ' εἴη ἐξίσωσις $\chi\upsilon + \alpha\chi = \alpha\upsilon - \alpha^2$, ποιȣ̃ντες $\upsilon + \alpha = \psi$, καὶ $\chi - \alpha = \pi$, ἕξομεν $\pi\psi = -2\alpha^2$· διὸ δὴ τεθέντος $K\alpha = \alpha$, γενήσεται $\alpha\Pi = 2\alpha$, ἔνθα λειπτικαί εἰσιν αἱ τεταγμέναι· αἱ δὲ συντεταγμέναι ἔσονται ΔΗ, ϗ ΗΙ.

Ὑπετέθησαν μέχρι τȣ̃δε αἱ ἀμετάβλητοι ποσότητες ὡς ὑφιςάμεναι συναδȣ̃σας ἀντικαταςάσεις· εἰ δ' εἶεν μᾶλλον σύνθετοι, δεήσει ἀναγαγεῖν αὐτὰς ἐφ' ἁπλȣςέρȣς τύπȣς· ἔςω γὰρ ἐξίσωσις $\alpha^2 - \beta\chi = \upsilon^2$· γενέσθω ȣ̃ν πρῶτον $\alpha^2 = \beta\gamma$· ϗ δὴ ἔςαι $\beta\cdot(\gamma - \chi) = \upsilon^2$· γενέσθω εἶτα $\gamma - \chi = \psi$· ἐκȣ̃ν γενήσεται $\beta\psi = \upsilon^2$, ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς· ὡσαύτως ἐν τῇ ἐξισώσει $\alpha\frac{\delta\delta}{\mu} + \beta\chi = \upsilon^2$, ὑποτεθείσθω $\delta\delta = \beta\zeta$, ἵνα γένοιτο $\frac{\beta.(\alpha\zeta)}{\mu}$

$+ \beta\chi = \upsilon^2$· γεγονότος δὲ $\frac{\alpha\zeta}{\mu} + \chi = \psi$, ἡ ἐξίσωσις τρέψεται εἰς τὴν προτέραν· ἐν δὲ τῇ ἐξισώσει $\frac{\alpha^2\chi - \beta^2\chi + \nu^3}{\alpha + \beta} = \upsilon^2$, ὑποτεθείσθω πρῶτον $\nu^3 = (\alpha\alpha - \beta\beta) . \gamma$, ἵνα γένοιτο $(\alpha - \beta) \cdot \chi + (\alpha - \beta) \cdot \gamma = \upsilon^2$, ἑξῆς δὲ ὑποτεθείσθω $\chi + \gamma = \psi$ καὶ $\alpha - \beta = \delta$, ἵνα πορισθῇ $\delta\psi = \upsilon^2$, ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς.

289. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἔστω ἐξίσωσις $\chi^2 + 2\alpha\chi = \upsilon \cdot (\alpha + \beta)$, ἥτις ἀναπληρωθεῖσα τὸ ἐλλειπὲς τετράγωνον γενήσεται $\chi^2 + 2\alpha\chi + \alpha^2 = \upsilon \cdot (\alpha + \beta) + \alpha^2$· ὑποτεθέντος δὲ $\chi + \alpha = \pi$, ἀποβήσεται $\pi^2 = (\alpha + \beta) \times (\frac{\alpha^2}{\alpha + \beta} + \upsilon)$· γενομένου δὲ καὶ $\frac{\alpha^2}{\alpha + \beta} + \upsilon = \psi$, προκύψει ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς $\pi^2 = \psi \cdot (\alpha + \beta)$. (σχ. 132) παραμέτρῳ οὖν τῇ $\alpha + \beta$ γραφείσης τῆς παραβολῆς ΑΘ, ἧς ἁπτομένη κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἄξονος Α εἴη ΑΖ, ἔσονται αἱ μὲν ΑΖ $= \pi$, αἱ δὲ ΘΖ $= \psi$· ἀλλὰ $\pi - \alpha = \chi$· ἄρα λαμβανομένης τῆς ΑΚ $= \alpha$, αἱ ΚΖ ἔσονται χ· ὡσαύτως ἐπεὶ $\upsilon = \psi - \frac{\alpha^2}{\alpha + \beta}$, καὶ, διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς παραβολῆς, ΔΓ $= \frac{\alpha^2}{\alpha + \beta}$, ἀχθείσης διὰ τοῦ Δ τῆς ΗΔ παραλλήλως τῇ ΖΑ, εὑρεθήσεται ΔΗ $=$ ΚΖ $= \chi$, καὶ ΘΗ $= \upsilon$.

290. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ΄. Ὑποτεθείσθω ἡ ἐξίσωσις περιέχειν τὰ ἀπὸ δύω ἀγνώστων τετράγωνα· ὥσπερ ἡ $\chi^2 + \alpha\chi = 2\upsilon^2 - 2\beta\upsilon$· ἀναπληρωθέντος οὖν τοῦ πρώτου μέλους, καὶ γενομένου $\chi + \frac{\alpha}{2} = \pi$, πορισθήσεται π^2

$= 2\upsilon^2 - 2\beta\upsilon + \frac{\alpha^2}{4}$, εἴτ' οὖν $\pi^2 - \frac{\alpha^2}{4} = 2\upsilon^2 - 2\beta\upsilon$, ἥτις διαιρεθεῖσα διὰ 2, καὶ τὸ δεύτερον ἀναπληρωθεῖσα μέλος, ὑποτεθέντος $\upsilon - \frac{\beta}{2} = \psi$, γενήσεται $\psi^2 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\beta^2}{4}$· τρεῖς δὲ δυνατὸν ἐνταῦθα συμβῆναι περιπτώσεις.

Α΄. Ὑποτεθέντος γὰρ $\alpha^2 = 2\beta^2$, ἡ ἐξίσωσις γενήσεται $\frac{\pi^2}{2} = \psi^2$, καὶ $\pi^2 = 2\psi^2$, εἴτ' οὖν $\pi = \pm\psi\sqrt{2}$, ὅθεν $\pi : \psi :: \sqrt{2} : 1 :: \sqrt{2\beta^2} : \beta :: \alpha : \beta$ (καὶ γὰρ $2\beta^2 = \alpha^2$) $:: \frac{\alpha}{2} : \frac{\beta}{2}$· ἔσω τοίνυν (χ. 133) $\Gamma A = \frac{\alpha}{2}$, καὶ ἤχθω $BA = \frac{\beta}{2} = A\Delta$, καὶ ἀπέραντοι ἤχθωσαν αἱ ΓΒ, ΓΔ· οὖν ἔσονται, αἱ μὲν $\Gamma Z = \pi$, αἱ δὲ $Z\Theta = \psi$· ἀλλὰ $\upsilon = \psi + \frac{\beta}{2}$· ἄρα ἀχθείσης διὰ τοῦ Δ τῆς ΗΔ παραλλήλως τῇ ΖΑ, αἱ ΗΘ ἔσονται υ· ὡσαύτως $\chi = \pi - \frac{\alpha}{2}$· ἄρα αἱ $\Delta H = AZ$ ἔσονται χ· καὶ ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἡ ἐξίσωσις ἔςαι τῶν εὐθειῶν ΓΘ, ΓΔ.

Β΄. Ἐὰν ᾖ $\alpha^2 > 2\beta^2$, ὑποτεθείσθω $\alpha^2 - 2\beta^2 = \mu^2$, ἵνα γένοιτο $\frac{\pi^2}{2} - \frac{\mu^2}{8} = \psi^2$, εἴτ' οὖν $\pi^2 - \frac{\mu^2}{4} = 2\psi^2$· ἄρα $\pi^2 - \frac{\mu^2}{4} : \psi^2 :: 2 : 1 :: \frac{\mu^2}{4} : \frac{\mu^2}{8}$, ἀναλογία προσφυῶς ἔχουσα ὑπερβολῇ ὡς πρὸς τὰς δύω αὐ-

τῆς διαμέτρȣς μ, $\frac{\mu}{\sqrt{2}}$· εἰλήφθωσαν ȣ̃ν δύω ἡμιδιάμετροι (σχ. 134) $KN = \frac{\mu}{2}$, ϗ $KM = \frac{\mu}{2\sqrt{2}}$, ϗ ἐπὶ τῆς ΚΝΖ γραφεῖσα ὑπερβολὴ ἡ ΝΘ ἕξει, τὰς μὲν $KZ = \pi$, τὰς δὲ $Z\Theta = \psi$· ἀποτμηθείσης δὲ $KA = \frac{\alpha}{2}$, εὑρεθήσεται $AZ = \pi - \frac{\alpha}{2} = \chi$· ἀχθεισῶν δὲ, τῆς μὲν ΑΔ παραλλήλως τῇ ΚΜ, τῆς δὲ ΔΗ τῇ ΚΖ, ϗ ληφθείσης $A\Delta = \frac{\beta}{2}$, πορισθήσεται $H\Theta = \psi + \frac{\beta}{2} = \upsilon$· αἱ ἄρα συντεταγμέναι τῆς προκειμένης ἐξισώσεως ἔσονται $\Delta H = AZ = \chi$, ϗ $\Theta H = \upsilon$.

Γ΄. Ἐὰν ᾖ $\alpha^2 < 2\beta^2$, γενέσθω $2\beta^2 - \alpha^2 = \mu^2$ ἵνα προέλθοι $\frac{\pi^2}{2} + \frac{\mu^2}{8} = \psi^2$, εἴτ' ȣ̃ν $\pi^2 + \frac{\mu^2}{4} = 2\psi^2$· ἄρα $\pi^2 + \frac{\mu^2}{4} : \psi^2 :: 2 : 1 :: \frac{\mu^2}{4} : \frac{\mu^2}{8}$. λαμβανομένης τοίνυν δευτέρας ἡμιδιαμέτρȣ ΚΜ (ἢ δευτέρȣ ἡμιάξονος, εἰ τῶν συντεταγμένων ἡ γωνία εἴη ὀρθή) $= \frac{\mu}{2}$, ϗ πρώτης ἡμιδιαμέτρȣ $KN = \frac{\mu}{2\sqrt{2}}$, ὑπερβολὴ γραφεῖσα (σχ. 135) ἡ ΝΘ ἕξει, τὰς μὲν $KZ = \pi$, τὰς δὲ $Z\Theta = \psi$· ληφθεισῶν ἄρα $KA = \frac{\alpha}{2}$, ϗ $A\Delta = \frac{\beta}{2}$ ϗ παραλλήλȣ τῇ ΚΝ, ϗ τῆς ΔΗ παραλλήλȣ γενο-

μένης τῇ ΚΖ, ἔσονται αἱ μὲν ΑΖ $= \chi$, αἱ δὲ ΗΘ $= \upsilon$· ἐν ταύτῃ ἄρα τῇ περιπτώσει ἡ ἐξίσωσις ἐςὶν ὑπερβολῆς, ἀναφερομένης ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον.

291. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐκ τῶν ἤδη ἐκτεθέντων ὑποδειγμάτων κατάδηλον τὸ πᾶν κεῖσθαι ἐν τῷ ἀντικαθιςᾷν ἄγνωσον ἀνθ' ἑτέρας ἀγνώςε, συνημμένης ἀμεταβλήτῳ ποσότητι, ἤτοι ὑπαρκτικῇ, ἢ λειπτικῇ, καὶ ἐν τῷ ἀναπληρῦν δὲ πολλάκις θάτερον τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν· τῆς δὲ καμπύλης ἀναγραφείσης τῆς τὰς ἀντικαταςάσεις παρεχομένης, ἐπαναςρέφειν δεῖ πρὸς διορισμὸν τῶν χ καὶ υ, εἴτ' ἒν τῶν συντεταγμένων τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· ἐπεὶ δὲ ἡ μέθοδος αὕτη ἔσθ' ὅτε πολύπλοκός τις καὶ δυσχερὴς καθίςαται ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων, αἷς ἔντι τῶν τετραγώνων χ^2, ἢ υ^2, ἢ καὶ ἀμφότερα ἐμπεριέχονται, ὀ μὴν ἀλλὰ καὶ τὸ ὀρθογώνιον $\chi\upsilon$· τέτε χάριν ἐν ταῖς τοιαῖσδε ἐξισώσεσι χρησόμεθα τῇ τῶν ἀορίςων μεθόδῳ, τηρῦντες ἀεὶ τρόπον, καθ' ὃν τὰ τῆς κατασκευῆς ὡς λίαν ἐξευμαρίζεται· πρὸς δὲ τῦτο τὴν ἐξίσωσιν ὅτω διαθησόμεθα, ὡς πάντα τὰ υ κεῖσθαι ἑτέρωθι, τῦ τὸ υ^2 περιέχοντος ὅρυ ὑπαρκτικῦτε ὄντος καὶ συνεργῦ δίχα· προςιθέντες δ' ἐφεξῆς ἑκατέρωσε τῆς ἐξισώσεως τὸ ἀπὸ τῦ ἡμισυνεργῦ τῦ υ τετράγωνον, ἕξομεν τὸ πρῶτον μέλος τετράγωνον ἐντελὲς, ὗ τὴν ῥίζαν τιθέμεθα $= \psi$· τὰ δὲ τῆς κατασκευῆς ἐπιτηδεύοντες εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν μὴ περιέχυσαν τὸ ὀρθογώνιον $\psi\chi$· ἐὰν δὲ κατασκευασθῇ ἡ καμπύλη τῶν ἀορίςων ψ καὶ χ, τῶν ἀντικαταςάσεων ἀνακαλυμένων, αἱ υ πρὸς τῇ γραμμῇ τῶν χ ὐ προσδιορισθήσονται, ἀλλὰ πρὸς ἄλλῃ, ἧς αἱ ἀποτετμημέναι ἔσονται πρὸς τὰς ἀποτετμημένας χ ἐν λόγῳ δεδομένῳ· ἀνθ' ὅτυ δὴ τὴν ἐξίσωσιν κατασκευάζοντες ληψόμεθα $\mu\chi$, ἀλλ'

οὐ χ ἀποτετμημένας (μ δὲ ποσότης ἐστὶν, ἥτις ἐφεξῆς διορισθήσεται)· τούτου τεθέντος, ἄγομεν διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν μχ γραμμὴν εὐθεῖαν, ποιοῦσαν μετὰ τῶν μχ γωνίαν τοιαύτην, ὥστε προστιθεμένης τῇ ψ, ἢ ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρουμένης ποσότητος, ἣν ἐμφαίνει ὁ λογισμὸς, δύνασθαι τὴν υ προσδιορίζεσθαι, προστιθεμένης, ἢ ἀφαιρουμένης, εἰ δέοι, ποσότητος ἀμεταβλήτου. Τελευταῖον δὲ προσδιορισθήσεται ἡ δύναμις τοῦ υ, οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ τὸ μέγεθος τῶν γωνιῶν, ἃς ἐμφιλοχωρεῖν δέοι, ὡς ἂν αἱ εὐθεῖαι χ, υ περιέχοιεν τὴν δεδομένην γωνίαν.

292. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Ε'. Ἔστω ἐξίσωσις $υ^2 - 2αυ + χυ = α^2 + 4αχ - χ^2$· προστεθέντος οὖν ἑκατέρῳ μέλει τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ χ — α ἡμισυνεργοῦ τῆς υ, ἵνα γένοιτο $(υ - αχχ)^2 = 2α^2 + 2αχ$, καὶ ὑποτεθέντος $υ - α + χ = ψ$, προελεύσεται ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς $ψ^2 = (χ + α) \cdot 2α$· ἀλλὰ γὰρ τὴν καμπύλην κατασκευαστέον, ὡς εἶναι τὰς ἀποτετμημένας μχ, ἀλλ' οὐ χ· διὰ ταῦτ' ἄρα, τῆς ἰσότητος διατηρουμένης, διατεθείσθω ἡ ἐξίσωσις οὕτω· $ψ^2 = \frac{2α}{μ} \cdot (μα + μχ)$· ὑποτεθείσθω οὖν ἡ παραβολὴ ΑΙ (σχ. 136) γεγραμμένη ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΖ παραμέτρῳ $= \frac{2α}{μ}$· ἐν ταύτῃ δὲ ἔστωσαν αἱ ἀποτετμημέναι $ΑΖ = μα + μχ$, καὶ αἱ τεταγμέναι ΖΗΙ (παράλληλοι τῇ ἁπτομένῃ ΑΒ) $= ψ$· εἰλήφθω δὲ $ΑΚ = μα$· καὶ δὴ ἔσται $ΚΖ = μχ$· ἵνα δὲ πορισθείη $υ = ψ + α - χ$, προήχθω ἡ ΒΑ ἐς τὸ Δ, ὡς εἶναι $ΑΔ = α$, καὶ παράλληλος τῇ ΖΑ ἤχθω ἡ ΔΘ, καὶ προεκβεβλήσθω ἡ ΙΖ ἐς τ' ἂν ἀπαντήσεται τῇ ΘΔ· ἐκεῖθεν πορισθήσεται $ΜΘ = ΚΖ = μχ$, καὶ $ΘΙ = ψ + α$·

ἀφοριϑείσης δὲ τῆς χ ἀπὸ $\psi + \alpha$, καταλειφθήσεται ἡ τȣ͂ υ δύναμις· ὑποτεθείσθω δὲ ἡ εὐθεῖα ΜΗ ȣ̔́τως ἠγμένη, ὥςτε τὴν ἀπολαμβανομένην ΘΗ εἶναι $= \chi$· ποριϑήσεται τοίνυν $ΗΙ = ΘΙ - ΘΗ = \psi + \alpha - \chi = \upsilon$· ἵνα δὲ αἱ υ προσδιοριϑῶσι πρὸς τῇ γραμμῇ τῶν χ, ἐπάναγκες εἶναι $ΜΗ = \chi$· δεῖ ȣ͂ν εὑρεῖν δύναμιν τῆς μ τοιάνδε, ὡς εἶναι $ΘΗ = ΜΗ = \chi$, δεδομένης τῆς ὑπὸ ΜΗΘ γωνίας. Συνεςάσϑω τρίγωνον τὸ ΡΤΣ, ȣ̔͂ ἡ μὲν γωνία Σ ἴση εἴη τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῶν χ ϗ υ, εἴτ' ȣ͂ν τῇ ὑπὸ ΜΗΘ, αἱ δὲ πλευραὶ ΣΡ, ΣΤ ἰσάλληλοι· ὑποτεθείσϑω ἓν, ἑκατέρα μὲν τȣ́των $= \alpha$, ἡ δὲ $ΡΤ = \gamma$· τȣ́τȣ τεθέντος ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΡΤ, ΗΜΘ πρόεισιν $\alpha : \gamma :: \chi : \mu\chi :: 1 : \mu$· ἄρα $\mu = \frac{\gamma}{\alpha}$· ἡ ἄρα παράμετρος $ΑΒ = \frac{2\alpha}{\mu} = \frac{2\alpha^2}{\gamma}$, ἡ δὲ εὐθεῖα $ΚΑ = ΔΜ = \mu\alpha = \gamma$· ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ $ΜΘΗ = Τ$, ἡ ὑπὸ ΒΑΖ παραπλήρωμα ἔςαι τῆς γωνίας Τ, εἴγε εἰσὶν ἴσαι αἱ γωνίαι Θ, ΑΖΙ· ἔςι δὲ ἡ ΒΑΖ παραπλήρωμα τῆς ὑπὸ $ΖΑΔ = ΑΖΙ$· διὸ δὴ ἐπὶ διαμέτρȣ τῆς ΑΖ διὰ παραμέτρȣ $ΑΒ = \frac{2\alpha^2}{\gamma}$, ὑπὸ γωνίαν τὴν ΒΑΖ παραπλήρωμα τῆς γωνίας Τ, γραφήσεται ἡ παραβολὴ ΑΙ, ϗ λειφθήσεται $ΔΑ = \alpha$, ἀγομένης παραλλήλȣ τῆς ΔΘ τῇ ΖΑ, ϗ ἐπὶ τῆς ΔΘ ἀποτμηθήσεται $ΔΜ = \gamma$, ϗ ἐπιζευχθήσεται ἡ ΜΗ ȣ̔́τως, ὡς τὴν ὑπὸ ΘΜΗ γωνίαν εἶναι $= Τ = Ρ$, ϗ ποριϑήσεται $ΜΗ = \chi$, ϗ $ΗΙ = \upsilon$· εἰ δὲ τὰς χ ϗ υ περιέχειν δέοι γωνίαν ὀρθὴν, εὑρεθήσεται $\mu = \sqrt{2}$.

293. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ϛ́. Ἔςω ἐξίσωσις εὐτάκτως

διατεθειμένη ἡ $\upsilon^2 - \chi\upsilon = \alpha^2 - \chi^2$· πρῶτον ἦν ἀναπληρωθέντος τῦ πρώτυ μέλυς, εἶτα ὑποτεθέντος $\upsilon - \frac{\chi}{2} = \psi$, ἀποβήσεται $\psi^2 = \alpha^2 - \chi^2 + \frac{1}{4}\chi^2$, εἴτ' ἦν $\psi^2 = \alpha^2 - \frac{3}{4}\chi^2$, ἐξίσωσις ἐλλείψεως· ἵνα δ' αἱ ἐν αὐτῇ συντεταγμέναι εἶεν $\mu\chi$ ϗ ψ, πολλαπλασιασθήτω μὲν ἡ ἐξίσωσις διὰ μ^2, διαιρεθήτω δὲ διὰ $\frac{3}{4}$· ϗ δὴ τρέψεται εἰς τόνδε τὸν τύπον $\frac{4\mu^2\psi^2}{3} = \frac{4\mu^2\alpha^2}{3} - \mu^2\chi^2$, ὅθεν πρόεισι $\frac{4\mu^2\alpha^2}{3} - (\mu\chi)^2 : \psi^2 :: \frac{4\mu^2\alpha^2}{3} : \alpha^2$· ἐπὶ ἦν ἡμιδιαμέτρων τῶν $\text{KA} = \frac{2\mu\alpha}{\sqrt{3}}$ ϗ $\text{KB} = \alpha$ ὑποτεθείσθω γεγραμμένη ἡ ἔλλειψις AIB (§. 137)· ϗ δὴ ποριςθήσονται, αἱ μὲν $\text{KE} = \mu\chi$, αἱ δὲ $\text{EI} = \psi$, ὑποτιθεμένης τῆς EI παραλλήλυ τῇ KB· ἐπεὶ μέντοι $\upsilon = \psi + \frac{\chi}{2}$, ἀχθείσης τῆς KH ὡς εἶναι $\text{HE} = \frac{\chi}{2}$, ποριςθήσεται $\text{HI} = \upsilon$· ἀλλ' ἵνα αἱ υ ὁριςθῶσι πρὸς τῇ τῶν χ γραμμῇ, ἐπάναγκες εἶναι $\text{KH} = \chi$· ἐπεὶ δὲ KH διπλῆν εἶναι δεῖ τῆς EH, δέδοται δὲ ἡ τῶν συντεταγμένων γωνία KHI, κατεσκευάσθω τρίγωνον τὸ ΡΣΤ, ὗ ἡ μὲν Σ γωνία ἴση εἴη τῇ δεδομένῃ, ἡ δὲ πλευρὰ ΣΡ διπλασία τῆς ΣΤ· ἔςω δὴ $\text{Ρ}\Sigma = \alpha$, ϗ $\Sigma\text{Τ} = \frac{\alpha}{2}$, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ $\text{ΡΤ} = \gamma$· τοιγαρῦν ἔςαι $\alpha : \gamma :: 1 : \mu = \frac{\gamma}{\alpha}$ ὐκῦν ἡ μὲν ἡμιδιάμετρος $\text{KA} = \frac{2\gamma}{\sqrt{3}}$· ἡ δ' ὑπὸ KPH γωνία $=$ BKA (διὰ τὰς παραλλήλυς BK, IH) $=$ T·

διὸ δὴ τῶν ἡμιδιαμέτρων ΚΒ, ΑΚ τὴν ὑπὸ ΒΚΑ $=$ Τ γωνίαν ποιησαμένων, γραφήσεται ἡ ἔλλειψις ΒΑ· τελευταῖον δὲ τῆς ΚΗ ἀχθείσης ὅτως, ὡς τὴν ὑπὸ ΗΚΕ γωνίαν εἶναι $=$ Ρ, αἱ μὲν ΚΗ ἔσονται $= \chi$, αἱ δὲ ΗΙ $= \upsilon$· ἐὰν δὲ ἦ Σ $=$ ΙΗΚ $= 90°$, τορισθήσεται $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

294. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Ζ΄. Ἔςω ἐξίσωσις $2\alpha\upsilon - 3\alpha\chi + 4\chi^2 = -2\upsilon^2 + 6\chi\upsilon$· μετατεθέντων ἐν πάντων τῶν τὲ υ περιεκτικῶν ὅρων ἐν τῷ πρώτῳ μέλει, τῶν δὲ λοιπῶν ἐν τῷ δευτέρῳ, καὶ διαιρεθέντων ἁπάντων διὰ 2, πρόεισιν ἐξίσωσις εὐτάκτως διατεθειμένη ἡ $\upsilon^2 - 3\chi\upsilon + \alpha\upsilon = \frac{3\alpha\chi}{2} - 2\chi^2$· τὲ τοίνυν πρώτε μέλες ἀναπληρωθέντος, καὶ ὑποτεθείσης τῆς ῥίζης $\upsilon - \frac{3\chi}{2} + \frac{\alpha}{2} = \psi$, πρόεισι $\psi^2 = \frac{\chi^2 + \alpha^2}{4}$, εἴτ' ἐν $4\psi^2 = \chi^2 + \alpha^2$. Ζητεῖται ἐν ἤδη ὁ τόπος τῶν συντεταγμένων ψ καὶ μχ· πολλαπλασιασθήτω δὴ ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ μ^2· ὅθεν ἔςαι $4\mu^2\psi^2 = \mu^2\chi^2 + \mu^2\alpha^2$, ἐντεῦθεν δ' ἀποφέρεται $(\mu\chi)^2 + (\mu\alpha)^2 : \psi^2 :: (\mu\alpha)^2 : \frac{\alpha^2}{4}$· γεγράφθω τοίνυν ἡ ὑπερβολὴ ΒΙ (σχ. 138), ἧς δευτέρα μὲν ἡμιδιάμετρος εἴη ΚΑ $= \mu\alpha$, πρώτη δὲ ΚΒ $= \frac{\alpha}{2}$· καὶ δὴ αἱ μὲν ΚΖ ἔσονται $= \mu\chi$, αἱ δὲ ΖΙ $= \psi$· ἤχθω δὲ ἡ ΒΓ παράλληλος τῇ ΚΖ, ἵνα γένοιτο ΙΓ $= \psi - \frac{\alpha}{2}$· ταύτῃ δὲ τῇ ποσότητι προσετεθείσθω $\frac{3}{2}\chi$ ἵνα γένοιτο υ· διὸ δὴ ἤχθω ἡ ΒΗ ἔτως, ὡς εἶναι Ηκ $= \frac{3}{2}\chi$, ἵνα γένοιτο ΗΙ $= \psi - \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}\chi$

$= \upsilon$: ἵνα δὲ ὑπὸ γωνίαν τὴν δοθεῖσαν ΒΗΙ πορισθείη ΒΗ $= \chi$, ϗ ΓΗ $= \frac{3}{2}\chi$, ὑποτεθείσθω ἡ γωνία Σ $=$ ΒΗΙ, ϗ γενέσθω ΡΣ $= \alpha$, ϗ ΣΤ $= \frac{3\alpha}{2}$, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΡΤ $= \gamma$· ὑποτεθείσθω δὲ ϗ $\mu . \alpha = \gamma$· ἐκῦν ἔςαι $\alpha : \gamma :: 1 : \mu = \frac{\gamma}{\alpha}$· ἡ ἄρα ἡμιδιάμετρος ΚΑ $= \mu\alpha = \gamma$, τῆς ΚΒ ἀεὶ ἴσης $= \frac{\alpha}{2}$· συνεςάτωσαν ἦν αἱ ἡμιδιάμετροι αὗται γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΚΑ $=$ Τ, ϗ γεγράφθω ἡ ὑπερβολὴ ΒΙ, ϗ ἤχθω ἡ ἁπτομένη ΒΓ ἐξ ἀνάγκης παράλληλος τῇ ΚΖ, ϗ ΒΗ ἀχθεῖσα ποιείτω μετὰ τῆς ΒΚ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΗΒΚ $=$ Ρ· πορισθήσονται ἦν, αἱ μὲν ΒΗ $= \chi$, αἱ δὲ ΗΙ $= \upsilon$· τῆς δὲ γωνίας Σ ὀρθῆς ἴσης, πορισθήσεται $\gamma^2 = \alpha^2 + \frac{9\alpha^2}{4} = \frac{13\alpha^2}{4}$, ϗ $\gamma = \frac{\alpha}{2}\sqrt{13}$, ϗ $\mu = \frac{\sqrt{(13)}}{2}$.

295. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐφαρμοςέον δ' ἂν εἴη τὴν μέθοδον ϗ ταῖς τῦ υ^2 μὴ περιεκτικαῖς ἐξισώσεσιν· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ περιπτώσει διαθετέον τὸ ἐπίπεδον $\chi\upsilon$, ὡς εἶναι ὑπαρκτικὸν, συνεργῦ δίχα, ϗ κείμενον πρὸς ἃ μέρη ϗ χ^2.

296. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Η΄. Ἔςω ἐξίσωσις $\chi\upsilon - \frac{\chi^2}{2} = \alpha\chi - \alpha\upsilon + \alpha^2$· ὑποτεθείσθω ἦν ὁ τῦ χ πολλαπλασιαςὴς $\upsilon - \frac{\alpha}{2} = \psi$, εἴτ' ἦν $\upsilon = \psi + \frac{\alpha}{2}$, ϗ ἀντικαταςαθήτω ἡ δύναμις τῦ υ ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, ἵνα γένηται

$\chi\psi = \frac{\alpha\chi}{2} - \alpha\psi + \alpha^2$, εἶτ' οὖν $\psi\chi - \frac{\alpha\chi}{2} = \alpha^2 - \alpha\psi$· γενέσθω δὲ $\psi - \frac{\alpha}{2} = \kappa$· ϗ δὴ ἔσται $\chi\kappa = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\kappa$, εἶτ' οὖν $\chi\kappa + \alpha\kappa = \frac{\alpha^2}{2}$· ἐὰν οὖν ἐν τῇ καμπύλῃ ἀποτετμημέναι ὦσιν αἱ χ, εὑρεθήσονται αἱ κ προσοριζόμεναι τῇ γραμμῇ τῶν χ· διὸ δὴ πολλαπλασιασθείσης τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ μ, ἵνα γένοιτο $\kappa\,(\mu\chi + \mu\alpha) = \frac{\mu\alpha^2}{2}$, ϗ ὑποτεθέντος $\mu\chi + \mu\alpha = \pi$, προκύψει $\pi\kappa = \frac{\mu\alpha^2}{2}$ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις· ἐπὶ μιᾶς οὖν τῶν ἀσυμπτώτων (σχ. 139) εἰλήφθω ΚΑ $= \mu\alpha$, ϗ ἤχθω ΒΑ $= \frac{\alpha}{2}$ καὶ παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ ΚΜ· ὑπερβολῆς δὲ, διὰ τοῦ Β διηκούσης, γραφείσης, ἔσονται αἱ μὲν ΚΖ $= \pi$, αἱ δὲ ΖΙ $= \kappa$· ἀλλὰ $\mu\chi = \pi - \mu\alpha$· ἄρα ΑΖ $= \mu\chi$· παρὰ ταῦτα δὲ, ἐπεὶ $\psi = \kappa + \frac{\alpha}{2}$, γενομένης ΑΔ $= \frac{\alpha}{2}$, ϗ διὰ τοῦ σημείου Δ ἀγομένης τῆς ΔΝ παραλλήλου τῇ ΚΖ, ἔσονται, αἱ μὲν ΔΘ = ΑΖ $= \mu\chi$, αἱ δὲ ΘΙ $= \psi$· ἀλλ' $\upsilon = \psi + \frac{\chi}{2}$· ἀχθείσης ἄρα τῆς ΔΗ οὕτως, ὡς εἶναι ΗΘ $= \frac{1}{2}\chi$, ἔσται τηνικαῦτα ΗΙ $= \upsilon$· ἵνα δὲ ἡ υ προσδιορισθῇ τῇ γραμμῇ τῶν χ, δεῖ εἶναι ΔΗ $= \chi$· διοριστέον οὖν ἐνταῦθα τὴν τοῦ μ δύναμιν· ἐπείπερ ἡ

ὑπὸ ΔΗΙ γωνία τῶν συντεταγμένων γνωςὴ ὑποτίθεται, ϗ ἔτι ΔΗ : ΘΗ :: $\chi : \frac{\chi}{2}$:: 2 : 1, συνεςάσθω τρίγωνον τὸ ΡΣΤ, ϐ ἡ γωνία Σ ἴση εἴη τῇ δεδομένῃ γωνίᾳ· ϗ τεθήτω ΡΣ = α, ϗ ΣΤ = $\frac{\alpha}{2}$, ϗ ΡΤ ὑποτεθείσθω = $\gamma = \mu\alpha$· ἄρα $\mu = \frac{\gamma}{\alpha}$· διὰ ταῦτ' ἄρα μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ΚΜ, ΚΑ περιεχϐσῶν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΜΚΑ = Τ, ληφθείσης τῆς ΚΑ = μα = γ, ϗ ΒΑ = $\frac{\alpha}{2}$ γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ ΒΙ διὰ τϐ Β διερχομένη· γενομένης δὲ ΑΔ = ΑΒ, ἤχθω τῇ ΚΑ παράλληλος ἡ ΔΝ, ϗ ἤχθω ἡ ΔΗ ὅτως, ὡς τὴν ὑπὸ ΗΔΘ γωνίαν εἶναι = Ρ· ϗ δὴ αἱ ΔΗ ἔσονται = χ, αἱ δὲ τῇ ΚΜ παράλληλοι ΗΙ ἔσονται = υ· τῆς δὲ Σ γωνίας ὀρθῆς ὅσης, πορισθήσεται $\gamma^2 = \frac{5\alpha^2}{4}$ ϗ $\gamma = \frac{\alpha}{2}\sqrt{5}$.

297. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τϐ χυ ὀρθογωνίϐ μετὰ τϐ τετραγώνϐ υ^2 τῇ ἐξισώσει παρόντων, ἀτῇ τὸ χχ, τρεπτέον τὴν υ εἰς χ ϗ τ' ἀνάπαλιν· ϗ δὴ πορισθήσεται ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἐξίσωσις ὁμοία ταῖς ἄρτι κατεσκευασμέναις. Ἀλλὰ γὰρ ἴωμεν ἤδη εἰς τὸ ἐπιλύσασθαι ἔνια τῶν ἀορίςων δευτεροβαθμίων προβλημάτων.

298. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τῆς Αμ ἁπτομένης κύκλϐ (σχ. 140), ϐ κέντρον τὸ κ, ϗ Ξμ ἀεὶ ὑποτιθεμένης παραλλήλϐ τῇ διαμέτρῳ ΑΒ ϗ ἴσης τῇ ἐναπολαμβαμένῃ Βμ, εὑρεῖν τὲς τόπϐς πάντων τῶν σημείων Ξ.

ΛΥΣΙΣ. Καθείσθω πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΒΑ

προεκβληθείσῃ ἡ ΞΠ $=$ Αμ $= υ$, ϗ ΑΠ ἔσω $= χ =$ Ξμ $=$ Ρμ, ϗ κΑ $= α$· διὰ τοίνυν τὴν ἰδιότητα τȣ̃ κύκλȣ (Γεωμ. 344) ἐςὶν $Αμ^2 = μΡ \times μΜ$, εἴτ' ȣ̃ν $υ^2 = χ.(χ+2α)$, τȣ̃τ' ἔςιν $υ^2 = 2αχ+χ^2$, ἐξίσωσις κυκλικῆς ὑπερβολῆς, ἧς οἱ ἄξονες ἴσοι τῇ δοθείσῃ διαμέτρῳ· κατάδηλον δὲ, ὡς αἱ μὲν ἐναπολαμβανόμεναι Ρμ τȣ̃ κυκλικȣ̃ τεταρτημορίȣ Αδ διδόασι τὸν κλῶνα ΑΞ, αἱ δὲ ἐναπολαμβανόμεναι πΤ, τὸν ΑΖ· ȣ̓δὲ τȣ̃το δὲ δυσχερὲς συνιδεῖν ὡς ἄρα διὰ τῆς ἁπτομένης ΝΒΚ συςαίη ἂν ἡ ἀντικειμένη ὑπερβολὴ νΒΗ.

299. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Σημείȣ δοθέντος τȣ̃ Ν (σχ. 141), μεταξὺ δύω πλευρῶν τῆς ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας εὑρεῖν καμπύλην τὴν ΝΜ, ὅπως ἀγομένης διὰ τȣ̃ Ν εὐθείας ἁπάσης τῆς ΑΜΓ, αἱ ἐναπολαμβανόμεναι ΑΜ, ΝΓ ἀεὶ ἴσαι ὦσιν.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τῶν Μ, Ν σημείων ἤχθωσαν ΜΣ, ϗ ΝΔ παράλληλοι τῇ πλευρᾷ ΒΓ, ϗ ὑποτεθείσθω ΒΣ $= χ$, ϗ ΜΣ $= υ$, ϗ ΝΔ $= α$· ϗ ἐπεὶ διὰ τὴν φύσιν τȣ̃ προβλήματος ΑΜ $=$ ΝΓ, ἔςαι ΑΣ $=$ ΒΔ $= β$ (διὰ γὰρ τὰς παραλλήλȣς ΝΔ, ΜΣ ἔςι ΜΑ : ΓΝ :: ΣΑ : ΔΒ· ἀλλὰ ΜΑ $=$ ΓΝ· ἄρα ϗ ΣΑ $=$ ΒΔ)· ἄρα ΑΔ $=$ ΒΣ $= χ$· ἀλλὰ διὰ τὰς παραλλήλȣς ΣΜ, ΝΔ ἔςι ΣΑ : ΣΜ :: ΑΔ : ΔΝ, εἴτ' ȣ̃ν $β : υ :: χ : α$· ἄρα $χυ = βα = γ^2$· γενομένȣ ἄρα $βα = γ^2$, ἔςαι $χυ = γ^2$, ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ΑΒ, ΒΓ· ἐὰν ἄρα μεταξὺ τῶν δε τῶν εὐθειῶν ὑπερβολὴ γραφῇ, διήκȣσα διὰ τȣ̃ σημείȣ Ν, τοριωθήσεται ἡ ζητȣμένη καμπύλη.

300. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Τετράγωνον συςήσασθαι ἴσον ὀρθογωνίῳ, ȣ̃ αἱ πλευραὶ διαφέροιεν ἀλλήλων γραμμῇ εὐθείᾳ δεδομένῃ τῇ $2α$.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω $υ$ ἡ τȣ̃ τετραγώνȣ πλευρὰ ϗ $χ$ ἡ ἐλάσσων τȣ̃ ὀρθογωνίȣ πλευρά· ἡ ἄρα μείζων ἔςαι $= χ + 2α$· ἐκ δὲ τῆς τȣ̃ προβλήματος φύσεως ἔςιν $υ^2 = 2αχ + χ^2$, ἐξίσωσις κυκλικῆς ὑπερβολῆς, ἧς οἱ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἑκάτερος τῇ εὐθείᾳ $2α$. Τὸ ἄρα ἀφ' ἡςινοσȣ̃ν τεταγμένης τετράγωνον $υ^2$ ἀεὶ ἔςαι ἴσον ὀρθογωνίῳ, ȣ̃ αἱ πλευραὶ διαφέρȣσιν ἀλλήλων τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ $2α$.

301. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Τετράγωνον συςήσαϑαι ἴσον ὀρθογωνίῳ, ȣ̃ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν εἴη ἀμετάβλητον ϗ ἴσον τῷ $2α$.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω $υ$ ἡ τȣ̃ ζητȣμένȣ τετραγώνȣ πλευρὰ, ϗ $χ$ ἡ ἑτέρα τῶν τȣ̃ ὀρθογωνίȣ πλευρῶν· ἁτέρα τοίνυν ἔςαι $= 2α - χ$· ἔςι δὲ ἐκ τῆς τȣ̃ προβλήματος φύσεως $υ^2 = 2αχ - χ^2$, ἐξίσωσις κύκλȣ, ȣ̃ ἡ διάμετρος $= 2α$· ἄρα τὸ ἀφ' ἑκάςης τεταγμένης τετράγωνον, ϗ τὸ ὑπὸ τῶν συςοιχȣσῶν ἀποτετμημένων ὀρθογώνιον, ἕξȣσι τὴν ζητȣμένην ἰσότητα.

302. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. Τῆς ϑέσεως δύω παραλλήλων ΑΗ, ΒΘ (σχ. 142), ὧν τὰ πέρατα Α ϗ Β μόνιμά εἰσι, δοθείσης, εὑρεῖν μεταξὺ αὐτῶν σημεῖον τὸ Μ, δι' ȣ̃ ἂν ϗ διὰ τȣ̃ Α ἀχθεισῶν τῆς τε εὐθείας ΑΜΔ ϗ τῆς ΠΜΞ παραλλήλȣ τῇ ΒΑ, ἡ ΒΔ εἴη πρὸς τὴν ΜΠ, ὡς μία δεδομένη εὐθεῖα ἡ $φ$ πρὸς τὴν ΒΑ.

ΛΥΣΙΣ. Κείϑω τὸ πρᾶγμα ὡς γεγονώς· ϗ δὴ ἔςω $ΑΒ = α$, $ΑΠ = χ$, ϗ $ΠΜ = υ$· τῶν ȣ̃ν τριγώνων ΑΒΔ, ΜΠΑ ὁμοίων ὄντων, ἔςι ΜΠ : ΠΑ :: ΑΒ : ΒΔ, εἴτ' ȣ̃ν $υ : χ :: α : ΒΔ = \frac{χα}{υ}$· ἀλλὰ διὰ τὴν φύσιν τȣ̃ προβλήματος ἔςι $\frac{χα}{υ} : υ :: φ : α$· ἄρα $φυ = \frac{α^2 χ}{υ}$, εἴτ'

οὖν $\varphi\upsilon\upsilon = \alpha^2\chi$, ἢ $\upsilon\upsilon = \frac{\alpha^2\chi}{\varphi}$, ἢ τέλος, τεθέντος $\frac{\alpha^2}{\upsilon} = \pi$, $\upsilon^2 = \pi^4\chi$, ἐξίσωσις παραϐολῆς, ἧς ΑΗ ἐςὶν ἡ γραμμὴ τῶν χ.

303. Ἔςιν ἃ τῶν προϐλημάτων δυχερέςερα τὸ πρῶτον δοκεῖ, ὧν μέντοι ἡ ἐπίλυσις ῥᾴςη, μικρόντι ἐπιςήσασι τὸν νοῦν ἰδιότητί τινι τῶν καμπύλων· οἷον

304. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'. Καμπύλην εὑρεῖν τὴν ΑΛΔΒ (σχ. 143), ὅπως περὶ τὸν ἄξονα ΑΒ, ἀπείρων παραϐολῶν γραφεισῶν ΛΑ, ΖΑ, ΔΑ, κτ. (ὡς εἶναι ἀλλ' οὖν τὴν μεγίςην παράμετρον < 2ΑΒ) καὶ ἐκ σημείου τοῦ Β τῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΒ ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΒΛ, ΒΖ κτλ. καθέτων ταύταις ταῖς παραϐολαῖς, ἡ καμπύλη ΑΖΘΒ διήκῃ διὰ πάντων τῶν σημείων, ἐν οἷς αὗται αἱ κάθετοι συναντῶσι ταῖς αὐτῶν παραϐολαῖς.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῶν σημείων Λ, Ζ, Δ ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΛΡ, ΖΞ, ΔΠ, κτ. κάθετοι τῷ ἄξονι ΑΒ, οὐκοῦν ἡ μὲν Βπ ἐςιν ὑποκάθετος τῆς παραϐολῆς ΘΑ, ἡ δὲ ΒΠ τῆς ΔΑ κτ. ἔςω ἤδη ΔΠ $= \upsilon$, καὶ ΑΠ $= \chi$, καὶ ΑΒ $= 2\beta$· ἄρα ΒΠ $= 2\beta - \chi$· διὰ δὲ τὴν φύσιν τῆς παραϐολῆς ΔΑ, τιθεμένης τῆς κατ' αὐτὴν παραμέτρου $= 2\pi$, πρόεισιν $\upsilon^2 = 2\pi\chi$. Ἀλλ' ἡ ὑποκάθετος ΒΠ ἡμίσειά ἐςὶ τῆς παραμέτρου· ἄρα ΒΠ $= \pi = 2\beta - \chi$, καὶ $\upsilon^2 = 2\ (2\beta\chi - \chi\chi)$· ὡσαύτως δὲ γενομένης Βπ $= 2\beta - \chi$, καὶ Απ $= \chi$, καὶ Θπ $= \upsilon$, εὑρεθήσεται καὶ ἐπὶ τῆς ΘΑ παραϐολῆς $\upsilon^2 = 2\,.\,(2\beta\chi - \chi\chi)$· ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἄλλων παραϐολῶν· ἐν ἄρα τῇ καμπύλῃ ΑΛΒ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα εἰσὶν, ὡς τὰ διπλᾶ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀποτετμημένων χ καὶ $2\beta - \chi$, τοῦτ' ἔςιν ἀεὶ ὑπάρχει

$\upsilon^2 : 2\beta\chi - \chi\chi :: 2 : 1 :: \alpha\alpha : \beta\beta$ (ὑποτιθεμένης $\alpha\alpha = 2\beta\beta$)· ἄρα $\upsilon^2 : 2\beta\chi - \chi\chi :: \alpha\alpha : \beta\beta$ ϗ $\upsilon^2 = \frac{\alpha\alpha}{\beta\beta}(2\beta\chi - \chi\chi)$, ἐξίσωσις ἐλλείψεως· ἐκεῖν ἡ καμπύλη ΑΔΒ ἐστιν ἡμιελλείψιον, ȣ̃ ὁ μὲν ἄξων $\text{ΑΒ} = 2\beta$, ὁ δ' ἡμιάξων $\text{ΞΖ} = \alpha$· ἵνα δ' εὑρεθείη ἡ ΙΞ, εἰλήφθω τὸ γινόμενον ὑπὸ δύω τῶν τυχȣσῶν ἀποτετμημένων (ΑΠ, ΠΒ φέρε), ϗ γενέσθω $\text{ΑΠ} \times \text{ΒΠ} = 2\beta\chi - \chi\chi : \text{ΔΠ}^2 = \upsilon^2 :: \beta\beta : \alpha\alpha$· ὁ δὲ ταύτης τῆς ἀναλογίας τέταρτος ὅρος γνωςὸν ποιήσει τὸν ἡμιάξονα $\alpha = \text{ΙΞ}$.

Περὶ Γεωμετρικῆς ἐπιλύσεως τῶν ὡρισμένων ἐξισώσεων τȣ̃ τρίτȣ ϗ τȣ̃ τετάρτȣ βαθμȣ̃.

305. Ἐὰν ἐξίσωσις ὡρισμένη τριτοϐάθμιος ἢ τεταρτοϐάθμιος εἰς δύω ἀναλυθῇ ἐξισώσεις ἀορίςȣς δευτεροϐαθμίȣς, αἱ διατομαὶ τῶν καμπύλων, ἃς ἐμφαίνȣσιν αἱ ἀόριςοι αὗται ἐξισώσεις, ἀποδώσȣσι τὰς ῥίζας τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· Ἵνα δὲ τὸ πρᾶγμα λαμπρότερον ἀναφανείη, ἔςων ἐξισώσεις αἱ $\chi^2 = \alpha\upsilon$, $\chi\upsilon = \alpha\beta$· εἰσὶν ȣ̃ν ἡμῖν ἐξισώσεις τε δύω ϗ δύω ποσότητες ἄγνωςοι· ȣ̉κȣ̃ν ἀφικέσθαι δυνησόμεθα εἰς ἐξίσωσιν μιᾶς μόνης ἀγνώςȣ περιεκτικήν· ἐκ γὰρ τῆς πρώτης ἐξισώσεως πρόεισι $\frac{\chi^2}{\alpha} = \upsilon$, ταύτης δὲ τῆς τȣ̃ υ δυνάμεως ἀντικαταςαθείσης ἐν τῇ δευτέρᾳ, προκύψει ἐξίσωσις ὡρισμένη τριτοϐάθμιος $\frac{\chi^3}{\alpha} = \alpha\beta$, εἴτ' ȣ̃ν $\chi^3 = \alpha\alpha\beta$· τȣ̉ναντίον δὲ ταύτην τὴν ὡρισμένην ἐξίσωσιν εἰς δύω ἀορίςȣς δευτεροϐαθμίȣς

ἀναλύσαι δυνάμεθα, ὑποτιθέμενοι $\chi^2 = \alpha\upsilon$, ϗ $\chi\upsilon = \alpha\beta$, ἐξ ὧν τῆς συνθέσεως ἀποτελεῖται ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 = \alpha^2\beta$.

Τῆς τοίνυν τριτοβαθμίȣ, ἢ τεταρτοβαθμίȣ, ἐξισώσεως εἰς δύω ἀναλυθείσης ἀορίςȣς δευτεροβαθμίȣς, εἰλήφθω ἡ εὐθεῖα ΑΠ ὡς ἄξων (σχ. 144), τὸ δὲ σημεῖον Α ὡς ἀρχὴ τῶν χ ἑκατέρας τῶν ἐν ταύταις ταῖς ἐξισώσεσι δοθεισῶν κωνικῶν τομῶν· γραφεισῶν ἐν τῶν δε τῶν καμπύλων, αἱ ῥίζαι τῆς προκειμένης ἐξισώσεως ὁρισθήσονται ὑπὸ τῶν σημείων, τῶν οἷς ἀλλήλας τέμνȣσιν αἱ καμπύλαι· ἐν γὰρ τῷ προτεθέντι ὑποδείγματι γραφεῖσα ἡ παραβολὴ Αμ ἐπὶ τῆς άπτομένης ΑΠ ἔςαι τόπος τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 = \alpha\upsilon$· ἀχθείσης εἶτα τῆς ΑΝ παραλλήλως ταῖς τεταγμέναις Πμ, ϗ γραφείσης τῆς ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi\upsilon = \alpha\upsilon$ ὑπερβολῆς μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ΑΠ, ΝΑ, τὸ σημεῖον μ τῆς τῶν καμπύλων Αμ, μΜ, διατομῆς προσδιορίσει τὴν τεταγμένην μΠ, ϗ τὴν ἀποτετμημένην ΑΠ μίαν μόνην ῥίζαν τῆς ἐξισώσεως $\chi^3 = \alpha^2\beta$· αἱ γὰρ ἄλλαι ῥίζαι εἰσὶν ἀδύνατοι· ὥσπερ ϗ αἱ καμπύλαι Αμ, μΜ, καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διατέμνονται.

Μόνη τοιγαρȣ̃ν ἀπαιτεῖται ἡ τῆς τριτοβαθμίȣ, ἢ τεταρτοβαθμίȣ, ἐξισώσεως εἰς δύω ἀορίςȣς δευτεροβαθμίȣς ἀνάλυσις, τοιάς δε μέντοι, οἷαι ἀποδιδόναι αὖ ἔχειν ϗ ἀνακαθιςᾶν τὴν προτιθεμένην ἐξίσωσιν· εἰς πλείω δὲ εὐμάρειαν δυνατὸν ὑποθέσθαι τὰς τεταρτοβαθμίȣς, ἢ τριτοβαθμίȣς, ἐξισώσεις ἀπηλλαγμένας τȣ̃ δευτέρȣ ὅρȣ· προςιθέναι μόνον δεῖ ταῖς εὑρεθείσαις ἂν ῥίζαις τὸ τρίτον τȣ̃ κατὰ τὸν ἀφανισθέντα δεύτερον ὅρον συνεργȣ̃, ἢ τὸ τέταρτον, εἰ τεταρτοβάθμιος εἴη ἡ προκειμένη ἐξίσωσις, μετὰ συμβόλȣ ἐναντίȣ, καθάπερ δέδεικται (Συμβολ. Λογισμ. 465)· τὸ δὲ τρίτον τȣ̃το, ἢ τέταρτον, γραμμὴν

εὐθεῖαν εἶναι, ἀλλὰ μὴ καμπύλην, μὴ οὐχὶ περιττὸν ᾖ προσεπισημειῶσαι;

306. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἔστω γενικὴ ἐξίσωσις τριτοβάθμιος, τοῦ δευτέρου ὅρου ἀπηλλαγμένη, ἡ $\chi^3 + \alpha\beta\chi - \alpha\zeta^2 = 0$, ἐφ᾽ ἧς α ϗ β ὑποτεθῆναι δύνανται εἴτε ὑπαρκτικαὶ, εἴτε λειπτικαί· γενέσθω οὖν $\chi^2 = \alpha\upsilon$, ϗ ἀντικατασταθήτω ἡ τοῦ χ^2 δύναμις ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει, ἥτις ἔσται διὰ α διαιρεθεῖσα $\upsilon\chi + \beta\chi - \zeta^2 = 0$· ἡ μὲν οὖν ἐξίσωσις $\chi^2 = \alpha\upsilon$ ἐστι παραβολῆς· εἰς δέ γε κατασκευὴν τῆς ἑτέρας ἐξισώσεως, γενέσθω $\upsilon + \beta = \psi$· ϗ τοίνυν ἔσται διὰ μεταθέσεως $\chi\psi = \zeta^2$, ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις. Παραμέτρῳ οὖν $= \alpha$, ἐπὶ τῆς ΔΜ (σχ. 145) ληφθείσης ὡς γραμμῆς τῶν χ, ὧν ἡ ἀρχὴ ἐστι κατὰ τὸ Δ, γεγράφθω ἡ παραβολὴ ΠΔΝ ἧς ἅπτεται ἡ ΔΜ κατὰ τὸ Δ ἀρχὴν τοῦ τῶν υ ἄξονος ΔΣ· ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὴν παραβολὴν ἰδιότητος, ἐστι $\Delta M^2 = \Sigma N^2 = \chi^2 = \alpha \times \Delta\Sigma = \alpha\upsilon$· ἄρα ΔΝ ἐστὶν ἡ ζητουμένη παραβολή· εἰς δὲ κατασκευὴν τῆς ἐν τῇ ἐξισώσει $\psi\chi = \zeta^2$ ὑπερβολῆς, ἐπειδὴ ἑκατέραν τῶν καμπύλων ἔχειν ἐπάναγκες τὸν αὐτὸν ἄξονα ϗ τὴν αὐτὴν ἀρχὴν τῶν χ, εἰλήφθω $K\Delta = \beta$, ϗ διὰ τοῦ Κ ἤχθω τῇ ΔΜ παράλληλος ἡ ΙΚΞ· ἡ ἄρα τῶν ἀσυμπτώτων γωνία ΞΚΣ, ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ ΜΔΣ γωνίᾳ τῶν χ ϗ τῶν υ, ὅπερ ἀεὶ οὕτως ἔχειν προσήκει ἐν τοιαῖσδε περιπτώσεσι. Τούτου τεθέντος Ζητηθήτω σημεῖόν τι τῆς ὑπερβολῆς ΜΝ, τιθεμένοις

$$\zeta : K\Xi :: \Xi N : \zeta \cdot \quad \text{ἄρα } \Xi N = \frac{\zeta^2}{\Xi K}$$

· ἀλλὰ ΞΚ ῥᾳδίως ἔχει γνωσθῆναι· ἄρα ϗ ΞΝ εὐχερῶς γνωσθήσεται· ἄρα εὐμαρῶς εὑρεθήσεται σημεῖόν τι τὸ Ν τῆς ὑπερβολῆς· εὑρεθήσονται δὲ ϗ ἕτερα σημεῖα ποικιλλομένης τῆς ΚΞ·

ἔςιν ἄρα $\Xi N = \psi = \upsilon + \beta$, ϗ $\upsilon = \psi - \beta = \Xi N -$ $\mu\Xi$· ἄρα $\mu N = \upsilon$ ϗ $\Delta\mu = K\Xi = \chi$· ῥᾷςα ἓν καταφαίνεται, ὡς τὸ τῆς διατομῆς σημεῖον N μίαν τὴν $\Delta\mu$ προσδιορίσει ἐκ τῶν ῥιζῶν τῆς προκειμένης ἐξισώσεως, τῶν δὲ α ϗ β ὑπαρκτικῶν ὄντων ἡ ὑπερβολὴ ϗ ἡ παραβολὴ καθ' ἓν μόνον σημεῖον διατμηθήσονται, ϗ ἡ ἐξίσωσις μίαν μόνην ἕξει ῥίζαν πραγματικήν· τ' αὐτὸν ἔςαι, κ' ἢν ᾗ $\beta = o$.

307. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἔςω ἤδη ἐξίσωσις γενικὴ τεταρτοβάθμιος $\chi^4 + \zeta\vartheta\chi^2 + \zeta^2 \cdot \beta\chi \pm \zeta^3\gamma = o$· ὑποτεθείσθω ἓν $\zeta^3\gamma = \chi^2\upsilon^2$, ϗ γενομένης ἀντικαταςάσεως, πρόεισι $\chi^4 + \zeta\vartheta\chi^2 + \zeta^2\beta\chi + \chi^2\upsilon^2 = o$· γεγράφθω δὲ ὁ τρίτος ὅρος ὅτω $\dfrac{\zeta^2\beta}{\zeta\sqrt{\zeta\varepsilon}}\zeta\sqrt{(\zeta\gamma)}\,\chi$· ἐν αὐτῷ δὲ τῷ ὅρῳ ἀντικαταςαθήτω $\chi\upsilon$ ἀντὶ $\zeta\sqrt{(\zeta\gamma)}$· (ἐκ γὰρ τῆς ἐξισώσεως $\zeta^3\gamma = \chi^2\upsilon^2$ ἀποφέρεται $\chi\upsilon = \zeta\sqrt{(\zeta\gamma)}$)· ϗ δὴ ἔςαι $\chi^4 + \zeta\vartheta\chi^2 + \dfrac{\beta\sqrt{(\zeta)}}{\sqrt{\gamma}}\chi^2\upsilon + \chi^2\upsilon^2 = o$, ἥτις διὰ χ^2 διαιρεθεῖσα γενήσεται $\chi^2 + \vartheta\zeta + \dfrac{\beta\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\gamma}}\upsilon \pm \upsilon^2 = o$· αὕτη τοίνυν ἡ ἐξίσωσις, ληφθέντος τῦ $-$ συμβόλυ ἐν τῷ ἐχάτῳ ὅρῳ, ἐλλείψεως μὲν ἔςαι τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας μὴ ὀρθῆς ὅσης· κύκλυ δὲ, ὀρθῆς· ὑπερβολῆς δὲ κυκλικῆς, τῦ $-$ τεθέντος ἐν τῷ ἐχάτῳ ὅρῳ· ϗ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει συζεύχθω ἡ ἔλλειψις, ἢ ὁ κύκλος, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἡ κυκλικὴ ὑπερβολὴ τῇ ὑπερβολῇ τῆς ἐξισώσεως $\zeta\sqrt{(\zeta\gamma)} = \chi\upsilon$· αἱ δὲ αὐτῶν διατομαὶ προσδιορίσυσι τὰς ζητυμένας ῥίζας. Τῆς δὲ τῶν συντεταγμένων γωνίας ὀρθῆς ὑποτεθείσης, ϗ τῦ συμβόλυ $-$ ληφθέντος, πορισθήσονται αἱ ῥίζαι διὰ τῶν διατομῶν δύο ὑπερβολῶν κυκλικῶν· εὐχερῶς δὲ κατανο-

εἶται, ὡς ἄρα ἐξίσωσις τριτοβάθμιος πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\chi = o$, ἢ ἐπὶ $\chi - o = o$ τεταρτοβάθμιος γίνεται, ϗ εὐμαρῶς αὐτῆς αἱ ῥίζαι εὑρίσκονται.

Δυνατὸν δὲ κατασκευάσαι τὴν γενικὴν τεταρτοβάθμιον ϗ τριτοβάθμιον ἐξίσωσιν ϗ διὰ παραβολῆς ϗ κύκλȣ· ἔςω γὰρ παραβολὴ ἡ ΔΕΖ (σχ. 144), ἧς ἐξίσωσις $\upsilon^2 = \beta\chi + \chi^2$, τȣ̃ Β ἀρχῆς ὄντος τῶν ἀπὸ τῆς εὐθείας ΜΝ ἀποτετμημένων, ϗ ὀρθῆς τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας· ϗ ἐπὶ τῆς ἀπεράντȣ ΒΑ εἰλήφθω ΒΘ $= \delta$ (ἢ $= - \delta$, εἰ ληφθείη ἐπὶ τῆς Βα), ϗ ἐπὶ τῆς ΘΗ παραλλήλȣ τῇ ΜΝ εἰλήφθω ΘΚ $= \zeta$, ἢ ἀποδοτέον τὸ $-$, εἰ ληφθείη πρὸς τὰ ἀριςερά· ϗ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαςήματι δὲ τῷ ΚΖ $= \gamma$, γεγράφθω κύκλος ὁ ΖΑ, τέμνων τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ Ζ· ἐπεὶ ȣ̃ν ΖΙ $= \upsilon$ ϗ ΒΙ $= \chi$ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν παραβολὴν, ἔςαι ΖΗ $= \upsilon -$ ΗΙ $= \chi^2 + \beta\chi - \delta$, ϗ ΚΗ $=$ ΛΙ $=$ ΘΗ $-$ ΘΚ $= \chi - \zeta$· ἐκ δὲ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΚΗΖ πρόεισι

$$\gamma^2 = \chi^4 + 2\beta\chi^3 + \beta^2\chi^2 - 2\delta\chi^2 - 2\beta\delta\chi + \delta^2 + \chi^2 - 2\zeta\chi + \zeta^2$$

εἴτ' ȣ̃ν

$$\chi^4 + 2\beta\chi^3 + \beta^2\chi^2 - 2\beta\delta\chi + \delta^2 = o \quad (A)$$
$$- 2\delta\chi^2 - 2\zeta\chi + \zeta^2$$
$$+ \chi^2 \qquad - \gamma^2$$

εἰλήφθω ἤδη ἐξίσωσίς τις τεταρτοβάθμιος, ἥτις ἀεὶ ἐμπεριεχεθήσεται τῇ καθολικῇ $\chi^4 + \pi\chi^3 + \xi\chi^2 + \rho\chi + \sigma = o$ (Β)· αἱ δὲ, ἃς εὑρεῖν δεῖ, ΒΙ ἔσονται αἱ χ, εἴτ' ȣ̃ν αἱ δυνάμεις τῶν ταύτης τῆς ἐξισώσεως ῥιζῶν· ἴσης ȣ̃ν ὑποτιθεμένης τῆς Β τῇ Α, ϗ ταύτης πρὸς ἐκείνην παραβαλλομένης, ἔξομεν $2\beta = \pi$, ϗ $\beta\beta - 2\delta + 1 = \xi$, ϗ $- 2\beta\delta - 2\zeta = \rho$, ϗ $\delta\delta + \zeta\zeta - \gamma\gamma = \sigma$· αἱ τοίνυν διὰ τῶν γραμμάτων $\beta, \delta, \zeta, \gamma$ ἐμφαινόμεναι εὐθεῖαι ἀεὶ

δύνανται γενέσθαι μεγέθȣς τȣ̃ ἀπαιτȣμένȣ, ἵν' εἶεν ἀληθεῖς αἱ ἐξισώσεις, αἱ πρὸς διορισμὸν αὐτῶν ξυντελȣ̃σαι· ἐκȣ̃ν ἔςαι $\beta = \frac{1}{2}\pi$, ϗ $\delta = \frac{\beta^2 + 1 - \xi}{2} = \frac{\frac{1}{4}\pi^2 + 1 - \xi}{2}$,

ϗ $\zeta = \frac{-2\beta\delta + \rho}{2} = \frac{-\frac{1}{4}\pi^3 + \pi - \pi\xi + 2\rho}{4}$, ϗ

$\gamma = \sqrt{(\delta\delta + \zeta\zeta - \sigma)}$· ἐκ δὲ ψιλῆς ἐποπτείας δῆλον καθίςαται, ὅτι β, δ, ζ ȣ̓δέποτε κατ' ἐπίνοιαν δύνανται εἶναι· ἡ δὲ γ, μόνον ἡνίκα σ ποσότης εἴη ὑπαρκτικὴ $> \delta\delta + \zeta\zeta$· ἀλλ' ἐπείπερ δ ȣ̓ μόνον διὰ π ϗ ξ προσδιορίζεται, ἀλλὰ ϗ διὰ τῆς μονάδος τῆς εὐθείας, ἥν, ὅσον ἂν βȣλοίμεθα, μεγάλην λαϐεῖν δυνάμεθα, ἐξέςαι ἀεὶ ποιεῖν $\delta\delta + \zeta\zeta > \sigma$, ἐφ' ᾧ τὴν γ ποσότητα τελεῖσθαι πραγματικήν.

Εἰ μὲν ὁ κύκλος τετραχθὰ τὴν παραϐολὴν τέμνει, ἡ προκειμένη ἐξίσωσις τεσσάρων ῥιζῶν πραγματικῶν εὐμοιρήσει· δυεῖν δὲ, εἰ δίχα· ȣ̓δεμιᾶς δὲ πραγματικῆς, ἀλλὰ πασῶν ἀνυπάρκτων, τȣ̃ κύκλȣ μὴ συμϐαλόντος ὅλως τῇ παραϐολῇ· ἑτέρωθεν δὲ, ἐπεὶ αἱ ἀνύπαρκτοι ῥίζαι πάσης ἐξισώσεως εἰσὶν ἀεὶ ἀρτιάριθμοι, ὁ κύκλος τέμει δίχα, ἢ τετραχθὰ, ἢ ȣ̓δόλως, τὴν παραβολήν. τȣ̃ δὲ κύκλȣ μόνον ἁπτομένȣ τῆς παραβολῆς, ἕκαςον σημεῖον ἀφῆς δηλώσει δύω ῥίζας ἴσας, αἵτινες εἰς μίαν συμπεσεῖν δύνανται· ὡς εἰ δύω εἶεν τὰ τῆς ἀφῆς σημεῖα, δηλωθήσονται τέσσαρες ῥίζαι ἀνὰ δύω ἰσάλληλοι.

308. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἔςω ἐξίσωσις κυβικὴ $\chi^3 + \pi\chi^2 + \xi\chi + \rho = o$, ἥτις πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ χ γίνεται $\chi^4 + \pi\chi^3 + \xi\chi^2 + \rho\chi = o$ (Α), ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος, ἧς παραβαλλομένης τῇ ὁμοβαθμίῳ καθ-

ολικῇ, εὑρίσκεται $\sigma = o$· ὥϛε ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει, $\gamma = \sqrt{(\delta\delta + \zeta\zeta - \sigma)}$ γίνεται $= \sqrt{(\delta\delta + \zeta\zeta)}$, ὅπερ δείκνυσιν ἐνταῦθα μίαν τῶν ῥιζῶν τῆς A ἐξισώσεως εἶναι $= o$, ϗ κύκλον τὸν, κέντρῳ μὲν τῷ K, διαςήματι δὲ τῷ γ, γραφόμενον διήκειν διὰ τȣ͂ σημείȣ B, ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων· αἱ δὲ λοιπαὶ τῆς προκειμένης ἐξισώσεως A ῥίζαι εὐπετῶς εὑρίσκονται· ἐπεὶ γὰρ ἐξίσωσις πᾶσα τριτοβάθμιος μιᾶς εὐμοιρεῖν ὀφείλει ῥίζης πραγματικῆς, ϗ δυεῖν ἀνυπάρκτων, ἢ γȣ͂ν τριῶν πραγματικῶν, ὁ κύκλος διατεμεῖ τὴν παραβολὴν καθ' ἕν, ἢ τρία σημεῖα, ἢ καθ' ἓν μὲν αὐτὴν τεμεῖ, καθ' ἕτερον δ' αὐτῆς ἐφάψεται.

Ἐπίλυσις ἐνίων Γεωμετρικῶν Προβλημάτων, ὡρισμένων τε ϗ ἀορίϛων, βαθμῶν ὑπερτέρων.

309. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Δύω εὐθειῶν τῶν α, β δοθεισῶν, δύω μέσας ἀνάλογον τὰς χ, υ εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

ΛΥΣΙΣ. Ἔϛω, ἡ μὲν πρώτη τῶν ζητȣμένων $= \chi$, ἡ δὲ δευτέρα $= \upsilon$· διὰ δὲ τὴν φύσιν τȣ͂ προβλήματος ἔϛιν $\alpha : \chi :: \chi : \upsilon :: \upsilon : \beta$· ἄρα (Συμβ. Λογ. 270) $\alpha^3 : \chi^3 :: \alpha : \beta$ ϗ $\chi^3 = \alpha^2 \beta$, ἐξίσωσις τριτοβάθμιος, ἣν ἤδη κατεσκευάσαμεν (305) διὰ παραβολῆς ϗ ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις· ὥϛε ἡ ἀποτετμημένη AΠ (σχ. 144) ἔϛιν ἡ ζητȣμένη ῥίζα τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· ἔϛω ȣ͂ν $A\Pi = \gamma$· ϗ δὴ ἐκ τῆς τȣ͂ προβλήματος φύσεως ἔϛιν $\alpha : \gamma :: \gamma : \upsilon = \frac{\gamma\gamma}{\alpha}$, δευτέρα τῶν ζητȣμένων μέσων ἀναλόγων.

310. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπειδὴ, διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς γεωμετρικῆς προόδȣ, ἐςὶν $\alpha^3 : \chi^3 :: \alpha : \beta$, ἐὰν ᾖ $\alpha : \beta : 2 : 1$· ὁ ἀπὸ τῆς α εὐθείας κύβος διπλάσιος ἔςαι τȣ̃ ἀπὸ τῆς εὐθείας χ· ὄντος δὲ $\alpha = 3\beta$, ὁ πρῶτος τȣ̃ δευτέρȣ ἔςαι τριπλάσιος· ἐντεῦθεν ἄρα ἐπιλύεται τὸ παρὰ τοῖς πάλαι περιβόητον δηλιακὸν πρόβλημα, ὅπερ ἦν τὸ διπλασιάσαι τὸν κύβον, περὶ ȣ̃ μέτιθι τὰ τȣ̃ Εὐτοκίȣ ἐν τῷ τȣ̃ Ἀρχιμήδȣ περὶ σφαίρας ϗ κυλίνδρȣ β΄. βιβλίῳ.

311. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Γωνίας ὀρθῆς τῆς ΑΒΗ (σχ. 147), ϗ σημείȣ μονίμȣ τȣ̃ Α ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτῆς πλευρῶν, δοθέτων, ἀπὸ δὲ τȣ̃ Α ἀγομένης εὐθείας, ἕως ἂν ἀπαντήσῃ τῇ πλευρᾷ ΒΗ, ϗ εὐθείας τῆς ΒΘ ἀεὶ εὑρισκομένης = ΘΜ, εὑρεῖν τίνος καμπύλης εἰσὶ πάντα τὰ σημεῖα Μ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τȣ̃ Μ σημείȣ κατήχθω κάθετος ἡ ΜΠ τῇ ΑΒ πλευρᾷ, ϗ γενέσθω $ΑΒ = \alpha$, ϗ $ΑΠ = \chi$, ϗ $ΠΜ = \upsilon$· ȣ̓κȣ̃ν ΠΒ ἔςαι $= \alpha - \chi$, ϗ $ΑΜ = \sqrt{\chi^2 + \upsilon^2}$ ἐκ δὲ τῶν τριγώνων ΑΠΜ, ΑΒΘ πρόεισι $\chi : \upsilon :: \alpha :$

$$ΒΘ = \frac{\alpha\upsilon}{\chi} = ΘΜ,$$

ἐξ ὑποθέσεως· ἀλλὰ διὰ τὰς παραλλήλȣς ΠΜ ϗ ΒΘ ἐςὶν $ΑΠ : ΠΒ :: ΑΜ : ΘΜ$, εἶτ' ȣ̓̃ν

$$\chi : \alpha - \chi :: \sqrt{(\alpha^2 + \upsilon^2)} : ΘΜ = ΘΒ = \frac{\alpha\upsilon}{\chi}.$$

ἐντεῦθεν ἄρα $\alpha\upsilon = (\alpha - \chi) \cdot \sqrt{(\chi^2 + \upsilon^2)}$, εἶτ' ȣ̓̃ν

$$\alpha^2\upsilon^2 = (\alpha - \chi)^2 \cdot (\chi^2 + \upsilon^2), \text{ ἢ } \upsilon^2 = \frac{(\chi - \alpha)^2 \cdot \chi^2}{2\alpha\chi - \chi^2}$$

$$= \frac{(\alpha - \chi)^2 \cdot \chi}{2\alpha - \chi}, \text{ εἶτ' οὖν } \upsilon = \pm \frac{\alpha\chi - \chi^2}{\sqrt{(2\alpha\chi - \chi^2)}}.$$

ἐξ ȣ̃ δῆλον, ὡς ἑκάςῃ ἀποτετμημένῃ συςοιχȣ̃σι δύω ἴσαι

τεταγμέναι, ἡ μὲν ὑπαρκτικὴ, ἡ δ' ἑτέρα λειπτική· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\chi < 2\alpha$, αἱ τεταγμέναι ἔσονται πραγματικαί· ἡ ἄρα καμπύλη διήξει τηνικαῦτα διὰ τοῦ Β, οἱ δὲ δύω αὐτῆς κλῶνες ἐπεκτενοῦνται, ὁ μὲν πρὸς ν, ἅτερος δὲ πρὸς Ν· ἐὰν δὲ ληφθῇ $\Theta N = \Theta B$, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΘ, ΑΞΝ πρόεισι $\chi : \upsilon :: \alpha : B\Theta = \frac{\alpha\upsilon}{\chi} = \Theta N$· ἀλλὰ, διὰ τὰς παραλλήλους ΒΘ καὶ ΞΝ, ἐστιν $A\Xi : B\Xi :: AN : \Theta N$, εἴτ' οὖν $\chi : \chi - \alpha :: \sqrt{(\chi^2 + \upsilon^2)} : \frac{\alpha\upsilon}{\chi}$, ὅθεν ἀποφέρεται $\upsilon = \pm \frac{\chi^2 - \alpha\chi}{\sqrt{(2\alpha\chi - \chi^2)}}$, ἐξίσωσις ἐπὶ τῶν κλωνῶν ΒΝ, Βν· κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ $= \alpha$, γεγράφθω κύκλος, οὗ ΑΔ ἐστι διάμετρος, καὶ ἤχθω ἀπέραντος ἡ ἁπτομένη ζΔΖ, ἥτις ἔσται ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης· ἐὰν γὰρ ὑποτεθῇ $\chi = 2\alpha$, ἔσται $\upsilon = \pm \frac{2\alpha^2}{0} = \pm \infty$· ἐὰν δ' ὑποτεθῇ $\upsilon = \sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}$, ἀντικαταστασθείσης ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῇ ἤδη εὑρημένῃ ἐξισώσει, τῶν κλασμάτων ἐξωθέντων, πορισθήσεται $2\alpha\chi - \chi^2 = \chi^2 - \alpha\chi$, εἴτ' οὖν $2\alpha - \chi = \chi - \alpha$, ἢ $3\alpha = 2\chi$, καὶ $\chi = \frac{3\alpha}{2}$· ἀλλ' ἡ καμπύλη συναντᾷ τῷ κύκλῳ, ὅταν αὐτῆς ἡ τεταγμένη ἰσωθῇ τῇ τοῦ κύκλου· ἄρα ἡ καμπύλη συναντήσῃ τῷ κύκλῳ ἐν σημείοις ἀντιστοίχοις τῇ ἀποτετμημένῃ ΑΤ $= \frac{3\alpha}{2}$.

312. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Τόξον κύκλου δοθὲν τὸ μπΞΝ εἰς τρία ἴσα τόξα διελεῖν (σχ. 148).

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθω δὴ τὸ πρᾶγμα ὡς γεγονὸς, καὶ ἐκ τῶν τῆς διατομῆς σημείων π, Ξ ἐστάθωσαν πρὸς ὀρθὰς τῇ χορδῇ μΝ αἱ πΣ, ΞΤ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ ἡ μΝ· δῆλον οὖν ὅτι ΣΔ = ΔΤ, ἐπεὶ μπ = πΞ = ΞΝ, καὶ πΞ παράλληλός ἐστιν ἐκ κατασκευῆς τῇ μΝ· τούτου τεθέντος ἔστω ἡ ἄτρεπτος μΔ = α, καὶ ΔΣ = χ, καὶ Σπ = υ· οὐκοῦν ἔσται ΣΤ = 2χ = πΞ = μπ· ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου μΣπ, ἔστι $4\chi^2 = \upsilon^2 + \alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2$, μεταθέσει δὲ καὶ ἀναγωγῇ, καὶ διαιρέσει διὰ 3, καὶ ἀναπληρώσει, προκύπτει ἐξίσωσις $(\chi + \frac{\alpha}{3})^2 = \frac{4\alpha^2}{9} + \frac{\upsilon^3}{3}$· ὑποτεθέντος δὲ $\chi + \frac{\alpha}{2} = \psi$, γίνεται $\psi^2 = \frac{4\alpha^2}{9} + \frac{\upsilon^3}{3}$, εἴτ' οὖν $\psi^2 - \frac{4\alpha^2}{9} = \frac{\upsilon^2}{3}$· ὅθεν $\psi^2 - \frac{4\alpha^2}{9}$:: $1 : 3 :: \frac{4\alpha^2}{9} : \frac{4\alpha^2}{3}$, ἀναλογία προσφυὴς ὑπερβολῇ, ἧς, πρῶτος μὲν ἡμιάξων $= \frac{2\alpha}{3}$, δεύτερος δὲ $= \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}$. ἡ δὲ γωνία τῶν συντεταγμένων ἐνταῦθα ἐστιν ὀρθή· ἵνα δὲ ἀναγραφείη αὕτη ἡ ὑπερβολὴ, διῃρήσθω ἡ μΝ εἰς τρία ἰσάλληλα μέρη μΡ, ΡΑ, ΑΝ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, δευτέρῳ δὲ ἡμιάξονι τῷ $\frac{2\alpha}{\sqrt{3}}$, γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ πΡΜΠ· ἡ δὲ π κοινὴ διατομὴ αὐτῆς τε καὶ τοῦ κύκλου ἀποδώσει τὸ μπ τόξον τριτημόριον τοῦ μπΝ τόξου· διὰ δὲ τοῦ σημείου π ἤχθω παράλληλος ἡ πΞ τῇ μΝ· τὸ οὖν σημεῖον τῆς διατομῆς Ξ προσδιορίσει τὸ δεύτερον τριτημόριον πΞ, καὶ ΝΞ ἔσται τὸ

τρίτον· τέμνει δὲ ἡ ὑπερβολὴ τὸν κύκλον ϗ καθ' ἕτερον σημεῖον τὸ Π, ὅπερ ἐκτίθησι τὸ τριτημόριον τȣ͂ τόξȣ μΠΝ ἀναπληρώματος εἰς 360° τȣ͂ προτεθέντος τόξȣ· βȣλομένοις γὰρ ϗ τόδε τὸ τόξον εἰς τρία ἰσάλληλα μέρη διελεῖν, ΔΖ ὑποθεμένοις $= \chi$, ϗ ΖΠ $= \upsilon$, προκύψει ἡ αὐτὴ τῇ ἄρτι εὑρημένῃ ἐξίσωσις.

313. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐντεῦθεν καταφαίνεται, ὅπως δυνάμεθα εἰς τρεῖς ἴσας γωνίας διελεῖν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν· ἀπόχρη γὰρ διελεῖν τὸ τὴν γωνίαν μετρȣ͂ν τόξον· ὅπερ, ἡμῖν μὲν δι' ὑπερβολῆς ϗ κύκλȣ ἐπιτετήδευται, ἄλλοις δὲ διὰ παραβολῆς ϗ κύκλȣ, καθὰ ϗ τὸ τῆς εὑρέσεως τῶν μέσων συνεχῶς ἀνάλογον (309) διὰ δύω παραβολῶν ἐπιλύεται, ὡς ἔςιν ἰδεῖν ἐν Γ'. τόμῳ τῶν Μαθηματ. τȣ͂ Θεοτόκου §. 318, ϗ 322, ϗ ἐν τοῖς ὑπ' Ἀσάνȣς τȣ͂ Κεφαλλῆνος παρεντεθεῖσι τῷ τȣ͂ Καΐλλȣ συμβολικῷ λογισμῷ §. 436, 440.

314. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Δοθεισῶν δύω εὐθειῶν α, β ϗ μεταξὺ αὐτῶν συνεχῶς ἀναλόγων ἐμφαινομένων ὑπὸ τȣ͂ ἀριθȣ͂ μ, εὑρεῖν τὴν τῆς ν τάξεως· ὑποτεθέντος, φέρ' εἰπεῖν, $\mu = 10$, ϗ $\nu = 7$, εὑρεῖν τὴν μεταξὺ α ϗ β ἑβδόμην τῶν μέσων συνεχῶς ἀναλόγων.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω χ ἡ πρώτη τῶν μέσων ἀναλόγων· ϗ δὴ ποριθήσεται ἡ ἐφεξῆς σειρὰ $\div\!\div\; \alpha : \chi : \frac{\chi^2}{\alpha} : \frac{\chi^3}{\alpha^2} : \frac{\chi^4}{\alpha^3} \ldots\ldots \frac{\chi^\nu}{\alpha^{\nu-1}} \ldots\ldots \frac{\chi^\mu}{\alpha^{\mu-1}} : \frac{\chi^{\mu+1}}{\alpha^\mu} = \beta$· ȣ̓κȣ͂ν, ἐπεὶ οἱ δεῖκται τὰς τάξεις ἐμφαίνȣσι τῶν ὅρων, ὁ τῆς ν τάξεως ἔςι $= \frac{\chi^\nu}{\alpha^{\nu-1}}$· ὑποτεθείσθω δὴ ȣ̓͂τος

$= \psi$· ὅθεν γενήσεται $\chi^{\nu} = \alpha^{\nu-1}\psi$· ἀλλ' ἐπεὶ $\frac{\chi^{\mu+1}}{\alpha^{\mu}} = \beta$, καὶ $\chi^{\mu+1} = \alpha^{\mu}\beta$, τῶν ῥιζῶν ἐξαχθεισῶν, ἔσαι $\chi = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+1}} \beta^{\frac{\mu}{\mu+1}}$· ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸν ν ὑψωθείσης βαθμὸν, ἔσαι $\chi^{\nu} = \alpha^{\frac{\mu\nu}{\mu+1}} \beta^{\frac{\mu\nu}{\mu+1}} = \alpha^{\nu-1}\psi$· ὅθεν $\psi = \alpha^{\frac{\mu-\nu+1}{\mu+1}} \beta^{\frac{\nu}{\mu+1}}$, τύπος παρισῶν τὴν ζητουμένην μέσην ἀνάλογον.

Ὡς ἂν οὖν εἰς τὴν κατασκευὴν ἀφικώμεθα, ὑψούσθω ἑκάτερον μέλος εἰς τὸν βαθμὸν $\mu+1$, ἵνα γένοιτο $\psi^{\mu+1} = \alpha^{\mu-\nu+1}\beta^{\nu}$· τοῦ δὲ μ περιττοῦ ἀριθμοῦ ὄντος, καὶ ὑποτεθέντος $\psi^{2} = \alpha\upsilon$, ποριθήσεται $\alpha^{\mu-2\mu+1}\beta^{\nu} = \alpha^{\frac{\mu+1}{2}} \upsilon^{\frac{\mu+1}{2}}$, ὅθεν $\upsilon^{\frac{\mu+1}{2}} = \alpha^{\frac{\mu-2\mu+1}{2}} \beta^{\nu}$· ἐὰν δὲ διὰ ταύτης τῆς ἐξισώσεως εὑρεθῇ ἡ υ, εὑρεθήσεται καὶ ἡ ψ μέση ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ υ· εἰ δὲ $\frac{\mu = 1}{2}$ ἀριθμὸς εἴη ἄρτιος τῇ αὐτῇ χρησαμένοις μεθόδῳ, μετήχθω ὁ τύπος εἰς τρίτην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν α, υ τὴν π, ὥσπερ ἐγένετο ὡς πρὸς τὴν υ τρίτην ἀνάλογον τῶν α, ψ, καὶ οὕτως ἑξῆς, μέχρις ἂν ἀφικώμεθα εἰς δείκτην περισσάριθμον· ἀποχρήσει ἄρα κατασκευάσαι τὸν τύπον ὑποτιθεμένου περιττοῦ τοῦ $\mu+1$· πολλαπλασιασθήτω τοίνυν τηνικαῦτα ἐπὶ ψ, ἵνα γένοιτο $\psi^{\mu+2} = \alpha^{\mu-\nu+1}\beta^{\nu}\psi$· καὶ δὴ ὁ δείκτης $\mu+2$ ἔσεται ἄρτιος· γενομένου δὲ $\psi^{2} = \alpha\upsilon$, διαιρέσει ποριθήσεται $\upsilon^{\frac{\mu+2}{2}} = \alpha^{\frac{\mu-2\nu}{2}} \beta^{\nu}\psi$, τοῦ $\frac{\mu+2}{2}$ ἀριθμοῦ ὑπάρχοντος τῶν ὁλοχερῶν· ἐπὶ ἄξονος οὖν τοῦ ΑΔ (σχ. 149)

γεγράφθω παραβολὴ ἡ ΑΒΜ διὰ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἤδη εὑρημένης. αἱ τοίνυν ΑΔ ἔσονται $= \psi$· γεγράφθω εἶτα παραβολὴ ἡ ΑΒΜ διὰ τῆς ἐξισώσεως $\psi^2 = \alpha\upsilon$· τῶν ἐν δύω παραβολῶν τεμνομένων κατὰ τὸ Β, ἀχθείσης ἐντεῦθεν τεταγμένως τῆς ΔΒ, $\text{ΑΔ} = \psi$ ἔσαι μέση ἀνάλογος ἡ ζητουμένη, καὶ ΔΒ τρίτη ἀνάλογος ταῖς εὐθείαις α, ψ.

315. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Πολλῶν εὐθειῶν ἐκκειμένων κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν, τῆς πρώτης δοθείσης, εὑρεῖν τὴν δευτέραν, ὅπως ἡ δευτέρα σὺν τῇ ἐχάτῃ ἴσῃ ᾖ ποσότητι δεδομένῃ τῇ β.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω α ἡ πρώτη καὶ χ ἡ δευτέρα· ἡ ἄρα ἐχάτη ἔσαι $\beta - \chi$· ἡ γὰρ ἐχάτη μετὰ τῆς χ ὑποτίθεται $= \beta$· τῆς οὖν α πρώτης ούσης τῶν ἀναλόγων εὐθειῶν, καὶ χ τῆς δευτέρας, ἡ τρίτη ἔσαι $\frac{\chi^2}{\alpha}$· τηρηθείσης δὲ ἐν τῷ λογισμῷ ταύτης τῆς ἐκθέσεως, ἡ τετάρτη ἀνάλογος περιέξει τὸν τρίτον βαθμὸν τῆς ἀγνώσου· ἵνα δὲ τοῦτο φύγοιμεν, γενέσθω $\frac{\chi^2}{\alpha} = \upsilon$, καὶ τῆς υ ἀντὶ τρίτου ἀναλόγου ληφθείσης, εὑρεθήσεται ἡ τετάρτη διχῶς ἐκτιθεμένη· ἤτοι διὰ τῶν γραμμάτων α, χ, υ, εἴτ' οὖν $\frac{\chi\upsilon}{\alpha}$, ἢ διὰ $\frac{\upsilon^2}{\chi}$· ἐὰν δ' εἶτα γένηται $\upsilon : \frac{\chi^\upsilon}{\alpha} :: \frac{\chi^\upsilon}{\alpha} : \psi = \frac{\chi^\upsilon \upsilon^2}{\upsilon\alpha^2} = \frac{\upsilon^2}{\alpha}$, εἴγε $\upsilon = \frac{\chi^2}{\alpha}$, εὑρεθήσεται ἡ πέμπτη $= \frac{\upsilon^2}{\alpha}$· ἐν τούτοις οὖν τοῖς τύποις ἡ ἄγνωσος οὐκ ἄνεισιν εἰς βαθμὸν τοῦ δευτέρου ὑπέρτερον· ἐὰν δὲ, τηρουμένων τούτων, προαγαγεῖν περαιτέρω βουληθῶμεν τὸν λογισμὸν, τρίτοις καὶ τετάρτοις ἐμ-

πεσούμεθα πάντως βαθμοῖς· ἑκοῦν ἵνα τοῦτο ἐκκλίναιμεν, ὑποτεθείσθω ἡ τετάρτη ἀνάλογος = τ, καὶ δὴ ἡ πέμπτη ἔσεται $= \frac{\tau\chi}{\alpha} = \frac{\tau\upsilon}{\chi} = \frac{\tau^2}{\upsilon}$· τῆς δὲ πέμπτης ὑποτεθείσης = ψ, αἱ λοιπαὶ μέχρι τῆς ἐννάτης διορισθήσονται, ὡς ἀνταῦθα καθορῶνται· δυνατὸν δὲ τὸν λογισμὸν ἔτι περαιτέρω προαγάγειν, ὑποτιθεμένοις τὴν ἐννάτην = σ.

Α′.	Β′.	Γ′.	Δ′.	Ε′.	ϛ′.	Ζ′.	Η′.	Θ′.
α	χ	$\frac{\chi^2}{\alpha}$	·	·				
			·	·				
		υ	$\frac{\chi\upsilon}{\alpha}$	$\frac{\upsilon^2}{\alpha}$				
			$\frac{\upsilon^2}{\chi}$					
			Τ	$\frac{\tau\chi}{\alpha}$	$\frac{\tau\upsilon}{\alpha}$			
				$\frac{\tau\upsilon}{\chi}$	$\frac{\tau\tau}{\chi}$			
				$\frac{\tau\tau}{\upsilon}$				
				ψ	$\frac{\chi\psi}{\chi}$	$\frac{\psi\upsilon}{\alpha}$	$\frac{\psi\tau}{\alpha}$	$\frac{\psi\psi}{\alpha}$
					$\frac{\psi\upsilon}{\chi}$	$\frac{\tau\psi}{\chi}$	$\frac{\psi\psi}{\chi}$	
					$\frac{\psi\tau}{\upsilon}$	$\frac{\psi\psi}{\upsilon}$		
					$\frac{\psi\psi}{\tau}$			

ἴωμεν ἤδη ἐπὶ τὴν κατασκευήν· ἐὰν ὑποτεθῇ ἑκάτη ἡ

πέμπτη ἀνάλογος, εἰλήφθω ἡ ἔκθεσις $\frac{\upsilon^2}{\alpha}$· κατὰ τοίνυν τὴν τῆ προβλήματος θέσιν ἐςὶν $\frac{\upsilon^2}{\alpha} = \beta - \chi$, ἢ $\upsilon^2 = \alpha(\beta - \chi)$, ἐξίσωσις παραβολῆς, ἧς παράμετρος $= \alpha$· ἐπεὶ δὲ $\frac{\chi^2}{\alpha} = \upsilon$· ἐντεῦθεν ἄρα $\chi^2 = \alpha\upsilon$, ἐξίσωσις ἄλλη παραβολῆς, τὴν αὐτὴν ἐχέσης παράμετρον· εἰλήφθω ἦν παράμετρος ΑΒ $= \alpha$ (σχ. 150) καὶ δι' αὐτῆς γεγράφθω παραβολὴ ἡ ΑΔ, ἧς ἁπτέσθω ἡ ΑΠ. καὶ δὴ ποριθήσεται ἡ ἐκ τῆς $\chi^2 = \alpha\upsilon$ ἐξισώσεως παριςαμένη παραβολή· εἰλήφθω εἶτα ΑΚ $= \beta$, καὶ τῆ Κ τεθέντος ἀντὶ κορυφῆς, γεγράφθω ἐπὶ τῆ ἄξονος ΚΑ παραβολὴ ἡ ΚΔ, τὴν αὐτὴν ἔχεσα παράμετρον· αὕτη ἦν τὴν πρώτην κατὰ τὸ Δ διατεμεῖ, καὶ ἀχθείσης τεταγμένως τῆς ΔΠ, ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ $= \chi$ ἔςαι ἡ δευτέρα ζητεμένη ἀνάλογος· τῆς γὰρ δευτέρας ὑπαρχέσης χ, ἡ μὲν τρίτη ἔςαι $\frac{\chi^2}{\alpha}$, ἡ δὲ πέμπτη $\frac{\chi^4}{\alpha^3} = \beta - \chi$ ἐξ ὑποθέσεως· ὅθεν ἀποφέρεται $\chi^4 = \alpha^3(\beta - \chi)$· ἐὰν ἦν ληφθῇ ἡ τῆ υ δύναμις ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 = \alpha\upsilon$, καὶ ἀντικατασαθῇ ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon^2 = \alpha \cdot (\beta - \chi)$, προκύψει ἐξίσωσις $\chi^4 = \alpha^3 \cdot (\beta - \chi)$.

Ἐὰν δὲ ἐχάτη ὑποτεθῇ ἡ ἕκτη ἀνάλογος, ποριςθήσεται $\frac{\tau\tau}{\chi} = \beta - \chi$, ἢ $\tau\tau = \beta\chi - \chi\chi$, ἐξίσωσις κύκλε, ἧ διάμετρος $= \beta$· γεγράφθω ἦν πρῶτον ἡ παραβολὴ ΑΔ (σχ. 151) ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 = \alpha\upsilon$, ἣν δίδωσιν ἡ ἀντικατάςασις· αἱ δὲ ἀποτετμημέναι κείσονται ἐπὶ τῆς ἁπτομένης ΑΠ· ἤχθωσαν δὲ αἱ τεταγμέναι ΠΔ $= \upsilon$

κάθετοι τῇ ΑΠ, ϗ γενέσθω πανταχȢ ΑΒ = α : ΑΠ = χ : : ΔΠ = υ : ΖΠ = τ, ϗ διὰ πάντων τῶν σημείων Ζ διήχθω καμπύλη· εἰλήφθω τελευταῖον ΑΚ = β, ϗ ἐπ' αὐτῆς ὡς διαμέτρȢ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΚ, ὃ διατεμεῖ τὴν καμπύλην ΑΜΖ καθ' ἓν σημεῖον τὸ Ζ, καθ' ὃ προσδιορισθήσεται ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ = χ, δευτέρα ζητεμένη ἀνάλογος.

Ἣν ἐχρησάμεθα ἐν τῷ δε τῷ προβλήματι, ἡ μέθοδος δύναται συχνάκις ἀςείας ποιεῖν τὰς τῶν ὑπὲρ τὸν τρίτον ϗ τέταρτον βαθμὸν προβλημάτων λύσεις· κεῖται δ' ἡ μέθοδος αὕτη ἐν τῷ τιθέναι ἀντὶ τῶν τύπων, οἵτινες, εἰ μείνειαν ἐν τῷ λογισμῷ, ἀπεργάζονται τὰς καμπύλας ὑπερτέρας τῆς δευτέρας τάξεως, ἀγνώςȢς ἄλλας ϗ ἄλλας, ϗ ȣ̃τω διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν, ἢ καμπύλων ὑπερτέρων μὲν, γραφομένων δὲ διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν, ἐπιλύειν τὸ πρόβλημα· ἵνα δὲ ἡ λύσις ἀςειοτέρα γένηται, προσέχειν δεῖ, ὅπως αἵ, τε ἀντικαταςάσεις ϗ αἱ ἄγνωςοι ποσότητες ὡς οἷόν τε ἐνάριθμοι ὦσιν ἐν τῇ ἐχάτῃ ἐξισώσει.

316. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐφ' ᾧ δὲ ἐν τῇ κατασκευῇ τῶν προβλημάτων ἀποφεύγειν τὰς ὑπερτέρας καμπύλας, τὴν ἐφεξῆς ἐξέθεντο μέθοδον οἱ Ἀναλυτικοί· ἐὰν μὲν ὁ βαθμὸς τῆς κατασκευασθησομένης ἐξισώσεως ᾖ ἀριθμὸς τετράγωνος, χρηςέον ἐςὶ δυσὶ καμπύλαις, ὧν ἑκατέρας ἡ τάξις ἰσȢ̃ται τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς προκειμένης τάξεως· ἐὰν δὲ μὴ ᾖ τετράγωνος, ἀφαιρετέον αὐτȢ̃ τὸν μείζονα τετράγωνον, ϗ εἰ μὲν τὸ κατάλοιπον εἴη ἴσον ἢ ἔλαττον τῆς ῥίζης τȢ̃ μείζονος τετραγώνȢ, χρηςέον αὖθις δυσὶ καμπύλαις, ὧν τῆς μὲν ὁ βαθμὸς εἴη ἴσος τῇ ῥίζῃ, τῆς δὲ μείζων τῆς ῥίζης μονάδι· εἰ δ' εἴη τὸ κατάλοιπον τῆς ῥίζης

μεῖζον, χρηϛέον τηνικαῦτα δυσὶ καμπύλαις, ὧν ἑκατέρας ὁ βαθμὸς ὑπερέχοι μονάδι τῆς τοῦ τετραγώνου ῥίζης· οὕτως εἰς κατασκευὴν ἐξισώσεως ἐννεαβαθμίου χρηϛέον δυσὶ καμπύλαις τριτογενέσι· τῆς δ' ἐξισώσεως ἑνδεκαβαθμίου οὔσης, ἀφαιρετέον τοῦ 11 τὸν μείζω τετράγωνον 9· ϗ δὴ καταλειφθήσεται 2 $<$ 3 ῥίζης τετραγωνικῆς τοῦ 9· κατασκευαϛέον ἄρα τὴν ἐξίσωσιν, χρησαμένοις δυσὶ καμπύλαις, τῇ μὲν τριτοβαθμίῳ, θατέρᾳ δὲ τεταρτοβαθμίῳ· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ περιπτώσει πολλαπλασιάζεται ἡ ἑνδεκαβάθμιος ἐξίσωσις ἐπὶ $\chi = o$ (ἢ ϗ ἐπὶ $\chi - o = o$), ἵν' ἀποβῇ δωδεκαβάθμιος· τῆς δὲ ἐξισώσεως οὔσης 13°, 14°, 15°, ὡς ἀφαιρούμενον τὸν 9 τοῦ 13, 14, 15 καταλείπειν μείζω ἀριθμὸν τοῦ 3, χρηϛέον τηνικαῦτα δυσί καμπύλαις, ἑκατέρᾳ τετάρτης τάξεως. Ἀλλὰ γὰρ μάτην ἂν τοιάδε τις ἀποδοθείη μέθοδος, εἰ ϗ ὅπως ταύτῃ δέον χρήσασθαι μὴ προσαποδοθῇ, ἄλλως τε ἀδύνατον δοκεῖ τοιαύτην τηρηθῆναι μέθοδον· αἱ μὲν γὰρ ἐξισώσεις τοῦ 10° ϗ 11° βαθμοῦ εἰς τὸν 12° ἀνάγονται, πολλαπλασιαζόμεναι, αἱ μὲν ἐπὶ $\chi^2 = o$, αἱ δὲ ἐπὶ $\chi = o$· ἔϛω δὲ ἐξίσωσις τοῦ 12° βαθμοῦ, τοῦ δευτέρου αὐτῆς ὅρου ἀπηλλαγμένη ἡ $\chi^{12} + \alpha\chi^{10} + \beta\chi^9 +$ κτ. $= o$· γενομένου οὖν $\chi^3 = \upsilon$, τραπήσεται ἡ ἐξίσωσις εἰς τὴν $\upsilon^4 + \alpha\upsilon^3\chi +$ κτ. $= o$, ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος· ὑποτεθέντος δὲ $\chi^4 = \upsilon$, γίνεται $\upsilon^3 + \alpha^2\upsilon^2\chi^2 + \beta\upsilon\chi +$ κτ. $= o$· οὕτως οὖν ἀδύνατον τηρεῖν δύω καμπύλας, τὴν μὲν τρίτου, τὴν δὲ τετάρτου βαθμοῦ, καθάπερ ἡ μέθοδος διακελεύεται· προκειμένης δὲ ἐξισώσεως βαθμοῦ 16° ἡ $\chi^{16} + \alpha\chi^{14} + \beta\chi^{13} +$ κτ. $= o$, ὑποτεθέντος $\chi^4 = \upsilon$, γενήσεται $\upsilon^4 + \alpha\upsilon^3\chi^2 +$ κτ. $= o$ ἐξίσωσις πεμπτοβάθμιος· ἄρα ἡ 16° βαθ-

μῦ ἐξίσωσις ὁ κατασκευάζεται δὶ ἐξισώσεων δύω τεταρτοβαθμίων, ὡς ἡ μέθοδος ἐντέλλεται.

Οὐ μὴν ἀλλὰ μᾶλλον τὸν νῦν προσεκτέον τῇ εὐμαρείᾳ τῆς κατασκευῆς, ἢ τῇ τῶν ἐξισώσεων ἁπλότητι· ἢ γὰρ ἡ μὲν κατὰ τὴν παραβολὴν ἐξίσωσις ἁπλϛέρα ἐϛὶ τῆς τῦ κύκλυ, ἡ μέντοι τύτυ ἀναγραφὴ τῆς κατ᾽ ἐκείνην πολὺ ῥᾴων· ξυμβαίνει ὖν πολλάκις τὰς ὑψηλοτέρας τῶν καμπύλων εὐμαρεϛέρας ὑπάρχειν εἰς ἀναγραφὴν τῶν ταπεινοτέρων· ἀλλὰ γὰρ ταύτην τὴν μέθοδον καταλιπόντες, ὅπως δεῖ πᾶσαν ἐξίσωσιν ὡρισμένην διὰ καμπύλης ὁμοβαθμίυ ἢ εὐθείας κατασκευάζειν, εἴπωμεν ἤδη διὰ βραχέων· ἐπὶ τύτῳ τοίνυν ὅλη ἡ ἐξίσωσις διῃρήσθω διὰ πάντων τῶν ποιητῶν τῦ ἐχάτυ ὅρυ, πλὴν ἑνὸς, ὃς γενέσθω $= υ$, ἢ γεγράφθω ἡ καμπύλη, ἧς τεταγμένη μὲν ἐϛὶν ἡ $υ$, ἀποτετμημένη δὲ ἡ $χ$, διαφόρυς δυνάμεις ὑποδυομένη· τῆς δὲ καμπύλης καθάπαξ γραφείσης, ἤχθω ταῖς ἀποτετμημέναις παράλληλος εὐθεῖα ἀπέχυσα αὐτῶν ποσότητι ὑποτιθεμένῃ $= υ$· ἐκ δὲ τῆς κοινῆς διατομῆς τῆς εὐθείας ἢ τῆς καμπύλης πᾶσαι αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τῆς προκειμένης ἐξίσωσεως προκύψυσι.

317. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔϛω ἐξίσωσις $χ^5 - 2α^2χ^3 + α^4χ - α^4β = ο$· διῃρήσθω ὖν πᾶσα διὰ $α^4$, ὑποτεθέντος $β = υ$, ἢ μεταθέσει ἔϛαι $\frac{χ^5}{α^4} - \frac{2χ^3}{α^2} + χ = υ$· γεγράφθω τοίνυν ἡ ταύτης τῆς ἐξισώσεως καμπύλη· εἰς δὲ τῦτο εἰλήφθω, ἄξων μὲν ὁ ΓΒ (χ. 152), ἀρχὴ δὲ τῶν $χ$ τὸ Α· ἢ ὑποτεθέντος $χ = ο$, εὑρίσκεται $υ = ο$· ἡ ἄρα καμπύλη συμπεσεῖται τῷ τῶν ἀποτετμημένων ἄξονι κατὰ τὸ Α· ὑποτεθέντος δ᾽ εἶτα $χ = \pm α$, εὑρίσκεται

$\upsilon = o$· ἡ καμπύλη ἄρα συμπεσεῖται καὶ τοῖς δυσὶ σημείοις Γ καὶ Β τοῦ ἄξονος ὡρισμένοις, εἰ ληφθείη ΑΚ $=$ ΑΒ $=$ α· ὑποτεθέντος δὲ $\chi = \pm 2\alpha$, εὑρίσκεται $\chi = \pm 17\alpha$· ἐντεῦθεν καταφανὲς, ὅπως θηρεύονται, ὅσα ποτ' ἂν βουληθείημεν σημεῖα, τῆς προκειμένης καμπύλης· ὑποτεθείσθω τοίνυν ὡς γεγραμμένη ἡ καμπύλη· καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Α ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων παραλλήλως ταῖς τεταγμέναις ἡ εὐθεῖα ΑΜ $= \beta$, καὶ ἐπείπερ $\upsilon = \beta$ ἐστὶν ἐξίσωσις εὐθείας παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν χ, διὰ τοῦ Μ ἤχθω ἡ ΜΝ παραλλήλως ταῖς ἀποτετμημέναις· καὶ δὴ αἱ εὐθεῖαι ΜΠ, ΜΞ, ΜΝ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ὑπὸ τοῦ σημείου Μ, καὶ τῶν σημείων, οἷς ἡ ΜΝ συμβάλλει τῇ καμπύλῃ, εἰσὶν αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· καὶ γὰρ κληθεισῶν Υ τῶν τεταγμένων ἐπὶ τὸν νέον ἄξονα ΜΝ, ἔσται $\Upsilon = \upsilon - \beta$· ἀλλ' αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\frac{\chi^3}{\alpha^4} - \frac{2\chi^3}{\alpha^2} + \chi = \Upsilon = \upsilon - \beta$ συστοιχοῦσι σημείοις, ἐν οἷς $\Upsilon = \upsilon - \beta$ ἐστιν $= o$· ἄρα κτ. (*)· οὐ μὴν ἀλλ' ἐὰν ληφθῇ ἡ δύναμις τῆς υ ἐκ τῆς ἐξίσωσεως $\upsilon - \beta = o$, καὶ ἀντικατασταθῇ ἐν τῇ ἐξίσωσει $\frac{\chi^3}{\alpha^4} - \frac{2\chi^3}{\alpha^2} + \chi = \upsilon$, ῥᾶστα εὑρεθήσεται ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις.

318. Εἰ δὲ προκέοιτο εἰς κατασκευὴν ἡ ἐξίσωσις $\chi^7 + \alpha\beta\chi^3 + \gamma = o$, ἠδύνατο ὑποτεθῆναι $\gamma = \upsilon$, καὶ $\delta = 1$,

(*) Τοῦ δὲ ἄξονος ΜΝ ἁπτομένου τῆς καμπύλης καθ' ἕν τι σημεῖον, ἔσονται πᾶσαι αἱ ῥίζαι ἴσαι, εἴ γε τηνικαῦτα τὰ σημεῖα τῆς διατομῆς ἐκληφθήσονται ὡς συμπεπτωκότα εἰς ἕν.

κἀκ τῦτο γενέσθαι $\upsilon = -\frac{\chi^7}{\delta^6} - \frac{\alpha\beta\chi^3}{\delta^4}$, ὅπερ ἥκιςα κινεῖ τὴν τῶν ὅρων δύναμιν· ἐ γάρ ἐςιν ὅπως ἡ μονὰς διαιρεῖ· τοιγαρῦν οἱ ὅροι τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εὐμαρῶς ἔχυσι κατασκευῆς ὑπὲρ πάσης δυνάμεως τῆς χ.

319. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδυ δυνάμεθα εὑρεῖν τὰς πραγματικὰς ῥίζας ἐξισώσεως ἀριθμητικῆς· ἔςω γὰρ ἐξίσωσις $\chi^5 - 2\chi^3 + 3\chi - 192 = 0$· γενέσθω δὴ $\alpha = 2$, ϗ $\beta = 3$, ϗ $\gamma = 192$, ϗ ζητηθήτωσαν αἱ ῥίζαι, ὡς εἰ α, β, γ γραμμαὶ εἴησαν, ἔχυσαι τὺς λόγυς τῶν ἀριθμῶν, οἷς ἴσα ὑπεθέμεθα ταῦτα τὰ γράμματα· ὑποτεθέντος ἦν δ ὡς μονάδος γραμμῆς (ὅπερ ὐδὲν ὅλως τὸ κωλύον), ἔςαι $\delta = 1$, ϗ $\alpha = 2\delta$· κτ. · τιθεμένυ δὲ $\gamma = 0$, εὑρίσκονται αἱ ῥίζαι τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως· ὑποθώμεθα ἦν τὰς πραγματικὰς ῥίζας ταύτης τῆς ἐξισώσεως ΜΠ, ΜΞ, ΜΝ, τῶν ἄλλων ἀνυπάρκτων ὐσῶν· ἐφαρμοσθέντος ἦν δ ταύταις ταῖς ῥίζαις, ἐὰν εὑρεθῇ ΜΠ $= 2\delta$, ϗ ΜΞ $= 6\delta$, ϗ ΜΝ $= 15\delta$, συναχθήσεται ἐντεῦθεν τὰς ζητυμένας ῥίζας εἶναι 2, 6, 15.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Ὑπερβατικῶν Καμπύλων.

Τίνες μὲν ἦν εἰσὶν αἱ ὑπερβατικαὶ καμπύλαι, πρὸ μικρῦ εἴρηται (276), ἀμέλειτοι, ὧν τὴν φύσιν ἐκδηλῶσαι ὐ δύναται ἐξίσωσις, περιέχυσα τὸν τῶν ἀποτετμημένων ϗ τεταγμένων λόγον· ῥητέον μέντοι ἰδίᾳ ϗ περὶ

αὐτῶν βραχέα. Πᾶσα συνέκθεσις, ἣ οὐκ ἔςι γεωμετρικὴ, ὑπερβατικὴ καὶ ἔςι καὶ λέγεται· τοιαίδε εἰσὶν αἱ τόξων, ἡμιτόνων, συνημιτόνων, ἁπτομένων, τεμνουσῶν, λογαρίθμων περιεκτικαὶ, καὶ αἱ περιέχουσαι δὲ ποσὰ ἀνύπαρκτα, ἃ ἄντις εἰς πραγματικὰ τρέψειε, καὶ ἔτι αἷς ῥιζικὰ ἄλογα δεῖκται ἐπιτίθενται· οἷον $υ = χ^{\sqrt{3}}$ ἐὰν οὖν κληθῶσιν, υ μὲν αἱ τεταγμέναι, χ δὲ αἱ ἀποτετμημέναι, πᾶσαι αἱ καμπύλαι, ὧν ἡ φύσις ἐμφαίνεται διὰ τῶν ἐφεξῆς ἐξισώσεων, εἰσὶν ὑπερβατικαὶ, ἃς καὶ μηχανικὰς εἰσὶν οἳ ὀνομάζουσι· $υ = α.$ συνη. $χ$ (σημαίνει δὲ ὁ τύπος, ὡς ἄρα τὸ υ ἰσοῦται τῷ τόξῳ α, οὗ τὸ συνημίτονον ἴσον τίθεται τῇ ἀποτετμημένῃ χ)· $υ = α.$ ημ. $χ$· $υ = α.$ ἁπ. $χ$· $υ = α.$ τεμ. $χ$· $υ = λ.χ$· $υ^μ = λχ^ν$ (τοῦ λ δηλοῦντος τὸν λογάριθμον)· τελευταῖον δὲ πᾶσα ἐξίσωσις, μὴ ἐμφαίνουσα τὸν τῶν ἀποτετμημένων καὶ τεταγμένων λόγον, λογικὴ μὴ οὖσα, ἔςιν ὑπερβατικὴ, καὶ ὑπερβατικὴν παρίςησι καμπύλην· τὰς δὲ ὑπερβατικὰς, ἃς ἐμφαίνουσιν ἐξισώσεις, ἐφ' ὧν αἱ τρεπταὶ ποσότητες ἀλόγους ἔχουσι δείκτας, οἷον $υ = χ^{\sqrt{5}}$, $υ = χ^{\sqrt{2}}$, ὁ Λεϊβνίτιος καμπύλας διαβατικὰς (intercedentes) ἀπεκάλει.

Αἱ δὲ τοιαίδε καμπύλαι οὐδαμῶς ἂν ἄλλως κατασκευασθείησαν, ὅτι μὴ διὰ τῶν λογαρίθμων· τῶν γὰρ κατὰ τὰς ἴσας ποσότητας λογαρίθμων ἰσουμένων, ἐκ τῆς ἐκθέσεως $υ = χ^{\sqrt{2}}$ πρόεισι $λυ = λχ^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.λ.χ$· ἐπεὶ οὖν $λυ = \sqrt{2}.λ.χ$, πολλαπλασιαζομένου τοῦ λογαρίθμου ἑκάςης ἀποτετμημένης ἐπὶ $\sqrt{2}$, θηρευθήσεται ὁ τῆς ἀντιςοιχούσης τεταγμένης λογάριθμος, ὃς γνω-

σθήσεται διὰ προσεγγίσεως· ὑποτιθεμένων γὰρ τῶν χ ὑπαρκτικῶν, ἐὰν μὲν ᾖ $\chi = 0$, ἔσεται ϗ $\upsilon = 0$· ἐὰν δ' ᾖ $\chi = 1$, ἔςαι ϗ $\upsilon = 1$, ὥσπερ καθ' ἑαυτό ἐςι κατάδηλον· εἰ δὲ χ εἴη $= 2$, $\lambda\upsilon = \sqrt{2}.\lambda.2 = 0,4257274$ περίπου· ἄρα $\upsilon = 2,665186$ περίπου· εἰδ' εἴη $\chi = 10$, πορισθήσεται $\lambda.\upsilon = 1,4142356$ περίπου, ϗ $\upsilon = 25,956$ περίπου· εἰ δέ τοι ὑποτεθείη $\chi = -1, -2, -3$, κτ., ἀμήχανον ὅλως διορισθῆναι τὴν δύναμιν τοῦ υ.

Ἐκ τῶν μονονοὺκ ἀπείρων τῷ εἴδει ὑπερβατικῶν καμπύλων, τὰς ἑξῆς ἡμεῖς μόνον ὑποςρωσόμεθα.

320. Λογαριθμικαὶ καμπύλαι εἰσὶν, ὧν ταῖς ἐξισώσεσιν ἔνεισιν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀποτετμημένων, ἢ τῶν τεταγμένων· τοιάδε ἕν ἐςιν ἡ $\lambda\upsilon = \chi$, ἐν ᾗ ἀποτετμημέναι εἰσὶν οἱ λογάριθμοι τῶν τεταγμένων· τοιγαροῦν εἰς καταγραφὴν τοιᾶσδε καμπύλης, ἔςωσαν αἱ δύω πρόοδοι Ἀριθμητική τε ϗ Γεωμετρικὴ

$$\infty \;.\;.\;.\;.\; -1 \,.\, 0 \,.\, 1 : 2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \infty \;.\; \mathrm{A}$$

$$\frac{1}{\infty} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \tfrac{1}{2} \,.\, 1 \,.\, 2 : 4 \;.\;.\;.\;.\;.\; \infty \;.\; \mathrm{B}$$

ἕκαςος ὅρος τῶν ἐν τῇ Α ἔςαι πάντως λογάριθμος ἑκάςου ἀντιςοίχου κατὰ τὸ Β (Συμβ. Λογ. 313)· οὐκοῦν πρὸς τῷ σημείῳ Α τῆς Πε (σχ. 153) ἔσω ἀποτετμημένη $= 0$, ἡ δ' ἀντίςοιχος ἀποτετμημένη ΑΗ $= 1$, ϗ εἰλήφθωσαν πρὸς τὸ Β αἱ ἀποτετμημέναι $= 2$, $= 4$ κτ. ὅθεν ἀποληφθήσεται καμπύλη ἀπέραντος, ἐπεκτεινομένη πρὸς τὸ Β· εἰλήφθωσαν εἶτα πρὸς τὸ β λειπτικαὶ ἀποτετμημέναι -1, -2 κτ., ϗ αὐταῖς ἀντίςοιχοι τεταγμέναι $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ κτ., ϗ δὴ ἡ καμπύλη ἐς ἄπειρον ἐπεκταθήσεται πρὸς τὸ β, ἀεὶ μᾶλλον ϗ μᾶλλον ἔγγιον γιγνομένη τῆς εὐθείας Ββ, διὰ τὰς ἐπ' ἄπειρον φθινούσας τεταγμένας

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{\infty}$· ἄρα Πε ἔςαι ἀσύμπτωτος τῆς προκειμένης καμπύλης· παρὰ δὲ ταῦτα σαφὲς, ὡς ἀντὶ τȣ̃ διπλȣ̃ λόγȣ, τȣ̃ ἐν τῇ προόδῳ Β κρατȣ̃ντος, δύναται ἀντικαταςῆναι ἕτερός τις οἱοσȣ̃ν, ἐκτεθειμένος ἐν ὅροις, εἴτε ὁλοχερέσιν, εἴτε κλασματικοῖς· ἐντεῦθεν ἄρα ἀναφύȣσιν ἄπειροι καμπύλαι λογαριθμικαὶ, ἀλλήλων διάφοροι.

Ἔςω ἤδη ἐξ ἐναντίας $\upsilon = \lambda\chi$, ϗ εἰς καταγραφὴν τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ταύτης παριςαμένης καμπύλης εἰλήφθωσαν αἱ δύω πρόοδοι

$$\div 1 . 2 . 3 : 4 \ldots\ldots \infty \quad \Delta$$
$$\div\div 1 : \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{8} \ldots\ldots \tfrac{1}{\infty} \quad E$$

ἐὰν ȣ̃ν ληφθῶσιν, αἱ μὲν χ ἐν τῷ Ε, αἱ δὲ υ ἐν τῷ Δ, ἔςω Α ἀρχὴ τῶν ἀποτετμημένων (σχ. 154), ϗ $BA = BK = 1$· ΒΚ ȣ̃ν ἔςαι τεταγμένη ἀντίςοιχος τῇ ἀποτετμημένῃ ΒΑ· λαμβανομένων εἶτα, κατὰ τὴν πρόοδον, ἐκ διαδοχῆς, ὡς ἀποτετμημένων μὲν $EA = \frac{BA}{2}$, $AZ = \frac{BA}{4}$ κτ., ὡς δὲ τεταγμένων $EH = 2BK$, $ZI = 3BK$ κτ., ἀποληφθήσεται ἡ ζητȣμένη καμπύλη ΚΗΙ· Ἀλλ' ἔςι γὰρ πάντως πρόδηλον ἐκ τῆς Ε προόδȣ, ὡς μεταξὺ Ε ϗ Α ἐναπολαμβάνονται ἄπειροι ἀποτετμημέναι, ϗ ἀεὶ ἐλάττȣς γινόμεναι, αἷς ἀντιςοιχȣ̃σιν ἄπειροι τεταγμέναι, ἀεὶ μεγεθυνόμεναι· ἄρα ἡ καμπύλη, ἀπειράκις μὲν ἔγγιςα γενήσεται τῇ εὐθείᾳ Αψ, ȣ̓δέποτε μέντοι αὐτῇ συμπεσεῖται· ἄρα Αψ ἔςιν αὐτῆς ἀσύμπτωτος.

321. Συγκαταλεκτέον δὲ ταῖς λογαριθμικαῖς τὰς δεικτικὰς καλȣμένας καμπύλας, ἅτε δὴ εἰσιȣσῶν αὐτῶν ταῖς ἐξισώσεσι δεικτῶν εὐμεταβλήτων· οἵα ἐςὶν ἡ καμπύλη, ἣν ἐμφαίνει ἡ ἐξίσωσις $\upsilon = \chi^{\chi}$, δἰ ἧς σημαίνεται τὰς τεταγμένας ἀνάλογον ἔχειν τοῖς ἀπὸ τῶν

ἀποτετμημένων χ βαθμοῖς χ· ὅθεν ἀποφέρεται λ.υ=χ.λ.χ· ἐὰν ἓν ὑποτεθῇ χ = ο. ἔσαι υ = 1, ἐὰν δὲ χ = 1, καὶ υ = 1· ἐὰν δὲ χ = 2, ἔσαι υ = 2^2 = 4· ἐὰν δὲ χ = 3, ἔσαι υ = 3^3 = 27 κτ.· ἐὰν ἄρα ληφθῇ ἡ ἀποτετμημένη ΑΓ = χ = 1 (Σχ. 155), εὑρεθήσεται υ = ΓΔ = 1, ὑποτιθεμένων ὑπαρκτικῶν τῶν πρὸς τὸ Γ, χ· μεταξὺ δὲ Α καὶ Γ ἀεὶ ἔσαι χ < 1· ὡς, ἐὰν τεθῇ ΑΞ = $\frac{1}{2}$, γίνεσθαι υ = $\frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$· ὑποθετέον δὲ ἤδη ΑΘ = — χ· καὶ δὴ ἔσαι υ = $(-\chi)^{-\chi} = \frac{1}{(-\chi)^{\chi}}$· ἐὰν ἓν ᾖ χ = — 1, ἔσαι υ = — 1· ἄρα ὑποτιθεμένης ΑΘ = — 1, ποριοθήσεται τεταγμένη ΘΥ = — 1· τὸ δὲ σημεῖον Υ ἔσαι τῆς καμπύλης· ἐὰν δ' ὑπάρχῃ χ = — 2, ποριοθήσεται υ = $\frac{1}{4}$· ἄρα ἡ ΑΖ = — 2 ἀποτμηθήσεται ὑπὸ τεταγμένης, ὑπαρκτικῆς μὲν τῆς ΖΜ = $\frac{1}{4}$, λειπτικῆς δὲ ὀδεμιᾶς· ἐὰν δὲ αἱ λειπτικαὶ ἀποτετμημέναι χωρῶσι κατὰ πρόοδον αὔξουσαι 1, 2, 3, κτ., αἱ δὲ τεταγμέναι τεθῶσι προσεχέστατα ἀλλήλων, ποριοθήσονται τεταγμέναι παραλλὰξ ὑπαρκτικαίτε καὶ λειπτικαὶ, ὧν τὰ πέρατα ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος ἄπειρα σημεῖα διακεκριμένα ἀλλήλων, ἅτινα καμπύλην μὲν συνεχῆ ἥκιστα συστήσουσι, φαινόμενον δὲ τοιαύτης καμπύλης· τοιαύτη δὲ ἰδιότης ὀδεμίαν χώραν ἔχει ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς καμπύλαις· ἴδωμεν δὲ, εἰ τοιουτώδη σημεῖα ἐμφιλοχωρεῖν δύναται ταῖς ὑπαρκτικαῖς χ· ἔσω χ = $\frac{1}{2}$, οὐκοῦν ἔσαι υ = $\frac{1}{\pm\sqrt{2}}$· ἄρα τῇ ἀποτετμημένῃ ΑΞ = $\frac{1}{2}$ συστοιχοῦσι δύω τεταγμέναι ἴσαι

ΞΝ, Ξν, ἡ μὲν ὑπαρκτική, ἡ δὲ λειπτική· ὑποτιθεμένων δὲ ἐκ διαδοχῆς $\chi = \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ κτ. ῥᾷστα φανήσεται, ὅτι τοῖς μὲν κλάσμασιν, ὧν ἄρτιος ὁ παρονομαστὴς, δύω συστοιχοῦσι τεταγμέναι, ἡ μὲν ὑπαρκτική, ἡ δὲ λειπτική, τοῖς δ', ὧν ὁ παρονομαστὴς περιττὸς, μόνον ὑπαρκτικάι· ἄρα πρὸς τὰ ἐπὶ τὰς ὑπαρκτικὰς χ ἡ καμπύλη ἔχει ὕπερθεν τοῦ ἄξονος ἄπειρα σημεῖα διακεκριμένα ἀλλήλων.

322. Αἱ παρὰ τοῖς πάλαι λίαν διαβοηθεῖσαι τέσσαρες καμπύλαι, ὡς αὐτοῖς εὐχρηστοῦσαι εἰς ἐπίλυσιν τῶν δύω περικλεῶν προβλημάτων, τοῦτε περὶ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου, καὶ τοῦ περὶ τοῦ κυκλικοῦ τετραγωνισμοῦ, εἰσὶν ἡ Κισσοειδεὶς, ἡ Τετραγωνίζουσα, ἡ Κογχοειδὴς, καὶ ἡ Σπειροειδείς.

323. Κισσοειδής. Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒβ (σχ. 156), καὶ ἁπτομένη ἡ ΑΡ, καὶ πᾶσαι στιχηδὸν αἱ εὐθεῖαι ΑΡ· ἐὰν οὖν ἐφ' ἑκάστης ΑΡ ληφθῇ ἡ οἰκεία Αβ, καὶ μετενεχθῇ ἐκ τοῦ Ρ ἐπὶ τὴν ΑΡ (ὅθεν δῆλον, ὡς ΡΙ = Αβ), καμπύλη ἡ διήκουσα διὰ πάντων τῶν σημείων Ι ἐστὶν ἡ καλουμένη κισσοειδης· οὐκοῦν ά. ἐπεὶ ΑΡ ἀεὶ μᾶλλον ἐπὶ τῆς ΒΡ ἐγκλίνεται, καὶ Αβ, ὅσῳ ἀφίσταται τοῦ Β, ἐλαττοῦται, ἡ καμπύλη αὕτη μᾶλλον καὶ μᾶλλον τῇ εὐθείᾳ ΒΡ πλησιάζει· β'. ἔξεστιν ΑΡ ἀπείρους ἀγαγεῖν ἐπὶ τῆς ΒΡ προαχθείσης ἐπ' ἄπειρον· ἡ δὲ ΑΒ διὰ τὰς τοιάσδε ἐπ' ἄπειρον προηκούσας ΑΡ οὐδέποτε γενήσεται = ο, διὰ τὸν ἀναγκαῖον πλαγιασμὸν τῶν ΑΡ ἐπὶ ΒΡ· αὕτη δὲ ἡ Αβ, μεταφερομένη ἐπὶ τὴν οἰκείαν ἑαυτῆς ΑΡ, ἀεὶ διακρινεῖται τῆς ΒΡ τὴν καμπύλην· ἄρα ΑΙΙ ἐπ' ἄπειρον ἐγγίζουσα τῇ ΒΡ, οὐδέποτε ἔμπης αὐτῇ συμπεσεῖται· ἡ ἄρα ΒΡ ἀσύμπτωτός ἐστιν αὐτῆς τῆς καμπύλης.

324. Ἐὰν τὸ κυκλικὸν τεταρτημόριον ΑΜ (σχ. 157), καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ ΑΒ, εἰς ὁσαδήποτε μέρη ἴσα τμηθῶσι, καὶ ἀχθῶσιν ἅπασαι αἱ ἡμιδιάμετροι, καὶ παραλλήλως τῇ ΒΜ τεθῶσιν αἱ ΝΟ, ΔΟ συμβάλλουσαι ταῖς διαμέτροις, ἡ τὰ σημεῖα Ο, Ο ἐπιζευγνῦσα καμπύλη καλεῖται Τετραγωνίζουσα τοῦ Δεινοστράτου.

325. Ἐκ τῆς φύσεως ταύτης τῆς καμπύλης τὸ τόξον ΑΓ πρὸς τὸ τεταρτημόριον ΑΓΜ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ἀποτετμημένη ΑΝ πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΑΒ· ἐὰν οὖν γένηται ΑΓ $= \chi$, καὶ ΑΓΜ $= \beta$, καὶ ΑΝ $= \upsilon$, καὶ ΑΒ $= \alpha$, ἔσται $\chi : \beta :: \upsilon : \alpha$, ὅθεν $\alpha\chi = \beta\upsilon$, ἐξίσωσις τῆς Δεινοστρατείου τετραγωνιζούσης· ἵνα δὲ εὑρεθείη τὸ σημεῖον ξ, καθ' ὃ ἡ καμπύλη ἀπαντᾷ τῇ ἀκτῖνι ΒΜ, ὑποτεθήτω ἡ ἀκτὶς Βκ ἀπειράκις μικρά· καὶ δὴ καὶ τόξον τὸ ΜΘ ἔσται καὶ αὐτὸ ἀπειροστὸν μόριον τῆς κατὰ τὸ Μ ἀπτομένης τοῦ κύκλου, ἢ κατὰ τὴν τοῦ κύκλου ἰδιότητα ἐφέστηκε πρὸς ὀρθὰς τῇ ἀκτῖνι ΜΒ· τούτου τεθέντος, τὰ τρίγωνα ΘΒΜ, Βκν ὅμοιά εἰσιν, ὅτι ὀρθαὶ μὲν αἱ πρὸς τοῖς Μ, κ γωνίαι, ἰσάλληλοι δὲ αἱ ἐναλλὰξ Βνκ, ΘΒμ· ἄρα ΒΜ : νκ :: ΘΜ : κΒ· ἀλλ' ὑποτιθεμένης τῆς κΒ ἀπειράκις μικρᾶς, τὸ σημεῖον ν ἐκλαμβάνεται ὡς συμπεπτωκὸς τῷ ξ, ὡς ὑπάρχειν κν $=$ Βξ· ἔστι δὲ ἐκ τῆς ἰδιότητος τῆς τετραγωνιζούσης, ΘΜ : κΒ :: ΑΓΜ : ΑΒ· ἄρα ΜΒ $=$ ΑΒ : Βξ :: ΑΓΜ : ΑΒ, εἴτ' οὖν α : Βξ :: $\beta : \alpha$, ὅθεν Βξ $\times\ \beta = \alpha^2$, εἴτ' οὖν $\beta : \alpha :: \alpha$: Βξ, τουτέστιν „ἡ Βξ τρίτη ἀνάλογός ἐστι τῆς τοῦ κυκλικοῦ τεταρτημορίου περιφερείας, καὶ τῆς ἀκτῖνος, καὶ ἑπομένως ἡ τοῦ κυκλικοῦ τεταρτημορίου περιφέρεια τρίτη ἀνάλογός ἐστι τῆς εὐθείας Βξ καὶ τῆς ἀκτῖνος.“

326. Ἐὰν ἄρα γεωμετρικῶς εὑρεθῇ τὸ σημεῖον ξ,

εὑρεθῆναι δύναται γεωμετρικῶς ϗ τὸ μῆκος τῆς τȣ͂ κυκλικȣ͂ τεταρτημορίȣ περιφερείας, ἧς τὸ τετραπλȣ͂ν ἐςὶν ὅλη ἡ κυκλικὴ περιφέρεια· ὅθεν παρέπεται ὁ τȣ͂ κύκλȣ τετραγωνισμός· ἀλλὰ γὰρ ἀμήχανον τόδε τὸ σημεῖον προσδιορισθῆναι γεωμετρικῶς· ἡ γὰρ κν, ἐγγίςη ὑποτιθεμένη τῇ BM, ȣ̓μὴ τεμεῖ τὴν ἀκτῖνα Bϑ τȣ͂ ϑ τῷ M συμπίπτοντος· εἴγε ἡ κν, παράλληλος ȣ̓͂σα τῇ BM, ἔςαι παράλληλος ϗ τῇ Bϑ, ἢ, εἰ ϗ τȣ͂το βȣλοίμεθα, ἡ κν συμπίπτει τηνικαῦτα τῇ τε Bϑ ϗ τῇ BM.

327. Ἐὰν ἀκτὶς ἡ AB (σχ. 158) ἐπὶ τῆς BΓ παραλλήλως ἑαυτῇ κινηθῇ, ἕως ȣ͂ διανύσῃ αὐτὴ μὲν τὸ κυκλικὸν τεταρτημόριον AΔΓ, κατὰ δὲ τὸν αὐτὸν χρόνον ἡ πμ, παράλληλος ἀεὶ μένȣσα τῇ BΓ, διαδράμῃ τὴν AB εὐθεῖαν, ὥςε ἀεὶ ὑπάρχειν τὴν τȣ͂ κυκλικȣ͂ τεταρτημορίȣ περιφέρειαν AΔΓ : AΔ : : AB : AΠ, καμπύλη ἡ διὰ πάντων τῶν σημείων μ, καθ' ἃ τέμνονται αἱ εὐθεῖαι ZΔ, ΠM διήκȣσα καλεῖται τετραγωνίζȣσα τȣ͂ Tschirnaus, ὃς ταύτην εὕρατο, τὸν Δεινόςρατον μιμησάμενος· ἐὰν δὲ γένηται $A\Delta\Gamma = \beta$, ϗ $A\Delta = \chi$, ϗ $A\Pi = \upsilon$, ϗ $AB = \alpha$, ἕξομεν $\beta : \chi :: \alpha : \upsilon$, ὅθεν $\alpha\chi = \beta\upsilon$, ἐξίσωσις ταύτης τῆς καμπύλης.

328. Βȣλομένοις δὲ ἐξίσωσιν διάφορον ἔχειν, ἢ τὴν εὑρεθεῖσαν, σημειωτέον, ὅτι $\Pi M = O\Delta$ ἐςὶν ἡμιτ. χ, ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi = \beta\upsilon$, ἔςιν $\upsilon = A\Pi = \frac{\alpha\chi}{\beta}$. ἄρα $B\Pi = \alpha - \frac{\alpha\chi}{\beta}$. ἀλλ' ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΠMB (ὑποτιθεμένης $BM = \psi$) ἔςι $\psi^2 = \overline{\eta\mu.\chi^2} + (\alpha - \frac{\alpha\chi}{\beta})^2$, εἴτ' ȣ͂ν $\alpha^2\psi^2 = \alpha^2 . (\eta\mu.\ \chi)^2 + (\beta\alpha - \alpha\chi)^2$.

329. Ἐν δὲ τῇ Δεινοςρατείῳ (σχ. 157) ἀγομένης τῆς ιΓ παραλλήλως τῇ ΜΒ, ἔςαι ΝΟ $=$ ημ. χ, ϗ ιΒ $=$ συνημ. χ, ϗ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi = \beta\upsilon$ πρόεισιν $\upsilon = \text{AN} = \frac{\alpha\chi}{\beta}$· ἀλλ' ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΒιΓ, ΒΟΝ, ἔςι Βι : ΒΓ :: ΒΝ : ΒΟ, εἴτ' ἦν συνημ. $\chi : \alpha :: \alpha - \frac{\alpha\chi}{\beta} : \psi$, ὑποτεθείσης ΒΟ $= \psi$· ἄρα $\psi = \frac{\beta\alpha^2 - \alpha^2\chi}{\alpha \,.\, \text{συνημ.}\,\chi}$. ϗ αὕτη δὲ ἡ ἐξίσωσις ἐδόλως συντελεῖ πρὸς εὕρεσιν τῦ σημείυ ξ· ἐὰν γὰρ γένηται $\chi = \beta$, ἔςαι $\psi = \frac{\alpha \,.\, \beta^2 - \alpha^2 \,.\, \beta}{o} = \frac{o}{o}$, ἐξίσωσις ἐδενὸς σημαντική· ὃ δείκνυσιν ἀδύνατον τὴν γεωμετρικὴν εὕρεσιν τῦ σημείυ Ο.

330. Ἡ Κογχοειδής. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΡΣ (σχ. 159) πρὸς ὀρθὰς ςαθῇ εὐθείᾳ τῇ ΘΖ, ϗ ἐκ τῦ Ρ ἑκατέρωσε τῆς ΟΣ ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ἀσυγχύτως, καὶ ληφθῇ ἐφ' ἑκάςης εὐθείας ὕπερθεν τῆς ΘΓ μέρος τι ἴσον τῇ ΟΣ, ἐκ τῦ σημείυ, καθ' ὃ αὕτη τὴν ΘΓ τέμνει, ἀρχόμενον, ϗ ἐπ' εὐθείας πρὸς τὰ ἄνω ἐπεκτεινόμενον, τὰ μέρη ταῦτα τὰ ἴσα ἕκαςον τῇ ΟΣ, ἐγχαράξυσι σημεῖα τὰ Κ, Κ, ἃ ἡ ἐπιζευγνῦσα καμπύλη, καλεῖται κογχοειδής· ἀλλὰ γὰρ δῆλον τῶν ΚΙ ἀεὶ μᾶλλον ϗ μᾶλλον πλαγιαζομένων ἐπὶ τῆς ΖΘ, μηδέποτε δὲ αὐτῇ παραλλήλων γινομένων, οἱ δύω κλῶνες τῆς καμπύλης, ἐπ' ἄπειρον μὲν προσπελάσυσι τῇ ΖΘ, ἐδέποτε μέντοι αὐτῇ συμπεσῦνται· ἄρα ἡ ΖΘ ἀσύμπτωτός ἐςι ταύτης τῆς καμπύλης.

331. Ἡ Σπεῖρα. Διῃρήσθω κύκλος τε ὁ ΒΓΙ (σχ. 160), ϗ ἡ αὐτῦ ἀκτὶς ΑΓ εἰς ὁσαδήποτε ἰσάλληλα μέρη· ϗ ἤχθωσαν ἀκτῖνες πρὸς πάντα τὰ τῆς διαιρέσεως

τῦ κύκλυ σημεῖα, ϗ μετηνέχθω ἐκ τῦ Α ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΑΔ, τὴν προσεχῆ τῆς ΑΓ, ἓν τῶν ἰσαλλήλων μερῶν τῆς ΑΓ, ϗ δύω ἐπὶ τὴν ἑξῆς ΑΕ, ϗ τρία ἐπὶ τὴν τρίτην, ϗ ὕτως ἐφεξῆς ἕως τῆς ΑΓ, ἐφ' ἣν μετενεχθήσονται πάντα τὰ ἰσάλληλα αὐτῆς μέρη, εἴτ' ὖν αὐτὴ ἡ ΑΓ ἐφ' ἑαυτήν· ὖκῦν ἡ τὰ ὕτως εὑρεθέντα ἐπὶ τῶν ἀκτίνων σημεῖα ἐπιζευγνῦσα καμπύλη καλεῖται σπεῖρα, καὶ Ἕλιξ Ἀρχιμήδειος· ἐὰν δὲ διπλασιασθείσης τῆς ἀκτῖνος ΑΓ = ΑΡ, γραφῇ ἄλλος κύκλος ὁ ΡΤΟ, ϗ προαχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ἐς τὴν αὐτῦ περιφέρειαν, ϗ ἐπὶ τῆς ΑΟ μετενεχθῇ ΑΓ + 1, ἐπὶ δὲ τῆς ΑΚ, ΑΓ + 2, κτ, προκύψει ἡ συνέχεια τῆς σπείρας ΑΜΓ ἐκ τῆς καινῆς καμπύλης ΓΧΡ· ἡ δὲ ὅλη σπεῖρα κληθήσεται διπλῆς περιελίξεως· ἐὰν δὲ τριπλασιασθῇ ἡ ΑΓ ἀκτὶς, γεννηθήσεται σπεῖρα τριπλῆς περιελίξεως ϗ ὕτως ἑξῆς· ἐὰν δὲ κληθῇ ΑΓ = α, ἡ δὲ περιφέρεια ΒΓΙ = π, ἓν δέ τι κυκλικὸν τμῆμα = χ, ἓν δέ τι τῆς ἀκτῖνος τμῆμα = υ, ἐκ τῆς ἰδιότητος τῆς σπείρας προκύψει $υ : α :: χ : π$, ὅθεν $υπ = αχ$, ἐξίσωσις τῆς σπείρας.

Δυνάμεθα δὲ ἐννοῆσαι τὴν σπεῖραν ὡς γραφομένην ἐπὶ τῦ Γ ὑπὸ σημείυ τῦ Α, κινυμένυ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΑΓ ἐκ τῦ Α ταχυτῆτι τῇ αὐτῇ, ᾗ κινεῖται τὸ πέρας Γ τῆς ἀκτῖνος ΑΓ, περιφερομένης κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον περὶ τὴν περιφέρειαν.

Α'. Ἐὰν ὑποτεθῇ $υ^μ : α^μ :: χ^ν : π^ν$, πορισθήσεται ἐντεῦθεν $π^ν υ^μ = α^μ χ^ν$, ἐξίσωσις τῶν παντὸς γένυς σπειρῶν· αὗται δὲ αἱ σπεῖραι παραβολικαὶ μὲν, εἰ μ ϗ ν ἀριθμοὶ εἶεν ὑπαρκτικοὶ, ὑπερβολικαὶ δὲ, εἰ λειπτικοὶ, προσαγορεύονται· τῶν δὲ π, α, χ, υ εὐθείας ἐμφαινόντων, παραβολῶν μὲν ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, ὑπερβολῶν δ' ἐν τῇ

δευτέρᾳ, ἡ ἐξίσωσις ἔσαι· ὑποτίθεται δὲ ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἄτερος τῶν ἐκθετῶν ὁ μ, ἢ ὁ ν τῆς μονάδος διαφέρων· ἐὰν δ' ὑποτεθῇ $\mu = +1$, καὶ $\nu = -1$, καὶ γένηται $\alpha\pi = \beta^2$, πορισθήσεται $\upsilon\chi = \beta^2$, ἐξίσωσις ἐμφαίνουσα σπεῖραν ὑπερβολικὴν (καθάπερ κοινῶς ἅπαντες αὐτὴν ὀνομάζουσι)· ὅθεν $\upsilon = \frac{\beta^2}{\chi}$· ὑπὲρ ἄλλης ἄρα τεταγμένης υ^{I}, ἀποφέρεται $\upsilon^{\text{I}} = \frac{\alpha^2}{\chi^{\text{I}}}$· οὐκοῦν $\upsilon : \upsilon^{\text{I}} :: \frac{\alpha^2}{\chi} : \frac{\alpha^2}{\chi^{\text{I}}} :: \frac{1}{\chi} : \frac{1}{\chi^{\text{I}}} ::$ $\chi^{\text{I}} : \chi$, τοῦτ' ἔσιν, ἐν ταύτῃ τῇ καμπύλῃ αἱ τεταγμέναι ἀντιπεπόνθασι ταῖς ἀποτετμημέναις· ἀλλ' αἱ ἀποτετμημέναι εἰσὶ κυκλικαὶ καὶ ἀνάλογοι τῇ γωνίᾳ τῇ γραφομένῃ ὑπὸ τοῦ σημείου Γ, ἐν ᾧ κινεῖται ἡ ἀκτὶς ΑΓ (ἀνωτ.)· ἐν ἄρα τῇ ὑπερβολικῇ σπείρᾳ αἱ τεταγμέναι εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντισρόφῳ τῶν περιόδων, τοῦτ' ἔσιν, ἐὰν δὶς ἡ ἀκτὶς περιενεχθῇ, ἡ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ τεταγμένη διπλασία ἔσαι τῆς ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀκτῖνος, καὶ ἑπομένως ἡ γωνίᾳ ὑποδιπλασίᾳ συσοιχοῦσα ἀκτὶς διπλασία ἔσαι ἀκτῖνος συσοιχούσης διπλασίᾳ γωνίᾳ· ἐὰν γὰρ ἐπινοηθῇ τόξον μοιρῶν 300, δυνάμεθα συλλαβεῖν τῷ νοΐ, ὅτι γραμμὴ εὐθεῖα περιήνεκται περὶ τὸ κέντρον τοῦδε τοῦ τόξου, καταγράφουσα διὰ τοῦ πέρατος αὐτῆς τόδε τὸ τόξον, εἴτ' οὖν τόξον ἴσον τριπλασίῳ τόξου 100 μοιρῶν, ταὐτὸν εἰπεῖν, τόξα πλείω, ἃ ἅμα δύνανται μοίρας 300· ἐὰν δὲ τὸ καταγραφὲν τόξον ᾖ $360° + 100 = 460°$, καταμετρήσει ὡρισμένον ἀριθμὸν γωνιῶν, αἳ ἅμα δύνανται 460°, ὧν τὸ ἄθροισμα καλεῖται γωνία 460° κτ.

Ἵνα δὲ γραφῶσιν αἱ σπεῖραι, εὑρεῖν ἀνάγκη τὴν δύναμιν τοῦ ἑκάσῃ ἀκτῖνι συσοιχοῦντος τόξου· μεθ' ὃ ῥᾷστα καταγράφονται διὰ τῶν σημείων, ὡς εἰ καὶ εἴησαν καμπύλαι

γεωμετρικαί· τοσέτῳ δὲ ἀκριβέςερον, ὅσῳ ἄν τις λάβοι ἀκριβέςερον τὰς τῶν δε τῶν τόξων δυνάμεις.

Β΄. Ἐμφαινέτω σ γωνίαν ὁποιανῦν, ἢ τὸ ταύτην μετρῦν τόξον, ῦ ἡ ἀκτὶς $= 1$· Καμπύλη ὖν, ἣν παρίςησιν ἡ ἐξίσωσις $\sigma = \nu . \Lambda . \frac{\upsilon}{\alpha}$ καλεῖται σπεῖρα λογαριθμική· ἐφ' ἧς (σχ. Β. 160) αἱ περὶ τὸ Κ γωνίαι σ, ἢ τὰ τόξα τῆς περιφερείας, ἧς ἀκτὶς $= 1$, ἀνάλογα ὄντα ταῖς γωνίαις σ, εἰσὶν ἀνάλογα τοῖς λογαρίθμοις τῶν ἀκτίνων υ· ἐὰν τοίνυν ὑποτεθῇ $\nu = \iota = \alpha$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\sigma = \lambda . \upsilon$· ὑποτιθεμένων ἄρα τῶν γωνιῶν σ, ἢ τῶν περὶ ὧν εἰρήκαμεν τόξων, ἐν προόδῳ ἀριθμητικῇ, αἱ συςοιχῦσαι αὐταῖς ἀκτῖνες (ἃς ἐμφαινέτωσαν αἱ ΚΑ, Κν, ΚΒ κτ.) ἔσονται ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ· ἐὰν δὲ ΚΑ ἐμφαίνῃ τὴν ἀκτῖνα (ἢ ὑποτέθειται $= 1$) τῦ γεννήτορος κύκλυ, κατάδηλον ὡς ἐπ' αὐτῆς δυνατόν ἐςι λαβεῖν ἄπειρα μέρη κατὰ γεωμετρικὴν φθίνυσαν πρόοδον· ὥςε ἡ καμπύλη ἀπείρυς ποιήσει περιόδυς περὶ τὸ σημεῖον Κ, ἕως ἂν αὐτῦ τῦ σημείυ ἐφίκηται· δυνατὸν δὲ ὑποθεῖναι τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, Κμ, κτ. καὶ κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν αὔξυσαν.

332. Ἐναρίθμιος δὲ φέρεται καμπύλαις ταῖς ὑπαρβατικαῖς καὶ ἡ Κυκλοειδὴς, ἧς ἡ ἐπὶ τῶν τεχνῶν ἐφαρμογὴ ἐγνώρισε ταύτην ἅπασιν ἐν τοῖς νῦν χρόνοις· ἐὰν κύκλος ὁ ΒΔΕ (σχ. 161) ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ περικυλισθῇ, ἀρχόμενος ἐκ τῦ Α, τὸ αὐτῦ σημεῖον Ζ, ὃ ἦν ἐν ἀρχῇ κατὰ τὸ Α, ἐν τέλει δὲ εὕρηται κατὰ τὸ Γ, ἐν ταύτῃ τῇ περικυλίσει καταγράψει καμπύλην τὴν ΑΔΓ, ἥτις ἀκύει Κυκλοειδής· καὶ ἡ μὲν ΒΔ εὐθεῖα ἄξων

αὐτῆς καλεῖται· ἡ δὲ ΑΓ, βάσις· ὁ δὲ ΒΔΕ κύκλος, γεννήτωρ κύκλος.

Τοιγαροῦν α΄. ἡ ΑΓ ἴση ἐςὶ τῇ ὅλῃ περιφερείᾳ τοῦ γεννήτορος κύκλου, ἡ δὲ ΑΒ τῇ αὐτοῦ ἡμιπεριφερείᾳ· β΄. ὑπόδειγμα ἁπλούςατον τῆς κυκλοειδοῦς ἐςὶν ἡ περιαγωγὴ τοῦ τῆς ἁμάξης τροχοῦ, περιφερομένου ὁλοσχερῶς ἐπί τι ἐπίπεδον· γ΄. ἵν' ἐπὶ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ κυκλοειδὴς καταγραφῇ, κατακλιθήτω τὸ τοῦ ΒΕΔ κύκλου ἐπίπεδον ἐπὶ τὸ δεδομένον ἐπίπεδον, καὶ τῇ περιφερείᾳ αὐτοῦ προσηλώσθω ἧλος σμικρὸς ἐξ' ὕλης ςερεᾶς, οἷα καταγράφειν σημεῖα ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, καὶ κινηθήτω ὁ κύκλος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐπακουμβῶν κανόνι, ἵνα μὴ ἡ κίνησις αὐτοῦ διαςραφῇ· καὶ δὴ ἐκ τῆς ὁλοσχεροῦς τοῦ κύκλου περιαγωγῆς γραφήσεται ἐκ τοῦ μικροῦ ἥλου ἡ κυκλοειδής.

333. Ὑποτεθείσθω ἤδη ὁ γεννήτωρ κύκλος ΒΕΔ ἐν τῇ θέσει ΖΜ, καὶ ἤχθω ἡ ΖΟΡ παράλληλος τῇ ΑΒ· σαφὲς οὖν ὅτι τὸ τόξον ΖΙΜ ἔςιν ἴσον τῷ τόξῳ ΟΒχ (Γεωμ. 169)· καὶ ἔτι τόξον τὸ ΖΙΜ ἴσον ἐςὶ τῇ εὐθείᾳ ΑΜ, ἧς τοῖς σημείοις ἐκ διαδοχῆς ἐφηρμόσθησαν τὰ σημεῖα τοῦ ΖΙΜ· ἄρα ΟΒχ = ΑΜ· ἄρα καὶ ΔΟ = ΜΒ (ἐπεὶ τὸ ὅλον τόξον ΒΟΔ = ΑΒ)· ἀλλὰ ΜΒ = ΖΟ (καὶ γὰρ ΖΜ = ΟΒ (Γεωμ. 47)), καὶ ἐν δυσὶ παραλλήλαις κείμεναι· ἄρα τὸ ΖΟΜΒ ἔςι παραλληλόγραμμον· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΟ ἴση ἐςὶ τῷ τόξῳ ΔΟ.

Ἐπεὶ δὲ ΟΡ ἔςιν ἡμίτονον τοῦ ΔΟ τόξου (Γεωμ. 482), ἡ ὅλη εὐθεῖα ΖΟΡ ἔςαι ἴση τῷ ἀθροίσματι τοῦ τόξου ΔΟ, καὶ τοῦ ἐν αὐτῷ ἡμιτόνου.

„Τουτέςιν ἰδιότης γενικὴ τῆς κυκλοειδοῦς ἐςὶ, τεταγ-
„μένην πᾶσαν τὴν ΖΡ ἰσοῦσθαι τῷ κατὰ τὸν γεννήτορα
„κύκλον ἐπὶ τοῦ ἄξονος γεγραμμένον τόξῳ, ἀπολαμβανο-

„μένῳ ὑπό τε τῆς τεταγμένης, ϗ τῆς κορυφῆς Δ, συνά-
„μα τῷ ἡμιτόνῳ ΟΡ τᾶδε τᾶ τόξȣ.

Ἔςω ἂν υ τεταγμένη ἡ ΖΡ, ϗ χ τὸ ἐναπολαμβανόμενον τόξον ΔΟ· θηρευθήσεται ἂν ἐντεῦθεν υ = χ + ημ. χ, ἐξίσωσις τῆς κυκλοειδᾶς.

334. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πᾶσα εὐθεῖα Εξ παράλληλος τῇ ΒΓ, περιεχομένη ὑπὸ τῆς καμπύλης ϗ τᾶ γεννήτορος κύκλȣ ΒΔΕ, ἰσᾶται τῷ τόξῳ ΔνΕ, τῷ ταύτῃ ἀντιςοιχᾶντι· ϗ γὰρ υ = Ρξ = χ (= ΔνΕ) + ἡμ. χ (=ΡΕ)· ἄρα Εξ = ΔνΕ.

335. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ τῆς κυκλοειδᾶς καθ' ἓν δεδομένον σημεῖον ξ ἁπτομένη Πξ παράλληλός ἐςι τῇ χορδῇ ΔΕ, τῇ ἀπολαμβανομένῃ ὑπὸ τῆς κορυφῆς Δ τῆς κυκλοειδᾶς ϗ τᾶ κατὰ τὸν γεννήτορα κύκλον σημείȣ Ε, τᾶ ἀντιςοιχᾶντος τῷ τῆς ἀφῆς σημείῳ ξ.

ΔΕΙΞΙΣ α΄. Ἤχθω Εξ παράλληλος τῇ ΒΓ· φημὶ ἂν ὡς Εξ ἴση ἐςὶ τῷ ΕΠ μέρει τῆς τᾶ κύκλȣ κατὰ τὸ Ε ἁπτομένης, τῷ ὑπὸ τᾶ Ε ϗ τᾶ σημείȣ, καθ' ὃ συναντᾷ τῇ Πξ ἁπτομένῃ, ἀπολαμβανομένῳ· ἔςω γὰρ ἑτέρα παράλληλος τῇ Εξ ἀπείρως ἐγγὺς ἡ Στ· τὰ ἂν τόξα ξΣ, Ετ ἐκληφθῆναι δύνανται ὡς εὐθεῖαι, ϗ ὡς μέρη ἐλάχιςα τῶν ἁπτομένων ΠΕ, Πξ· ἐκ δὲ δὴ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΠΕξ, ΠτΣ πρόεισιν Εξ : τΣ :: ΕΠ : τΠ· ἄρα Εξ — τΣ : Εξ :: ΕΠ — τΠ : ΕΠ· ἀλλὰ Εξ — τΣ = ΔΕ — Δτ (ἢ τΕ) (334) ϗ ΕΠ — τΠ = τΕ· ἄρα τΕ : Εξ :: τΕ : ΕΠ, ἢ τΕ : τΕ :: Εξ : ΕΠ· ἄρα α΄. Εξ = ΕΠ· β΄. ἐκ τέτȣ ἡ ΔΕ παράλληλός ἐςι τῇ Πξ.

Ἐν γὰρ τῷ τριγώνῳ ΠΕξ ἔςιν ἡ ὑπὸ Π = ξ διὰ τὰς ὑπ' αὐτὰς ὑποτεινέσας ἴσας πλευρὰς, ὡς ἤδη δέδεικται· ἄρα Σ = Π (Γεωμ. 132), ϗ ἡ ἐκτὸς γωνία ΠΕυ

ἰσῦται ταῖς γωνίαις Π + ξ (216), ἢ = 2Π· ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΠΕυ μέτρον ἔχει τὸ τόξον $\frac{\text{ΕΔυ}}{2}$ (Γεωμ. 184) ἢ τὸ ΔτΕ· ἡ δὲ γωνία ΠΕΔ ἔχει μέτρον τὸ τόξον $\frac{\text{ΔτΕ}}{2}$· ἄρα ἡ ὑπὸ ΠΕυ = 2 ΠΕΔ· ἄρα 2 Π = 2 ΠΕΔ ϰ Π = 1 ΠΕΔ· ἄρα ἡ ἁπτομένη Πξ παράλληλός ἐςι τῇ χορδῇ ΔΕ (Γεωμ. 137) Ο. Ε. Δ.

336. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵνα τοίνυν ἁπτομένη ἀχθῇ καθ' ἓν δεδομένον σημεῖον ξ, γενέσθω παράλληλος ἡ Εξ τῇ ΒΓ, ϰ ἐπεζεύχθω ἡ χορδὴ ΔΕ, ϰ διὰ τῦ ξ διήχθω αὐτῇ παράλληλος ἡ ξΠ, ἥτις ἔςαι ἡ ἐπιταχθεῖσα ἁπτομένη.

337. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἡ ἡμιπεριφέρεια τῦ γεννήτορος κύκλυ ΔΒ κληθῇ α, ἡ δὲ ἡμίσεια βάσις ΒΑ = β, ϰ ΔΟ = χ, ϰ ΟΖ = υ· δῆλον ἐκ τῶν εἰρημένων (332, 335), ὡς ἔςαι α : β :: χ : υ, ὅθεν αυ = βχ, ἐξίσωσις ἑτέρα τῆς κυκλοειδῦς· ἐὰν δὲ γένηται $α^μ : β^ν :: χ^μ : υ^ν$, εὑρεθήσεται $α^μυ^ν = β^νχ^μ$, ἐξίσωσις γενικὴ παντὸς γένυς κυκλοειδῦς.

338. Ἐὰν νῆμα τὸ ΒΑΕ (σχ. 162) ἰσόμηκες καμπύλῃ τῇ ΒΑΕ, ἐφηρμοσμένον αὐτῇ, ἀποχωρίζηται ἐπ' αὐτῆς, τὸ πέρας αὐτῦ Ε καταγράψει γραμμὴν τὴν ΕΓΘ, ἥτις καλεῖται ἐξειλιγμένη, ἡ δὲ ΒΑΕ ἐνειλιγμένη ἀκύει.

Ἄρα α΄. πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, καθ' ἃς φέρεται ἐκχωριζόμενον τὸ νῆμα (καλῦνται δὲ φιλῦσαι ἡμιδιάμετροι), ἁπτόμεναί εἰσι τῆς ἐνειλιγμένης ΒΑΕ· διὰ γὰρ τὴν καμπὴν ἡ καμπύλη ΒΑΕ ὐδὲν ἄλλο κοινὸν τῇ ΑΓ εὐθείᾳ σημεῖον ἔχει, ἢ τὸ Α.

β΄. Κάθετος ἡ ΜΓ ἐπὶ τοῦ πέρατος τῆς φιλούσης ἡμιδιαμέτρου ἐστὶ προδήλως ἀπτομένη τῆς ἐξειλιγμένης· εἴγε ἀπτομένη ἐν γένει ἐστὶν ἡ φορά, ἣν φέρεται τὸ γεννητικὸν σημεῖον ἐν τῷ ἀπογεννᾷν τὴν καμπύλην πρὸς ἕν τι δεδομένον σημεῖον αὐτῆς τῆς καμπύλης· ἀλλὰ ΜΓ ἐστὶ προδήλως φορά, ἣν φέρεται τὸ γεννητικὸν σημεῖον Ε πρὸς τὸ σημεῖον Γ· ἐντεῦθεν ἄρα πᾶσαι αἱ τῆς ἐξειλιγμένης ἀπτόμεναι ΜΓ κάθετοί εἰσι ταῖς τῆς ἐνειλιγμένης ἀπτομένης ΑΓ, καὶ τἀνάπαλιν.

γ΄. Πᾶσα φιλοῦσα ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῷ τόξῳ ΑΕ, ἀφ᾽ οὗ ἀποχωρίζεται.

339. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ ἐξειλιγμένη ΒΖ ἐστιν ἡμικυκλοειδής, ἐξισουμένη τῇ ἐνειλιγμένῃ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΓ (σχ. 163).

ΔΕΙΞΙΣ α΄. Εἰλήφθω φιλοῦσα ἡμιδιάμετρος Ρϱ ἡ καὶ τῆς ΒΓ ἀπτομένη, καὶ ἤχθω ΡΟ παράλληλος τῇ ΒΕ· ἡ τοίνυν χορδὴ ΒΟ παράλληλος ἔσεται τῇ Ρϱ (*)· ἄρα ἡ ὑπὸ Βνϱ = ΟΒν (Γεωμ. 133)· γραφέντος οὖν ἐπὶ τῆς καθέτου νΤ = ΕΖ = ΕΓ ὡς ἐπὶ διαμέτρου, κύκλου τοῦ νϱΤ, ἔσαι τὸ τόξον νϱ = ΒΟ· καὶ γὰρ ἡ γωνία Βνϱ μετρεῖται τῷ τόξῳ $\frac{\nu\varrho}{2}$ (Γεωμ. 184)· ἡ δὲ γωνία ΟΒν μετρεῖται τῷ τόξῳ $\frac{BO}{2}$· ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ Βνϱ = ΟΒν, ὡς ἤδη ἐφάνη· ἄρα $\frac{\nu\varrho}{2} = \frac{BO}{2}$· ἄρα νϱ = ΒΟ.

(*) Τὸ γὰρ *Β* κορυφή ἐστι τῆς ἡμικυκλοειδοῦς *ΒΡΓ*, καὶ *Ρϱ* ἔστιν αὐτῆς ἀπτομένη, καὶ *ΒΟ* ἐστὶ χορδή, ἐναπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς κορυφῆς *Β*, καὶ τοῦ κατὰ τὸν γεννήτορα κύκλον σημείου *Ο*, ὃ συστοιχεῖ τῷ τῆς ἀφῆς σημείῳ *Ρ*· ἄρα (335) *ΒΟ* παράλληλός ἐστι τῇ *Ρϱ*.

β΄. Παρὰ ταῦτα, ἐπεὶ ΟΡ παράλληλος τῇ Βν (ἐκ κατασκευῆς) ϗ ΒΟ τῇ Ρν παράλληλος (335), ἄρα Βν = ΟΡ (Γεωμ. 236) = τῷ τόξῳ ΒΟ (334) = τῷ τόξῳ νϱ (ἀνωτ. α΄.)· γραφέντος ἓν ἐπὶ τῆς ΕΖ τᾶ κύκλᾳ ΕβΖ, ϗ ἀχθείσης ϱβ παραλλήλᾳ τῇ Βν, ἔσονται ἴσα τὰ τόξα νϱ, βΕ (Γεωμ. 169)· ἄρα τᾶ Βν ἰσᾳμένᾳ τῷ τόξῳ νϱ, ϗ ἑπομένως τῷ βΕ, νΕ ἰσωθήσεται τῷ τόξῳ βΖ (ἐπεὶ ΒνΕ ἰσᾶται τῷ ὅλῳ τόξῳ ΕβΖ, 332)· ἀλλὰ, διὰ τὰς ἴσας χορδὰς νϱ, βΕ (Γεωμ. 47) ϗ ἐν δυσὶ παραλλήλαις κειμένας, ἔςαι τὸ ϱνΒΕ παραλληλόγραμμον· ἄρα ϱβ = νΕ = τῷ τόξῳ βΖ, ϗ ϱυ = βΖ σὺν τῷ βυ, ὅ ἐςι προφανῶς ἡμίτονον τᾶ βΖ τόξᾳ· ἐπεὶ ἄρα, γενομένης ϱυ = υ, ϗ τᾶ τόξᾳ βΖ = χ, ἔςαι υ = χ + ἡμ. χ, ἐξίσωσις τῆς κυκλοειδᾶς (333)· τὸ ἄρα σημεῖον ϱ τᾶ κύκλᾳ ϱΤν ἐπανήκει ἀναμφιβόλως τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ, ἧς ἐςι γεννήτωρ ὁ ΕβΖ κύκλος.

Φημὶ δὴ τέλος, ὡς πρὸς τῷ ϱ ἐςὶν ἡ ἡμιδιάμετρος ϱΡ κάθετος τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ, τῇ ἀπογεννηθείσῃ ὑπὸ κύκλᾳ γεννήτορος τᾶ ΕβΖ· καὶ γὰρ ἀχθείσης τῆς ϱΤ παραλλήλᾳ τῇ χορδῇ βΖ, ϱΤ ἔςαι ἁπτομένη τῆς καμπύλης κατὰ τὸ ϱ (335)· ἀλλ᾽ ἐκ τῶν παραλλήλων ϱν, βΕ, ϗ ϱΤ, βΖ, ἡ ὑπὸ Τϱν = τῇ ὀρθῇ (Γεωμ. 180) ΖβΕ· ἄρα ϱΤ κάθετός ἐςιν ἐπὶ τᾶ ϱ τῇ ἁπτομένῃ ϱΤ, ϗ δὴ ϗ τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ, κατὰ τὸ ϱ, ὅ ἐςιν ἀρχὴ ταύτης τῆς ἁπτομένης.

Τῆς ἡμιδιαμέτρᾳ ἄρα Ρϱ πρὸς τὸ δοκᾶν εἰλημμένης, δυνατὸν εἰπεῖν ἐν γένει, ὡς ἅπασαι αἱ ἡμιδιάμετροι τῆς ἐνειλιγμένης εἰσὶ κάθετοι τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ· ἔσονται ἄρα κάθετοι ϗ τῇ ζητᾳμένῃ ἐξειλιγμένῃ· ϗ γὰρ ἡ ἑκάςης ἡμιδιαμέτρᾳ φορὰ Ρϱ ἔςι προδήλως κάθετος τῇ

φορᾷ τȣ̃ πέρατος ρ ἐν ἑκάςῳ καταλειπομένῳ ἴχνει εἰς ςοιχεῖον τῆς ἐξελιγμένης (338)· παρὰ δὲ ταῦτα, δύω καμπύλαι, κοινὸν ἔχȣσαι σημεῖον τὸ Β, ȣ̓ δύνανται ἔχειν κοινὰς τὰ καθέτȣς (*)· τῆς ἄρα ἐξειλιγμένης ΒΓ κοινὸν ἐχȣ́σης σημεῖον τὸ Β τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ τῇ ὡς παρὰ τȣ̃ κύκλȣ ἀπογεννηθείσῃ, ΒΖ ἔςαι καμπύλη ἐξειλιγμένη τῆς ΒΓ· ἄρα ἡ ἐξειλιγμένη ἁπάσης ἡμικυκλοειδȣ̃ς ἔςιν ἑτέρα ἡμικυκλοειδὴς, ἀκριβῶς ἴση τῇ ἐνειλιγμένῃ. Ο. Ε. Δ.

340. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἡ χορδὴ ρν = ΒΟ (Γεωμ. 47), ϗ διὰ τὸ ΒΟΡν παραλληλόγραμμον, ἡ χορδὴ ΒΟ = Ρν· ἔςιν ἄρα Ρρ = 2ΒΟ. Ρρ = τῷ τόξῳ ΒΡ· ἄρα ΒΡ = 2ΒΟ, τȣτέςιν ἐν γένει „πᾶν τόξον κυκλοειδȣ̃ς „τὸ ΒΡ διπλȣ̃ν ἐςὶ τῆς ἀντιςοιχȣ́σης ΒΟ χορδῆς τȣ̃ γεν„νήτορος κύκλȣ· ἄρα ὅλη ἡ ἡμικυκλοειδὴς, ἔχȣσα χορδὴν „ἀντίςοιχον τῇ διαμέτρῳ ΖΕ τȣ̃ γεννήτορος κύκλȣ, ἔσε„ται διπλῆ ταύτης τῆς διαμέτρȣ· ἄρα ὅλη ἡ κυκλοει„δὴς ΒΖΘ ἴση ἐςὶ τῇ τετραπλῇ διαμέτρῳ τȣ̃ γεννήτο„ρος κύκλȣ.“

341. ΠΟΡΙΣΑΑ Β΄. Ἐὰν ὦσι δύω ἀντίθετοι ἴσαι κυκλοειδεῖς ΤΒ = ΓΘ, ϗ ἐκκρεμὲς σῶμα, προσδεδεμένον τῷ Ζ πέρατι τȣ̃ νήματος ΓΖ, ἀποκινῆται ἐκ τȣ̃ Β ἐπὶ τὸ Θ, διαδραμεῖται προδήλως ἐς μὲν τὸ Ζ ἐξειλιγμένην ΒΖ· εἶτα ἐνειλισσόμενον τῇ ΓΘ, διαδραμεῖται τὴν ΘΖ ἐξειλιγμένην τῆς ΓΘ· τὸ ἄρα ἐκκρεμὲς Ζ διανύσει την ὅλην κυκλοειδῆ ΒΖΘ.

(*) Ἵνα γὰρ ὦσι δύω διάφοροι καμπύλαι, ἐπάναγκες τὰ δύω γεννητικὰ αὐτῶν σημεῖα, ἀποχωρήσαντα τȣ̃ κοινȣ̃ σημείȣ *Β*, κατὰ διαφόρȣς κινηθῆναι φοράς· ὅθεν ἡ θατέρα κάθετος ȣ̓κ ἔτι ἔσεται τȣτὶ ϗ θατέρα.

342. ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰ ἄρα τὸ ὡρολογίου τινὸς ἐκκρεμὲς ἠδύνατο ἐφαρμόζεσθαι μεθ' ἑκάστην ἀναλίκνησιν ἐπὶ τῶν τόξων ΓΘ, ΓΒ τῶν κυκλοειδῶν, σφαιρίδιον τὸ προσδεδεμένον τῷ αὐτοῦ πέρατι Ζ καταγράψει τὴν κυκλοειδῆ ΘΖΒ· ἀλλὰ γὰρ, ὡς ἐν τῇ Φυσικῇ δειχθήσεται, αἱ ἀναλικνήσεις ἐκκρεμοῦς, κυκλοειδῆ καταγράφοντος, εἰσὶν ἰσόχρονοι, τουτέστιν ἴσον διαρκοῦσιν, ὅσῳ ἂν μείζους, ἢ ἐλάττους, γένωνται· τοῦτο δὲ ἀνακεκάλυπται πρὸς τῷ τέλει τοῦ 17 αἰῶνος ὑπὸ τοῦ περικλεοῦς Οὐγενίου· καὶ ἐδόκει γενέσθαι ἤδη ἡ τελειότης τῶν ὡρολογίων· ἀλλ' ἡ δυσχέρεια τοῦ ἀκριβῶς ἐφαρμόζεσθαι τοῖς κυκλοειδέσι τόξοις τὰ μεταλλικὰ νήματα, αἱ διάφοροι ὑψώσεις, αἱ ἐν καιροῖς ποικίλοις φωραθεῖσαι, τὸ ἐπικαμπὲς μέρος τοῦ ἐκκρεμοῦς, ὃ τοῖς τόξοις ἐφηρμόζετο, ἀπέδειξαν κυκλικὰς τὰς ἀναλικνήσεις.

Ἀλλὰ καὶ τούτων οὕτως ἐχόντων, τόξον μέντοι κύκλου τοῦ ΕβΖ τὸ Ζ, ὃ εἴη τριῶν, ἢ τεσσάρων, μοιρῶν, συμπίπτει ὡς πρὸς αἴσθησιν τῇ κυκλοειδεῖ ΒΖΘ· καθισταμένου ἄρα ἄλις ἐπιμήκους τοῦ ἐκκρεμοῦς τῶν ὡρολογίων, οὗ αἱ ἀναλικνήσεις εἶεν φυσικῶς κυκλικαὶ, ἔσονται αἱ ἀναλικνήσεις αὗται ὡς πρὸς αἴσθησιν ἰσόχρονοι, ὡς λίαν σμικραί· κατὰ τοῦτον ἄρα τὸν τρόπον ἱκανῶς ἐτελειοποιήθησαν τὰ ὡρολόγια· καὶ οὕτως ἄρα καμπύλη εὑρεθεῖσα τὸ κατ' ἀρχὰς ἐκ μόνης ἁπλῆς περιεργείας καὶ διατριβῆς, ὡς καταγραφομένη ἐκ τῶν τροχῶν τῶν ἁμαξῶν, καθάπερ ἤδη εἴρηται, τέχνας πρὸς τελειότητα ἀποβλέπειν παραίτιος ἐγένετο. Ἀλλὰ περὶ τούτων ἐροῦμεν καὶ ἐν τῇ Μηχανικῇ.

ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΩΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΘΕΩΡΟΥΜΕΝΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΟΣ.

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τοῦ Λογισμοῦ τῶν Ἀπειροστῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τοῦ, ὅπως τὰ ἀπειροστὰ εὑρίσκονται.

1. Ἐὰν ποσότης ἡ χ μέρει ἑαυτῆς ἀπειροστῷ αὐξηθῇ, καὶ εἶτα ἡ χ πρὸς τὴν οὕτως αὐξηθεῖσαν χ παραβληθῇ, ἡ παράθεσις αὕτη ἐκτεθήσεται οὕτω $\chi : \chi + \frac{\chi}{\infty}$.

Σαφὲς οὖν ἐστιν, ὡς ἡ διαφορὰ τῆς πρώτης καταστάσεως τῆς χ πρὸς τὴν δευτέραν ἐστι $\frac{\chi}{\infty}$· ταύτην δὲ τὴν διαφορὰν ἐξέστω σημῆναι διὰ δχ, ἔκθεσις, ἣν ἀπαγγελοῦμεν οὕτως: ἡ διαφορὰ τῆς ἁπλῆς ποσότητος χ, ᾗ διαφέρει ἑαυτῆς, ἀπειροστῷ τινι μέρει προσαυξηθείσης· α΄. οὖν οὐκ ἐκληπτέον ταύτην τὴν ἔκθεσιν ὡς δ × χ (Συμ. Λογ. 11)· ἀλλὰ μόνον ὡς διαφορὰν τῆς χ, ᾗ διαφέρει τῆς χ, ἀπειροστὸν ἐπαυξηθείσης· β΄. τὴν χ ἥκιστα νομιστέον ἄγνωστον, ἀλλὰ μόνον ποσότητα εὐμετάβλητον (Συμ. Λογ. 3)· γ΄. ἡ ἔκθεσις αὕτη δχ κληθῆναι δύναται ἀπειροστὸν μέρος τῆς χ, ἢ ἁπλῶς ἀπειροστὸν, τοῦ οὐσιαστικοῦ ἐξυπακουομένου.

2. Ἐὰν δὲ ἡ ποσότης χ μειωθῇ μέρει ἑαυτῆς ἀπειροςῷ, γενήσεται πάντως $\chi - \frac{\chi}{\infty}$· ἔςω οὖν $- \frac{\chi}{\infty} = -$ δχ· εἴτ' οὖν ἀπειροςὸν τῆς χ λειπτικόν.

3. Αὔξονται δὲ οὕτως, ἢ μειοῦνται, μόναι αἱ μεταβληταὶ ποσότητες, οἷαί εἰσιν ἐν ταῖς καμπύλαις αἱ τεταγμέναι, αἱ ἀποτετμημέναι κτ., ἃς καὶ διὰ τῶν ὑςέρων γραμμάτων τοῦ Ἀλφαβήτου σημαίνουσιν, οἷον χ, υ, ψ, ω· αὐξομειώσεων δὲ ἀνεπίδεκτοι διατελοῦσιν αἱ ἄτρεπτοι ποσότητες, οἷοί εἰσιν οἱ ἄξονες, αἱ διάμετροι κτ., ἃς καὶ διὰ τῶν πρώτων γραμμάτων, α, β, γ, κτ. ἐμφαίνουσι.

4. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἀπειροςὸν τῆς ποσότητος χ ἔςιν, ᾧ διαφέρει ἑαυτῆς αὐξηθείσης, ἢ μειωθείσης, ἐλαχίςῳ τινὶ μεγέθει.

5. Πᾶσα μεταβλητὴ ποσότης, θεωρεῖσθαι ἔχουσα ὡς ἐξ ἀπείρων ἰσαλλήλων μερῶν συνεςηκῦια, εἰς αὐτὰ ταῦτα ὡς εἰς ςοιχεῖα ἀναλύεσθαι ἔχει.

6. ΟΡΙΣΜΟΣ. Λογισμὸς τῶν ἀπειροςῶν ἀκούει ὁ τρόπος, καθ' ὃν, ποσοτήτων μεταβλητῶν δοθεισῶν, εὑρίσκονται ταῦτα τὰ αὐτῶν ἀπειροςὰ μέρη, ἢ ςοιχεῖα.

7. Ὅταν οὖν ποσότης μεταβλητὴ χ, υ, ψ, ἄμοιρος ᾖ δείκτου, καὶ συνεργοῦ, ληφθήσεται αὐτῆς τὸ ἀπειροςὸν, γράφουσι δχ, δυ, δψ, ἐὰν ἐλαχίςῳ μεγέθει προσαύξηται· ἐὰν δὲ μειῶται, —δχ, —δυ, —δψ.

8. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπεὶ τὸ ἀπειροςὸν δχ ποσότητός τινος τῆς χ μέρος ἐλάχισόν ἐςιν αὐτῆς τῆς ποσότητος· α΄. ὁ ποσότητος τρεπτῆς πρὸς τὸ κατ' αὐτὴν ἀπειροςὸν λόγος δι' οὐδενὸς ἀριθμοῦ δηλωθῆναι δύναται· β΄. τὸ ἀπειροςὸν δχ ὡς ἀπειροςὸν τῆς χ μέρος, πρὸς αὐτὴν παραβαλλόμενον, ἐκληφθῆναι δύναται ὡς ο (Συμβ. Λογ. 530).

9. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Διάφορα μέντοι ἀπειροστὰ δχ, δυ ἀλλήλοις παραβληθῆναι δύνανται, ὡς ϗ αἱ αὐτῶν ὅλαι ποσότητες χ, υ πρὸς ἀλλήλας παραθετέαι ὑπάρχουσιν· ὁ λόγος οὖν τῶν δχ, δυ ἔσαι πεπερασμένος, ϗ ὁ αὐτὸς τῷ τῶν χ, υ· ἐὰν γὰρ ᾖ $\chi = 2\upsilon$, ϗ $\delta\chi = 2\delta\upsilon$· ϗ ὅλως ἔσαι $\delta\chi : \delta\upsilon :: \chi : \upsilon$ (Συμ. Λογ. 234).

10. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἥκισα δὲ ἐκληπτέον τὸ ἀπειροσὸν ὡς φύσει ὑφεσώς τι ποσὸν πραγματικῶς, εἴτ᾽ οὖν φυσικῶς· ἔσι γὰρ ἀληθῶς πρᾶγμα τὸ πεπερασμένον ϗ ὡρισμένον· ὑποτίθεται δὲ κατ᾽ ἐπίνοιαν ποσόντι δι᾽ ἀπείρου ἀριθμοῦ διῃρημένον· ἄλλως τε τὰς ἐκφράσεις, ἄπειρον, ἀπειροσὸν, ἐν τῇ μαθηματικῇ ἐκληπτέον ὡς ὅρους σχετικούς.

11. ΘΕΩΡΗΜΑ Ποσότητος ἁπλῆς, ἐκτιθεμένης δι᾽ ἑνὸς γράμματος ϗ δι᾽ ἑνὸς συνεργοῦ, οἷα ἡ πχ, ἀπειροσόν ἐσι τὸ $\delta\chi \times \pi$, εἴτ οὖν πδχ.

ΔΕΙΞΙΣ. Καὶ γὰρ, ἐὰν μόνη ἡ χ αὐξηθῇ μέρει ἑαυτῆς ἀπειροσῷ, παρέξει δχ· ἡ δὲ 2χ αὐξηθεῖσα ὡσαύτως, παρέξει 2δχ, ἡ δὲ 3χ, 3δχ, ϗ ἐν γένει πχ παρέξει πδχ.

12. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ποσότητος ἁπλῆς δείκτου εὐμοιρούσης, οἷα ἡ χ^{ν}, εὑρεῖν τὸ ἀπειροσόν.

ΛΥΣΙΣ. α΄. Πεπολλαπλασιάσθω αὕτη ἡ ποσότης χ ἐπὶ τὸν αὐτῆς δείκτην ν· ὅθεν ἔσαι νχ· β΄. τεθείσθω τῷ χ ἐπὶ τοῦδε τοῦ γινομένου δείκτης ὁ πρὶν, ἠλαττωμένος μονάδι, οἷον ν — 1 · γ΄. τὸ οὕτω γεγονὸς $\nu\chi^{\nu-1}$ πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ δχ, ἀπειροσὸν τῆς χ· ϗ οὕτως ὅλον τὸ $\nu\chi^{\nu-1}\delta\chi$ ἔσαι ἀπειροσὸν τῆς χ^{ν}· οὕτω δὲ ἀπειροσὸν τῆς χ^{2}, ἔσαι τὸ $2\chi^{2-1}\delta\chi = 2\chi\delta\chi$ τῆς δὲ χ^{3}, τὸ $3\chi^{3-1}\delta\chi = 3\chi^{2}\delta\chi$ ϗ οὕτως ἑξῆς.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν χ, ἀπειροστῷ μεγέθει αὐξομένη, γένηται $\chi + \frac{\chi}{\infty}$, ἢ $\chi + \delta\chi$ (1), ἡ χ^2 μετὰ ταύτης τῆς αὐξήσεως ἔσαι $\overline{\chi + \delta\chi} \times \overline{\chi + \delta\chi} = \chi^2 + 2\chi\delta\chi + \delta\chi^2$· ἀλλὰ $\delta\chi^2$ γινόμενόν ἐσι τῆς $\delta\chi$ ἐφ᾽ ἑαυτὴν πολλαπλασιαθείσης, ϗ ἑπομένως ἀπειροσὸν δευτεροταγὲς (Συμϐ. Λογ. 527), ϗ ἴσα ϗ μηδενὶ ἐκληπτέον· ἀπειροσὸν ἄρα ἔσαι τῦ χ^2, τὸ $2\delta\chi\delta\chi$· ὅπερ ταὐτόν ἐσι τῷ $2\chi^{2-1}\delta\chi$.

13. Ὡσαύτως ἐπὶ τῦ κατὰ τὴν χ^3 ποσότητα ἀπειροσῦ, τὸ γινόμενον ὑπὸ $\overline{\chi + \delta\chi} \times \overline{\chi + \delta\chi} \times \overline{\chi + \delta\chi} = \overline{\chi + \delta\chi}^3 = \chi^3 + 3\chi^2\delta\chi + 3\chi\delta\chi^2 + \delta\chi^3$ (Συμϐ. Λογ. 95)· ἀλλ᾽ ἐπεὶ τὸ δευτεροταγὲς $3\chi\delta\chi^2 = 0$, ϗ τὸ τριτοταγὲς $\delta\chi^3 = 0$, καταλείπεται τῆς χ^3 ἀπειροσὸν, τὸ $3\chi^2\delta\chi = 3\chi^{3-1}\delta\chi$.

14. Συναχθήσεται δὲ ὡσαύτως, ἀπειροσὸν μὲν τῆς χ^4 τὸ $4\chi^{4-1}\delta\chi = 4\chi^3\delta\chi$, ἐν γένει δὲ τῆς χ^π, τὸ $\pi\chi^{\pi+1}\delta\chi$.

15. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ῥιζικὴ ᾖ ἡ ἁπλῆ ποσότης, οἷα ἡ $\sqrt[\pi]{\chi}$, ά. τρεπτέον αὐτὴν εἰς $\chi^{\frac{1}{\pi}}$, ἐξαλείφοντας τὸ σύμϐολον (Συμϐ. Λογ. 148)· β΄. ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων ἀπειροσὸν τῆς $\chi^{\frac{1}{\pi}} = \sqrt[\pi]{\chi}$, ἔσαι τὸ $\frac{1}{\pi}\chi^{\frac{1}{\pi}-1}\delta\chi$· τῆς δὲ $\sqrt{\chi} = \chi^{\frac{1}{2}}$ ἐσὶ τὸ $\frac{1}{2}\chi^{\frac{1}{2}-1}\delta\chi = \frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi$ τῆς δὲ $\sqrt[\pi]{\chi} = \chi^{\frac{1}{3}}$, τὸ $\frac{1}{3}\chi^{\frac{1}{3}-1}\delta\chi = \frac{1}{3}\chi^{-\frac{2}{3}}\delta\chi$· τῆς δὲ $\sqrt[\pi]{\chi^\nu} = \chi^{\frac{\nu}{\pi}}$, τὸ $\frac{\nu}{\pi}\chi^{\frac{\nu}{\pi}-1}\delta\chi$.

16. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὸ ἀπειροςὸν τῦ ὑπὸ δύω τρεπτῶν παραγόντων γινομένε χυ.

ΛΥΣΙΣ. Πεπολλαπλασιάσθω ὁ πρῶτος παράγων χ ἐπὶ τὸ τῦ δευτέρε ἀπειροςὸν· ϗ εἶτα ὁ δεύτερος υ ἐπὶ τὸ τῦ πρώτε· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύω γινομένων $\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\chi$ ἔσεται τὸ ἀπειροςὸν τῆς χυ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν χ μὲν αὐξηθὲν γένηται $\overline{\chi+\delta\chi}$, τὸ δὲ, $\upsilon+\delta\upsilon$, τὸ γινόμενον υχ ἔσεται $\overline{\chi+\delta\chi} \times \overline{\upsilon+\delta\chi}$ $= \chi\upsilon + \upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon + \delta\chi\times\delta\upsilon$· ἀλλὰ $\delta\chi \times \delta\upsilon$, γινόμενον ὑπὸ δύω ἀπειροςῶν, ἀπειροςόν ἐςι δευτεροταγὲς (Συμβ. Λογ. 527)· ϗ μεδὲν πρὸς τὰ πρωτοταγῆ $\chi\delta\upsilon$, $\upsilon\delta\chi$ (Συμβ. Λογ. 528), ϗ χυ ἔςιν ἡ δοθεῖσα ποσότης· καταλείπεται ἄρα τῆς χυ ἀπειροςὸν τὸ $\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\chi$.

Τὸ τῆς $\chi^3 \upsilon^2$ ἀπειροςὸν ἔςαι $\chi^3 \times 2\upsilon\delta\upsilon + \upsilon^2 \times 3\chi^2\delta\chi = 2\chi^3\upsilon\delta\upsilon + 3\chi^2\upsilon^2\delta\chi$.

17. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ ἀπειροςὸν τῦ ὑπὸ τριῶν τρεπτῶν παραγόντων γινομένε χυψ, εὑρεθήσεται, ἐὰν ἕκαςον γινόμενον ὑπὸ δύω παραγόντων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ ἀπειροςὸν τῦ τρίτε παράγοντος, ϗ εἰς ἓν συναφθῶσιν ἅπαντα τὰ γινόμενα· ὅτως ὃν τῦ χυψ ἀπειροςὸν ἔςαι τὸ $\chi\upsilon\delta\psi + \chi\psi\delta\upsilon + \upsilon\psi\delta\chi$, ϗ γὰρ $\overline{\chi+\delta\chi} \times \overline{\upsilon+\delta\upsilon} \times \overline{\psi+\delta\psi} = \chi\upsilon\delta\chi + \chi\psi\delta\upsilon + \upsilon\psi\delta\chi$, ἀλογεμένων ἀμέλει τῶν ἡττοταγῶν ἀπειροςῶν.

18. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν γινομένῳ τινὶ τῷ πχυ ἐνυπάρχῃ ποσὸν ἄτρεπτον τὸ π, πεπολλαπλασιάσθω πχ ἐπὶ τὸ ἀπειροςὸν τῆς υ, εἶτα υ ἐπὶ τὸ τὴς πχ· ὅθεν ἔςαι $\pi\chi\delta\upsilon + \upsilon\pi\delta\chi$· τῦ γὰρ πχ γινομένε $\pi\chi + \pi\delta\chi$ (11), ϗ υ, $\upsilon+\delta\upsilon$, ἔςαι $\overline{\pi\chi+\pi\chi\delta\chi} \times \overline{\upsilon+\delta\upsilon} = \pi\chi\upsilon = \pi\chi\upsilon + \upsilon\pi\delta\chi + \pi\chi\delta\upsilon + \pi\delta\chi\delta\upsilon$· ὅθεν ἀποῤῥιπτέον μέν ἐςι

πάντως ὡς δευτεροταγὲς τὸ πδχδυ, ἀφαιρετέον δὲ τὸ ἐν ἀρχῇ πχυ.

19. Ἐν γένει δὲ πρὸς εὕρεσιν ἀπειροςȣ̃ ποσότητος τῆς π ἀντεισακτέον ἀντὶ τῶν τρεπτῶν, χ, υ κτ, ἐξ ὧν σύγκειται αὕτη, τας ποσότητας $\chi+\delta\chi$, $\upsilon+\delta\upsilon$, κτ· ϗ δὴποριϑήσεται ποσότης ἄλλη, ἥτις κληθήτω Π· τῆς ȣ̃ν π ἀφαιρετέον τὴν π, ἵνα γένοιτο $\Pi-\pi$, ταύτης δὲ τῆς ποσότητος ἀποκοπτέον τȣ̀ς πρὸς ἄλλȣς ὅρȣς μηδὲν γινομένȣς· τὸ δὲ κατάλοιπον ἔςαι τὸ ζητȣ́μενον ἀπειροςὸν δπ, ἐλεύθερον τῶν ἀχρήςων ὅρων· ἔςω $\pi=\chi\upsilon$· ἀντικαταςαθέντος ȣ̃ν $\chi+\delta\chi$ ἀντὶ χ, ϗ $\upsilon+\delta\upsilon$ ἀντὶ υ, ποριϑήσεται $\Pi=\chi\upsilon+\upsilon\delta\chi+\chi\delta\upsilon+\delta\chi\delta\upsilon$, ϗ $\Pi-\pi$ ἔςαι $\chi\upsilon+\upsilon\delta\chi+\chi\delta\upsilon+\delta\chi\delta\upsilon-\chi\upsilon=\upsilon\delta\chi+\chi\delta\upsilon$, παρορωμένȣ τȣ̃ δευτεροταγȣ̃ς δχδυ.

Ἐὰν δὲ ταῖς τρεπταῖς συνεζευγμέναι ὦσι ϗ ἄτρεπτοι, οἷον $\alpha+\chi$, ϗ $\beta\gamma+\chi\chi$, ἐν τῇ τῶν ἀπειροςῶν λήψει, αἱ ἄτρεπτοι, ἐπείπερ ἀπειροςῶν ἀμοιρȣ̃σι (3), παραλείπονται· ȣ̓κȣ̃ν τῆς μὲν $\alpha+\chi$ ἀπειροςόν ἐςι τὸ δχ τȣ̃ α παρορωμένȣ, τῆς δὲ βγ, τὸ 2χδχ.

20. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Τȣ̃ κλάσματος $\frac{\upsilon}{\chi}$ τὸ ἀπειροςὸν εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπεὶ $\frac{\upsilon}{\chi}=\upsilon\times\frac{1}{\chi}$, καὶ $\frac{1}{\chi}=\chi^{-1}$ (Συμϐ. Λογ. 149) ἄρα $\frac{\upsilon}{\chi}=\upsilon\chi^{-1}$· τȣ̃ δὲ $\upsilon\chi^{-1}$ ληφθέντος τȣ̃ ἀπειροςȣ̃ (16), ἔςαι $\upsilon\delta(\chi^{-1})+\chi^{-1}\delta\upsilon$, ϗ ἐπομένως (12) $\delta(\upsilon\chi^{-1})=-\upsilon\chi^{-2}\delta\chi+\chi^{-1}\delta\upsilon$. Ο. Ε. Π.

21. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αὕτη δὲ ἡ ποσότης δι' ἀναγωγῆς γίνεται $-\frac{\upsilon\delta\chi}{\chi^2}+\frac{\delta\upsilon}{\chi}=\frac{\chi\delta\upsilon-\upsilon\delta\chi}{\chi^2}$, τὗτ' ἔςι „τὸ παντὸς κλάσματος $(\frac{\upsilon}{\chi})$ ἀπειροςὸν ἰσῦται „τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ παρονομαςῦ ϗ τῦ κατὰ τὸν ἀριθ„μητὴν ἀπειροςῦ, πλὴν τῦ γινομένυ ὑπὸ τῦ ἀριθμητῦ, „ϗ τῦ κατὰ τὸν παρονομαςὴν ἀπειροςῦ, διηρημένω διὰ „τῦ ἀπὸ τῦ παρονομαςῦ τετραγώνυ" ϗ ὗτός ἐςιν ὁ κοινῇ ἀποδιδόμενος κανὼν εἰς εὕρεσιν τῶν κατὰ τὰ κλάσματα ἀπειροςῶν.

22. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Εἰ λαβεῖν προκέοιτο τὸ ἀπειροςὸν τῦ $\alpha\chi^3\upsilon^2$, θεωρητέον τὸ πρῶτον χ^3 ϗ υ^2 ὡς δύω ἁπλᾶς τρεπτὰς ποσότητας· ϗ δὴ εὑρεθήσεται (16, 19) $\delta(\alpha\chi^3\upsilon^2)=\alpha\chi^3\,\delta(\upsilon^2)+\alpha\upsilon^2\delta\,(\chi^3)$· ἑξῆς δὲ (12) $\delta(\alpha\chi^3\upsilon^2)=2\,\alpha\chi^3\,\upsilon\delta\upsilon+3\,\alpha\upsilon^2\chi^2\,\delta\chi$, ϗ ἐν γένει $\delta(\alpha\chi^\mu\,\upsilon^\nu)=\alpha\chi^\mu\,\delta(\upsilon^\nu)+\alpha\upsilon^\nu\,\delta(\chi^\mu)=\nu\alpha\chi^\mu\,\upsilon^{\nu-1}\delta\upsilon+\mu\alpha\,\upsilon^\nu\chi^{\mu-1}\,\delta\chi$.

23. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Εἰ δὲ προκέοιτο λαβεῖν τὸ ἀπειροςὸν ποσότητος πολυωνύμυ, ἧς χωρὶς ἕκαςον μέρος ὑψῶτο εἰς ἕνα τινὰ βαθμὸν, εἰλήφθω χωρὶς ἑκάςυ ὅρυ τὸ ἀπειροςόν· ἔςω $\delta\,(\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi\upsilon)=3\alpha\chi^2\,\delta\chi^2\,\delta\chi+\gamma\chi\delta\upsilon+\gamma\upsilon\delta\chi$· ὡσαύτως $\delta\,(\alpha\chi^2+\beta\chi+\frac{\gamma\upsilon}{\chi^2})=\delta\,(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma\chi^{-2}\upsilon)=2\alpha\chi\delta\chi+\beta\delta\chi-2\gamma\chi^{-3}\,\upsilon\delta\chi+\gamma\chi^{-2}\,\delta\upsilon$· ὁμοίως $\delta(\chi^3\upsilon+\alpha\upsilon^2+\beta 3)=3\chi^2\,\upsilon\delta\chi+\chi^3\delta\upsilon+2\alpha\upsilon\delta\upsilon$, τῦ $\beta 3$ ὡς ποσότητος ἀτρέπτυ ἀπειροςὸν ὐδὲν ὅλως ἔχοντος (19).

24. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Ποσότητος πολυωνύμȣ εἰς βαθμὸν ὑψωμένης εὑρεῖν τὸ ἀπειροςόν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω τοιάδε ποσότης ἡ $(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2)^5$· θεωρείϑω ἐν αὐτῃ, ὡς εἰ ἦν μία μόνη τρεπτὴ, ἧς εἰλήφθω τὸ ἀπειροςὸν κατὰ τὸν ἀποδοθέντα κανόνα (12)· τοιγαρȣ̃ν ἔςαι $\delta(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2)^5 = 5(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2)^4 \times \delta(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2) = 5(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2)^4 \times (\beta\delta\chi+2\gamma\chi\delta\chi)$· ὡσαύτως $\delta(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{2}{3}} \times \delta(\alpha+\beta\chi^2) = \frac{5}{3}(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{2}{3}} \times 2\beta\chi\delta\chi = \frac{10}{3}\beta\chi\delta\chi(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{2}{3}}$. Ο. Ε. Π.

25. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἐὰν δὲ πολυώνυμος ȣ̃σα ἡ ποσότης συγκέηται ϗ ἐκ διαφόρων ποιητῶν, θεωρητέον ἕκαςον ποιητὴν ὡς ἁπλȣ̃ν ποσὸν τρεπτὸν, ϗ χρηςέον τῷ ἀποδοθέντι κανόνι (16)· ȣ̃τω τὴν $\chi^3(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}$ ἐκδεκτέον ὡς σύνθετον ἐκ δύω ποιητῶν χ^3 ϗ $(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}$· ϗ δὴ ἔςαι $\delta(\chi^3(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}) = (\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}\delta(\chi^3)+\chi^3\delta(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}$, ὅπερ ἐκ τῶν ἤδη ἐκτεθειμένων κανόνων γίνεται $3\chi^2\delta\chi(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{3}\beta\chi^4\delta\chi(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{2}{3}}$· ὡσαύτως $\delta\left(\frac{(\chi+\alpha)^3}{(\chi+\beta)^2}\right) = \delta((\chi+\alpha^3)\times(\chi+\beta)^{-2}) = (\chi+\alpha)^3\delta(\chi+\beta)^{-2} + (\chi+\beta)^{-2}\delta(\chi+\alpha)^3$, ταὐτὸν εἰπεῖν $= -2(\chi+\alpha)^3(\chi+\beta)^{-3}\delta\chi + 3(\chi+\beta)^{-2}(\chi+\alpha)^2\delta\chi$, ὅπερ τρέπεται εἰς $-\frac{2(\chi+\alpha)^3\delta\chi}{(\chi+\beta)^3}$

$+\frac{3(\chi+\alpha)^2\delta\chi}{(\chi+\beta)^2}$, καὶ ἀνάγεται εἰς $\frac{(\chi+3\beta-2\alpha)(\chi+\alpha)^2\delta\chi}{(\chi+\beta)^3}$.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἐὰν δὲ ῥιζικὰ πολυώνυμα προκέωνται εἰς τὸ εὑρεῖν αὐτῶν τὰ ἀπειροςὰ, ἐκ τῶν (15) ϗ τῶν ἤδη ἐκτεθειμένων κανόνων ἐπιτηδευθήσεται αὐτῶν ἡ εὕρεσις· ὅτω $\delta(\sqrt{\alpha\alpha-\chi\chi}) = \delta(\alpha\alpha-\chi\chi)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}\delta(\alpha\alpha-\chi\chi) = -\chi\delta\chi(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\chi\delta\chi}{\sqrt{\alpha\alpha-\chi\chi}}$· ϗ ἐν γένει $\delta(\chi^\mu\sqrt[\kappa]{(\alpha+\beta\chi^\nu)^\pi}) = \delta[\chi^\mu(\alpha+\beta\chi^\nu)^{\frac{\pi}{\kappa}}] = \chi^\mu\delta(\alpha+\beta\chi^\nu)^{\frac{\pi}{\kappa}} + (\alpha+\beta\chi^\nu)^{\frac{\pi}{\kappa}}\delta(\chi^\mu) = \frac{\pi\nu\beta}{\kappa}\chi^{\mu+\nu-1}\delta\chi(\alpha+\beta\chi^\nu)^{\frac{\pi}{\kappa}-1} + \mu\chi^{\nu-1}\delta\chi(\alpha+\beta\chi^\nu)^{\frac{\pi}{\kappa}}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἀπειροςῶν δευτέρων, τρίτων κτ.

26. Παρὰ τὰ ἤδη θεωρηθέντα ἡμῖν, ἃ καλεῖται πρῶτα ἀπειροςὰ, εἰς θεωρίαν ὑπάγονται ϗ δεύτερα, ϗ τρίτα κτ. προτάττȣσι δὲ τῆς τρεπτῆς ποσότητος δύω μὲν δ, εἰ περὶ δευτέρȣ, τρία δὲ, εἰ περὶ τρίτȣ, λόγος γίνεται, ϗ ἑξῆς ὁμοίως· ὅτω $\delta\delta\chi$ ἐμφαίνει τῆς χ τὸ δεύτερον ἀπειροςόν.

27. Τῶν ἀπειροςῶν τὰ δεύτερα ἀνασκοπᾶσιν ἐκληπτέον τὰς τρεπτὰς ποσότητας κατὰ βαθμὲς ἀνίσȣς, ὧν μέντοι ἡ διαφορὰ ἀπειροςήτις τυγχάνει, παρατιθεμένη αὐτοῖς τοῖς αὐξήμασιν· ὅτω δδχ ἀπειροςή ἐςι, τῇ δχ παραβαλλομένη· ὡσαύτως ἐν τοῖς τρίτοις δδδχ, ἡ $\delta^3 \chi$ (ἑκατέρως γὰρ σημαίνεται) ἀπειροςήτις ἐςὶ, τῇ δδχ παρατιθεμένη, καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

28. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Εἰς δήλωσιν τȣ͂ ἀπὸ δχ τετραγώνȣ γραπτέον πάντως $(\delta\chi)^2$· ἁπλȣ́ςερον μέντοι ἐκθετέον $\delta\chi^2$, ὃ ἥκιςα δήπȣ δηλοῖ τὸ τȣ͂ χ^2 ἀπειροςὸν, ὅπερ εἰώθαμεν σημειȣ͂ν ὅτω· $\delta(\chi^2)$· ἰςέον δὲ ὡς καίτοι δδχ, καὶ $\delta\chi^2$ ἀπειροςὰ δευτεροταγῆ ἐμφαίνȣσιν· ȣ̓κ ἔςι μέντοι $\delta\delta\chi = \delta\chi^2$· τὸ μὲν γὰρ δδχ ἔςιν ἀπειροςὸν δεύτερον τȣ͂ χ· τὸ δὲ $\delta\chi^2$ ἔςι τὸ ἀπὸ δχ τετράγωνον.

29. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Β΄. Ἵνα δὲ διοριϑείη τὸ δεύτερον ἀπειροςὸν, ὅ,τι δήποτ᾽ ἐςὶ φυσικῶς, θεωρητέον τὴν τρεπτὴν ποσότητα ἐν τρισὶν ἀλληλοδιαδόχοις προσεχεςάταις καταςάσεσι, καὶ ληπτέτον τὸ ἀπειροςὸν τῆς δευτέρας, ᾧ διαφέρει τῆς πρώτης, καὶ τὸ τῆς τρίτης, ᾧ διαφέρει τῆς δευτέρας· καὶ τελευταῖον τὴν διαφορὰν, ᾗ τȣ͂ πρώτȣ διαφέρει τὸ δεύτερον ἀπειροςόν· ὅτω πρώτη μὲν κατάςασις τῆς χ, ἔςι χ· δευτέρα δὲ αὐξηθεῖσα τῷ δχ ἔςι $\chi + \delta\chi$· αὕτη δὲ πάλιν προσηυξήσθω τῇ ποσότητι $\delta\chi + \delta(\delta\chi)$· τοιγαρȣ͂ν αἱ τρεῖς ἀλληλοδιάδοχοι τῆς χ καταςάσεις εἰσὶ, χ, $\chi + \delta\chi$, $\chi + 2\delta\chi + \delta(\delta\chi)$· ἔςιν ἄρα ἡ τῆς δευτέρας ὑπὲρ τὴν πρώτην διαφορὰ δχ· ἡ δὲ τῆς τρίτης ὑπὲρ τὴν δευτέραν, $\delta\chi + \delta(\delta\chi)$· τέλος δὲ ἡ διαφορὰ τῶν δύω τȣ́των ἀπειροςῶν, εἴτ᾽ ȣ͂ν τῆς χ τὸ δεύτερον ἀπειροςὸν, ἔςι $\delta(\delta\chi)$· ἄρα $\delta\delta\chi = \delta(\delta\chi)$· ἵν᾽ ȣ͂ν τὰ δεύτερα εὑρίσκωμεν ἀπειροςὰ, ἐπάναγ-

κες λαμβάνειν τῶν πρώτων ἀπειροςῶν τὰ ἀπειροςὰ κατὰ τοὺς προαποδοθέντας κανόνας.

30. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὰ δεύτερα ἀπειροςὰ τῆς $\chi\upsilon$ ποσότητος.

ΛΥΣΙΣ. Τὰ μὲν πρῶτα ταύτης εἰσὶ (16) $\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\chi$· τούτων οὖν αὖθις εἰλήφθω τὰ ἀπειροςὰ, ὡς εἴπερ χ καὶ $\delta\chi$, υ καὶ $\delta\upsilon$ εἶεν ἁπλῶς ποσότητες τρεπταί· ἑκατέρου οὖν ὅρου, ὡς ἐκ δύω ποιητῶν παραγομένου, δύω παρέχοντος ὅρους (16), τὰ ἀμφοτέρων ἀπειροςὰ ἔσονται $\chi\delta\delta\upsilon + \delta\upsilon\delta\chi + \delta\upsilon\delta\chi + \upsilon\delta\delta\chi$, εἴτ' οὖν $\chi\delta\delta\upsilon + 2\delta\upsilon\delta\chi + \upsilon\delta\delta\chi$.

31. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὡσαύτως τὸ δεύτερον ἀπειροςὸν τοῦ χ^2 εὑρεθήσεται λαμβάνουσι πρῶτον τὸ πρῶτον αὐτοῦ ἀπειροςὸν $2\chi\delta\chi$· ἑξῆς δὲ τούτου, ἐκληφθέντων τοῦτε χ καὶ τοῦ $\delta\chi$, ὡς εἰ ἦσαν ποσὰ τρεπτὰ, κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον τὸ ἀπειροςὸν $2\chi\delta\delta\chi + 2\delta\chi^2$· ὡσαύτως $\delta\delta(\alpha\chi^\mu) = \delta(\mu\alpha\chi^{\mu-1}\delta\chi) = \mu\cdot(\mu-1)\alpha\chi^{\mu-2}\delta\chi^2 + \mu\alpha\chi^{\mu-1}\delta\delta\chi$ (*)· εἰ δὲ προκέοιτο εὑρεῖν τὰ ἀπειροςὰ ποσοτήτων, αἷς ἔνεσι πρῶτα ἀπειροςά· εἴτ' ἐξ ἀκριβοῦς, εἴτε καὶ μὴ, προελθόντα πράξεως, τῇ αὐτῇ αὖθις χρηςέον μεθόδῳ· οὕτω $\delta(\chi\delta\upsilon) = \chi\delta\delta\upsilon + \delta\chi\delta\upsilon$· ὡσαύτως $\delta\left(\frac{\delta\upsilon}{\chi}\right) = \delta$

(*) Εὐλόγως ἄν τις ἐνταῦθα διαπορήσειεν· εὑρισκομένων γὰρ τῶν πρώτων ἀπειροςῶν, παρορῶνται αἱ ἀπειροςαὶ δευτεροταγεῖς ποσότητες· ἀλλ' ἐπείπερ καὶ τὰ δεύτερα δευτεροταγεῖς εἰσιν ἀπειροςαὶ ποσότητες, μὴ, παρορῶντες ταῦτα ἐν τῇ ἐκτιμήσει τῶν πρώτων, τὰ δεύτερα ἐλλείποντα ἀπεργασώμεθα; οὐ μὰ Δία· τὸ γὰρ παροραθὲν δευτεροταγὲς ἀπειροςὸν ἐν τῇ λήψει τῶν δευτέρων συνεισενεγκεῖν δύναται ἀπειροςὸν τριτοταγὲς, ὅπερ παρατιθέμενον τῷ δευτέρῳ, ἐπείπερ τοῦτ' ἔςιν ἀπειροςὸν δευτεροταγὲς, παροραται, ἴσον τῷ μηδενὶ ἐκλαμβανόμενον.

$(\chi^{-1}\,\delta\upsilon) = -\chi^{-2}\,\delta\chi\delta\upsilon + \chi^{-1}\,\delta\delta\upsilon$· ὡσαύτως

$$\delta\left(\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}\right) = \delta\,(\delta\chi\delta\upsilon^{-1}) = \delta\delta\chi\,\delta\upsilon^{-1} - \delta\chi\delta\,\upsilon^{-2}\,\delta\delta\upsilon = \frac{\delta\delta\chi}{\delta\upsilon} - \frac{\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\upsilon^2}.$$

32. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Συχνάκις τοῖς λογισμοῖς, οἷς εἰσέρχονται πολλαὶ τρεπταὶ, συμβαίνει ὑποτίθεσθαι ἄτρεπτον τὸ πρῶτον ἀπειροσὸν μιᾶς τῶν τρεπτῶν ποσοτήτων· τȣτὶ δὲ συγχωρηθὲν (ἀεὶ γάρ τις ἔχει ἐκδέξασθαι ἓν τῶν πρώτων ἀπειροσῶν ὡς ὅρον μόνιμον παραθέσει πρὸς τ' ἄλλα πρῶτα) ἁπλȣςέρȣς ἀπεργάζεται τȣ̀ς λογισμȣ́ς· οἱ γὰρ, οἷς συμπέπλεκται τὸ ταύτης τῆς τρεπτῆς δεύτερον ἀπειροσὸν, ὅροι τȣ̃ λογισμȣ̃ ἐξαφανίζονται· τȣ̃ γὰρ $\delta\chi$ ἀτρέπτȣ ὑποτεθέντος, ἔςαι $\delta\delta\chi = 0$, ὅπερ σβέννυσι πάντας τȣ̀ς ὅρȣς, οἷς ἐνυπάρχει τὸ $\delta\delta\chi$·· δεῖ δὲ προσοχῆς ἐνταύτῃ τῇ περιπτώσει, ἵνα μηδὲν λαμβάνηται ἀπειροσὸν τȣ̃ $\delta\chi$ (εἴτ' ȣ̃ν τῆς ὡς ἀτρέπτȣ λαμβανομένης ποσότητος), ἐνθ' ἂν ἀπαντᾷ ὁ ὅρος ȣ̃τος, τοιγαρȣ̃ν τὸ ἀπειροσὸν τȣ̃ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$, τȣ̃ μὲν $\delta\chi$ ἀτρέπτȣ ὑποτεθέντος, εἴτ' ȣ̃ν τὸ τȣ̃ $\delta(\delta\chi\delta\upsilon^{-1})$, ἔςι $-\,\delta\chi\delta\upsilon^{-2}\,\delta\delta\upsilon$, εἴτ' ȣ̃ν $-\,\frac{\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\upsilon^2}$, τȣ̃ δὲ $\delta\upsilon$ ἀτρέπτȣ ληφθέντος, ἔςι $\frac{\delta\delta\chi}{\delta\upsilon}$.

33. ΣΧΟΛΙΟΝ. Καὶ τὰ τρίτα δὲ, ὥσπερ τȣ̃τε πρῶτα ϗ δεύτερα, εὑρίσκονται, ἐκλαμβανομένων ἀμέλει τῶν τε πρώτων, ϗ δευτέρων οἷα ἁπλῶς τρεπτῶν ποσοτήτων· ὡσαύτως δὲ ἐπιτηδευθήσεται ϗ τῶν ἔτι ὑπερτέρων

ἀπειροςῶν ἡ εὕρεσις· παρατηρητέον μέντοι, ἵν' ἐν τῇ διελεύσει ἀπὸ τῶν πρώτων ἐπὶ τὰ δεύτερα, ἑνὸς ἅπαξ ἀπειροςῦ ὡς ἀτρέπτυ ληφθέντος, διατηρῆται ὡσαύτως ἄτρεπτον διὰ πασῶν ἐφεξῆς τῶν πράξεων.

34. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὑπεθέμεθα μὲν ἐν τοῖς φθάσασι πάσας τὰς τρεπτὰς χ, υ, κτ ἅμα αὐξῦσας, εἶτ' ῦν τῆς χ γινομένης $\chi + \delta\chi$, τὴν υ ἀποτελεῖσθαι $\upsilon + \delta\upsilon$, ϗ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὡσαύτως· συμβαίνει μέντοι τινῶν αὐξομένων, τὰς ἄλλας μειῦσθαι· τηνικαῦτα τοίνυν μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἀπειροςῶν ἀπονέμειν ἀνάγκη τὸ σύμβολον — τῇ μειυμένῃ ποσότητι· ἢ γῦν δυνάμεθα ἐᾶν τὰ ἀπειροςὰ, οἷα προῆλθον ἐκ τῶν ἀποδεδομένων κανόνων· ἐφαρμόζοντες μέντοι ταῦτα ζητήματί τινι, λαμβάνειν ὀφείλομεν λειπτικῶς τὴν ποσότητα, ᾗ ἔνεςι τὸ τῆς μειυμένης τρεπτῆς ποσότητος ἀπειροςόν· εἰ γὰρ ἡ υ μειῦται τῇ ποσότητι κ, ἐν δὲ τῷ λαμβάνειν αὐτῆς τὸ ἀπειροςὸν ὑποτεθῇ υ γινομένη $\upsilon + \delta\upsilon$· ἔςιν ἄρα $\upsilon - \kappa = \upsilon + \delta\upsilon$, εἶτ' ῦν $-\kappa = \delta\upsilon$, ἢ γῦν $\kappa = -\delta\upsilon$· ῦτως ῦν πανταχῦ τηνικαῦτα τεθήσεται $-\delta\upsilon$ ἀντὶ $+\delta\upsilon$· ἐν τοῖς ἐφεξῆς δὲ ὀψόμεθα τύτυ παραδείγματα· ὡσαύτως δὲ κἀπὶ τῶν δευτέρων ἀπειροςῶν· τῦ γὰρ πρώτυ ἀπειροςῦ μειυμένυ, τὸ μὲν δεύτερον, ὡς ἔθος, ληψόμεθα, ἐν δὲ τῇ ἐφαρμογῇ ζητήματός τινος χρησόμεθα τῷ $-\delta\delta\chi$ ἀντὶ $+\delta\delta\chi$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῶν κατὰ τὰ ἡμίτονα, συνημίτονα κτ. ἀπειροςῶν.

35. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὑρεῖν τὸ ἀπειροςὸν τȣ͂ ἡμιτόνȣ τῆς γωνίας, ἢ τȣ͂ τόξȣ ψ.

ΛΥΣΙΣ. Γενέϑω ἡ γωνία ψ, ψ + δψ· ϗ δὴ τηνικαῦτα ἡμ. (ψ + δψ) — ἡμ· ψ ἔςαι τὸ ἀπειροςὸν τȣ͂ ἡμιτόνȣ τῆς ψ· ἀλλὰ (Γεωμ. 507)· ἡμιτ. (ψ + δψ) = ἡμ. ψ × συνημ δψ + ἡμ. δψ × ἡμ. ψ, ὑποτιθεμένης τῆς ἀκτῖνος = 1· ἔςι δὲ, τȣ͂ μὲν ἀπειροςȣ͂ τόξȣ δψ ἡμίτονον αὐτὸ τὸ τόξον δψ, αὐτȣ͂ δὲ τέτȣ τὸ συνημίτονον ȣ̓δὲν ὅλως διαφέρει τῆς ἀκτῖνος· ἄρα ἡμ. δψ = δψ, ϗ συνημ. δψ = 1· ἄρα ἡμ (ψ + δψ) = ημ. ψ + δψ × συνημ. ψ· ἄρα ἡμ (ψ + δψ) — ἡμ. ψ = δ (ημ. ψ) = δψ × συνημ. ψ, τȣ͂τ' ἔςι „τὸ ἀπειροςὸν ἡμιτόνȣ γωνίας, „ἢ τόξȣ, ȣ͂ ἡ ἀκτὶς ὑποτίθεται = 1, εὑρίσκεται, πολλα„πλασιαζομένȣ τȣ͂ ἀπειροςȣ͂ τῆς γωνίας ἐπὶ τὸ συνημίτονον αὐτῆς.‟

36. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὸ ἀπειροςὸν τȣ͂ συνημιτόνȣ γωνίας, ἢ τόξȣ ψ.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςαι δὴ τὸ ζητȣ́μενον δ (συνημ. ψ) = συνημ (ψ + δψ) — συνημ. ψ = συνημ. ψ × συνημ. δψ — ἡμ. ψ × ἡμ. δψ — συνημ. ψ· ϗ γὰρ (Γεωμ. 508) συνημ. (ψ + δψ) = συνημ. ψ × συνημ. δψ — ἡμ. ψ × ἡμ. δψ· ἐπεὶ ȣ͂ν ἡμ. δψ = δψ, ϗ συνημ δψ = 1· ἄρα δ (συνημ. ψ) = συνημ ψ — δψ × ἡμ ψ — συνημ. ψ

$= -\delta\psi \times \text{ἡμ.}\ \psi$, τοῦτ' ἐστι „τὸ ἀπειροστὸν συνημιτόνου γωνίας, ἧς ἡ ἀκτὶς ὑποτίθεται $= 1$, εὑρίσκεται, πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀπειροστοῦ τῆς γωνίας (λειπτικῶς μέντοι λαμβανομένου) ἐπὶ τὸ ἡμίτονον αὐτῆς."

37. ΣΧΟΛΙΟΝ Τῶν οὖν ἐκτεθέντων δυοῖν προβλημάτων, τοῦ μὲν τὴν λύσιν ἐμφαίνει ὁ τύπος $\delta(\text{ἡμ.}\psi) = \delta\psi \times \text{συνημ.}\ \psi$· τοῦ δὲ δευτέρου, ὁ $\delta(\text{συνημ.}\ \psi) = -\delta\psi \times \text{ἡμ.}\ \psi$· τούτοις δὲ τοῖς δυσὶ τύποις χειραγωγούμενοι εὑρεῖν δυνάμεθα τὰ ἀπειροστὰ ἁπάσης ποσότητος συγκειμένης ἐξ ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων, παραλαμβάνοντες εἰς τοῦτο καὶ τοὺς προαποδοθέντας κανόνας· οὕτως εἰς εὕρεσιν τοῦ ἀπειροστοῦ τοῦ συνημ. 3ψ, πορισθήσεται $\delta(\text{συνημ.}\ 3\psi) = -3\delta\psi \times \text{ἡμ.}\ 3\psi$· ὡσαύτως $\delta(\text{συνημ.}\ \mu\psi)$ (τοῦ μ ἐμφαίνοντος ἀριθμὸν ἄτρεπτον) $= -\mu\delta\psi \times \text{ἡμ.}\ \mu\psi$, καὶ $\delta(\text{ἡμ.}\ \mu\psi) = \mu\delta\psi \times \text{συνημ.}\ \mu\psi$· ὁμοίως $\delta(\text{ἡμ.}\ \psi \times \text{συνημ.}\ \tau) = \text{συνημ.}\ \tau \times \delta(\text{ἡμ}\ \psi) + \text{ημ.}\ \psi \times \delta(\text{συνημ.}\ \tau) = \delta\psi \times \text{συνημ.}\ \tau \times \text{συνημ.}\ \psi - \delta\tau \times \text{ἡμ.}\ \psi \times \text{ἡμ.}\ \tau$· καὶ $\delta(\text{ἡμ.}\ \psi)^{\mu} = \mu\,(\text{ἡμ.}\ \psi)^{\mu-1}\,\delta(\text{ἡμ.}\ \psi) = \mu\delta\psi \times \text{συνημ.}\ \psi\ (\text{ἡμ.}\ \psi)^{\mu-1}$.

38. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Εὑρεῖν τὸ ἀπειροστὸν τῆς ἁπτομένης γωνίας τῆς ψ.

ΛΥΣΙΣ. Τῆς ἀκτῖνος ὑποτιθεμένης $= 1$ ἡ ἁπτομένη τῆς γωνίας ψ ἔσται $\chi\ \dfrac{\text{ἡμ.}\ \psi}{\text{συνημ.}\ \psi}$ (Γεωμ. 502)· ἔσται ἄρα $\delta\left(\dfrac{\text{ἡμ.}\ \psi}{\text{συνημ.}\ \psi}\right) = ((\text{ἡμ}\ \psi)\ (\text{συνημ.}\ \psi)^{-1}) =$ $\delta\psi \times \text{συνημ}\ \psi = (\text{συνημ.}\ \psi)^{-1} + \delta\psi \times (\text{ημ.}\ \psi)^{2} \times (\text{συνημ.}\ \psi)^{-2} = \dfrac{\delta\psi \times \text{συνημ.}\ \psi}{\text{συνημ.}\ \psi} + \dfrac{\delta\psi(\text{ἡμ.}\ \psi)^{2}}{(\text{συνυμ.}\ \psi)^{2}} =$

$$\frac{\delta\psi \times (\text{συνημ.}\ \psi)^2 + \delta\psi \times (\text{ἡμ.}\ \psi)^2}{(\text{συνημ.}\ \psi)^2} = \frac{\delta\psi}{(\text{συνημ.}\ \psi)^2} \cdot$$

ἐπεὶ γὰρ $(\text{συνημ.}\ \psi)^2 + (\text{ἡμ.}\ \psi)^2 = 1$ · εἴγε ἡ ἀκτὶς ὑποτείνει ὀρθὴν γωνίαν, τὴν περιεχομένην ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου · τοῦτ' ἔςι „τὸ ἀπειροςὸν ἀ-„πτομένης γωνίας, ἧς ἡ ἀκτὶς ὑποτίθεται $= 1$, ἔςιν ἴσον „τῷ πηλίκῳ τῷ προϊόντι ἐκ τῆς διαιρέσεως τȣ̃ ἀπειροςȣ̃ „ταύτης τῆς γωνίας, διαιρεθέντος διὰ τȣ̃ τετραγώνȣ τȣ̃ „ἀπό τȣ̃ συνημιτόνȣ αὐτῆς.“

39. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἄρα ἀπειροςὸν ἁπάσης γωνίας ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τȣ̃ ἀπειροςȣ̃ τῆς ἁπτομένης αὐτῆς ϗ τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ συνημιτόνȣ τετραγώνȣ · ἐπεὶ γὰρ

$$\delta\left(\frac{\text{ἡμ.}\ \psi}{\text{συνημ.}\ \psi}\right),\ \text{εἴτ' ȣ̃ν}\ \delta\,(\text{ἁπ.}\,\psi) = \frac{\delta\psi}{(\text{συνημ.}\ \psi)^2},$$

ἄρα $\delta\psi = (\text{συνημ.}\ \psi)^2 \times \delta\,(\text{ἁπ.}\ \psi)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Τὸ ἀπειροςὸν τῆς συναπτομένης γωνίας τῆς ψ εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ συναπτομένη γωνίας τῆς ψ ἔςι (Γεωμ. 502) $= \dfrac{\text{συνημ.}\ \psi}{\text{ἡμ.}\ \psi}$ · ἔςω ȣ̃ν συνημ. $\psi = \chi$, ϗ ἡμ. $\psi = \upsilon$. ȣ̓κȣ̃ν ἔςαι $\delta\left(\dfrac{\text{συνημ.}\ \psi}{\text{ἡμ.}\ \psi}\right) = \delta\left(\dfrac{\chi}{\upsilon}\right) = \dfrac{\upsilon\delta\chi - \chi\delta\upsilon}{\upsilon^2}$

$$(20) = \frac{-\delta\psi \times (\text{ημ.}\ \psi)^2 - \delta\psi \times (\text{συνημ.}\ \psi)^2}{(\text{ημ.}\ \psi)^2} =$$

$$\frac{-\delta\psi \times \left((\text{ἡμ.}\ \psi)^2 + (\text{συνημ.}\ \psi)^2\right)}{(\text{συνημ.}\ \psi^2)} = \frac{-\delta\psi}{(\text{συνημ.}\ \psi)^2},$$

ἐπεὶ, ὃ ϗ ἀνωτέρω εἴρηται, $(\text{ἡμ.}\ \psi)^2 + (\text{συνημ.}\ \psi)^2 = 1$. „Τὸ ἄρα ἀπειροςὸν συναπτομένης γωνίας τινὸς, ἧς ἡ „ἀκτὶς ὑποτίθεται $= 1$, ἐξισȣ̃ται τῷ πηλίκῳ τȣ̃ τῆς αὐ-

„τῆς γωνίας ἀπειροςȣ̃ (λειπτικῶς μέντοι λαμβανομένȣ),
„διαιρεθέντος διὰ τȣ̃ τετραγώνȣ τȣ̃ ἀπὸ τȣ̃ ἡμιτόνȣ ταύ-
„της τῆς γωνίας.“

41. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν δέ γε χρῆσιν τῶν δε τῶν ἀπειροςῶν τρανῶς εἰσόμεθα προϊόντες ἐπὶ τὰ πρόσθεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ λογαριθμικῶν ἀπειροςῶν.

42. Λογάριθμοί εἰσιν, ἧπερ εἴρηται ἐν τῷ συμβολικῷ λογισμῷ (313), σειρὰ ἀριθμῶν κατὰ πρόοδόν τινα ἀριθμητικὴν προϊȣ̃σα, ἧς ἕκαςος ὅρος ἀντιςοιχεῖ ἑκάςῳ ὁμοταγεῖ ὅρῳ σειρᾶς, κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν προϊούσης· ἔςωσαν ȣ̃ν υ καὶ υ' ὅροι προσεχεῖς προόδȣ γεωμετρικῆς, ἧς, πηλίκον μέν ἐςι π, πρῶτοι δὲ ὅροι οἱ α, α'. ἔςωσαν δὲ ϗ χ, χ' ὅροι προσεχεῖς προόδȣ ἀριθμητικῆς, ἧς β, β' εἰσὶν οἱ δύω ἀρκτικοὶ ὅροι· ὑποτεθείσθωσαν δὲ οἱ χ, χ' τȣ̀ς αὐτȣ̀ς κατέχειν χώρȣς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ προόδῳ, ȣ̃ς ϗ οἱ υ, υ' ἐν τῇ γεωμετρικῇ· τοιγαρȣ̃ν οἱ χ, χ' εἰσὶ λογάριθμοι τῶν υ, υ'· κατὰ τοίνυν τὴν ἰδιότητα τῆς γεωμετρικῆς προόδȣ (Συμβ Λογ. 227) ἐςιν $\upsilon' = \upsilon\pi$, ϗ $\alpha' = \alpha\pi$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει τῆς τȣ̃ π δυνάμεως, θηρευομένης ἐκ τῆς δευτέρας, ἔςαι $\upsilon' = \frac{\alpha'\upsilon}{\alpha}$, εἴτ' ȣ̃ν $\frac{\upsilon'}{\upsilon} = \frac{\alpha'}{\alpha}$· ὑποτεθείσθω ἤδη ἡ τῶν υ', υ διαφορὰ $= \psi$, εἴτ' ȣ̃ν $\upsilon' = \upsilon + \psi$· ποριοθήσεται τοίνυν $\frac{\upsilon+\psi}{\psi}$, ἢ $1 + \frac{\psi}{\upsilon} = \frac{\alpha'}{\alpha}$, ϗ ἑπομέ-

νῶς $\frac{\psi}{\upsilon} = \frac{\alpha'}{\alpha} - 1 = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha}$, καὶ δὴ $\frac{\alpha\psi}{\upsilon} = \alpha' - \alpha$· ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ἰδιότητος ἔςι $\chi' - \chi = \beta' - \beta$ (Συμϐ. Λογ. 192).

43. Πρὸς εὕρεσιν δὲ τȣ͂ πρὸς ἀλλήλας λόγȣ τῶν δύω τȣ́των προόδων, ὑποθώμεθα τὴν διαφορὰν $\alpha' - \alpha$ τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς πρώτης λόγον ἔχειν πρὸς τὴν διαφορὰν $\beta' - \beta$ τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς δευτέρας, ὃν ἡ μονὰς πρὸς ἀριθμόν τινα μ, τȣ͂τ᾽ ἔςιν $\alpha' - \alpha : \beta' - \beta :: 1 : \mu$, ὅθεν $\mu(\alpha' - \alpha) = \beta' - \beta$· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ ἐςχάτῃ ἐξισώσει ἀντικαθιςάντες ἀντὶ $\alpha' - \alpha$, καὶ $\beta' - \beta$ τὰς ἀνωτέρω εὑρημένας αὐτῶν δυνάμεις, ἕξομεν $\frac{\mu\alpha\psi}{\upsilon} = \chi' - \chi$, ἐξίσωσιν, ἥτις ἐν γένει παρίςησι τὸν ἁπάσης γεωμετρικῆς προόδȣ πρὸς πᾶσαν αὐτῇ συςοιχȣ͂σαν ἀριθμητικὴν πρόοδον λόγον.

44. Ἐπινοήσωμεν ἤδη ἑκατέρας προόδȣ τȣ̀ς ὅρȣς ἀπείρως προσεχεῖς ἀλλήλων· ἐκȣ͂ν ψ, ὃ ἐμφαίνει τὴν διαφορὰν τῶν υ', υ, ἔσεται $= \delta\upsilon$, ϗ $\chi' - \chi$, ὃ δηλοῖ τὴν τῶν χ', χ διαφορὰν, ἔςαι $= \delta\chi$· ἐντεῦθεν ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα ἐξίσωσις μεταϐαλεῖ εἰς $\frac{\mu\alpha\delta\upsilon}{\upsilon} = \delta\chi$· τὸ δὲ μ, ὃ παρίςησι τὸν λόγον τῆς διαφορᾶς τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδȣ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς, ȣ̓δὲν ἧττον ἔςαι ἀριθμὸς πεπερασμένος, καίτοι ἀπειροςῶν ȣ̓σῶν τῶν διαφορῶν· εἴγε δυεῖν ἀπειροςῶν ποσοτήτων ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιέχειν δύναται, ὁσάκις ϗ πεπερασμένη πεπερασμένην ποσότητα (9).

45. Ἡ ἄρα ἐξίσωσις $\frac{\mu \alpha \delta \upsilon}{\upsilon} = \delta \chi$ τρανῶς ἐκδιδάσκει, ὅτι τὸ ἀπειροςὸν δχ λογαρίθμȣ ἀριθμȣ̃ παντὸς, ἐμφαινομένȣ διὰ υ, ἰσȣ̃ται τῷ ἀπειροςῷ δυ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃, διαιρεθέντι διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃ υ, ϗ πολλαπλασιαϑέντι ἐπί τε τὸν πρῶτον ὅρον α τῆς εἰς βάσιν ὑποτεθείσης γεωμετρικῆς προόδȣ, ϗ τὸν ἀριθμὸν μ, ὃς ἐμφαίνει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ διαφορὰ τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδȣ πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς· τȣ̃ δὲ ἀριθμȣ̃ μ ὁριϑέντος, ὁ λόγος τῶν δύω προόδων καλεῖται μέτρον (module).

46. Δῆλον ἄρα, ὅτι κατὰ τὴν ὑποτιθεμένην δύναμιν τȣ̃ μ ϗ τȣ̃ πρώτȣ ὅρȣ α τῆς γεωμετρικῆς προόδȣ, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς υ διαφόρȣς λογαρίθμȣς ἔχειν δύναται· ἀλλὰ γὰρ πάντων, ὡς εἰπεῖν, τῶν λογαριθμικῶν συςημάτων εὐχρηςότερον ὑπάρχει ἐν τοῖς συμβολικοῖς λογισμοῖς, ἐȃν περ ὁ μὲν πρῶτος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδȣ ἐςὶ 1, τὸ δὲ μέτρον ϗ αὐτὸ 1· τηνικαῦτα δὲ ἡ γενικὴ πάντων τῶν λογαριθμικῶν συςημάτων ἐξίσωσις $\frac{\mu \alpha \delta \upsilon}{\upsilon} = \delta \chi$ γίνεται $\frac{\delta \upsilon}{\upsilon} = \delta \chi$.

47. Ἐν ἄρα τῷ λογαριθμικῷ συςήματι, ᾧ χρώμεθα ἐν ταῖς διὰ τȣ̃ συμβολικȣ̃ λογισμȣ̃ πράξεσι, τὸ ἀπειροςὸν δχ τȣ̃ λογαρίθμȣ χ παντὸς ἀριθμȣ̃ τȣ̃ υ ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπειροςῷ δυ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃ υ, διαιρεθέντι διὰ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἀριθμȣ̃ υ· ϗ αὕτη βάσις οἱονεὶ προκαταβάλλεται, ἐφ᾽ ἣν εὐχερῶς ἐποικοδομεῖται ἡ εὕρεσις ἀπειροςȣ̃ λογαρίθμȣ ἁπάσης συμβολικῆς ποσότητος· ἀλλὰ γὰρ πρὶν ἢ ταύ-

τῃ χρησώμεθα, ἰσέον, Α΄. ὡς οἱ, περὶ ὧν ἐνταῦθα ὁ λόγος, λογάριθμοι ἐκ εἰσὶν οἱ ἐν τοῖς κανονίοις· ἄλλοι δὲ, οἷς ἐπώνυμον ὑπερβολικοὶ, περὶ ὧν ἔφθημέν τε εἰπόντες (Υ΄ψ. Γ.201, κτ. ..) κ̇ ἐρῦμεν δὲ ἐν τοῖς ἐφεξῆς· ἀπὸ μέντοι τέτων ἐπ᾽ ἐκείνες ἐ δυσχερὲς μεταβαίνειν, ὡς κ̇ τῦτο ἔγνομεν κ̇ ὀψόμεθα ἐν τοῖς ἐφεξῆς. Β΄. ἐπεὶ ὁ πρῶτος ὅρος β τῆς ἀριθμητικῆς προόδε ἐχ᾽ εὑρίσκεται ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\mu\alpha\delta\upsilon}{\upsilon}$ $=\delta\chi$, αὕτη τε ἡ γενικὴ ἐξίσωσις, κ̇ δὴ κ̇ ἡ μερικὴ $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon}=\delta\chi$, ἀείποτε μενῦσιν ἐπικρατῦσαι, ὅστις ἂν ᾖ ὁ πρῶτος ὅρος β, τῦτ᾽ ἔστιν ὁ λογάριθμος τῦ πρώτε ὅρε α τῆς γεωμετρικῆς προόδε· δυνάμεθα ἄρα διὰ τὸ εὐχερέστερον κ̇ ἁπλέστερον ὑποθέσθαι τὸν λογάριθμον τῦ πρώτε ὅρε τῆς γεωμετρικῆς προόδε ἴσον τῷ μηδενί· ἐπεὶ δὲ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς προόδε ὑπεθέμεθα ἴσον μονάδι, ἕξομεν ἄρα τὸ μηδενικὸν λογάριθμον τῆς μονάδος· λαμβάνοντες ἓν, τὴν μὲν μονάδα ὡς πρῶτον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς προόδε, τὸ δὲ μηδενικὸν ὡς πρῶτον ὅρον τῆς ἀριθμητικῆς, ἢ ὡς λογάριθμον τῆς μονάδος, ῥᾷστα ἐνταῦθα ἐφαρμόζομεν τὲς ἀποδοθέντας κανόνας (Συμβ. Λογ. 362)· ὅτω; ἓν (τῦ λ ἐμφαίνοντος λογάριθμον) ἀντὶ λ (αβ) λαβεῖν δυνάμεθα $\lambda\alpha+\lambda\beta$· κ̇ $\lambda\,\frac{\alpha}{\beta}=\lambda\alpha-\lambda\beta$· κ̇ $\lambda\alpha^{\mu}=\mu\lambda\alpha$· κ̇ $\lambda\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\lambda\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{\mu}{\nu}\lambda\alpha$· τέτων τεθέντων.

48. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Λογαρίθμε ἀριθμῦ δοθέντος, εὑρεῖν αὐτῦ τὸ ἀπειροστόν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐ'ςιν ἐν (47) $\delta\lambda\chi = \frac{\delta\chi}{\chi}$, ϗ $\delta\lambda\,(\alpha+\chi) = \frac{\delta(\alpha+\chi)}{\alpha+\chi} = \frac{\delta\chi}{\alpha+\chi}$, καὶ $\delta\lambda\,(\frac{\alpha}{\alpha+\chi}) = \delta\,(\lambda\alpha - \lambda\,(\alpha+\chi)) = -\frac{\delta(\alpha+\chi)}{\alpha+\chi} = -\frac{\delta\chi}{\alpha+\chi}$, ἔνθα δῆλον, ὅτι τὸ τῆς ἀτρέπτȣ ποσότητος λα ἀπειροςὸν ἔςι μηδέν· ὡσαύτως $\delta\lambda\,\frac{1}{\chi} = \delta\,(\lambda 1 - \lambda\chi) = -\frac{\delta\chi}{\chi}$· καὶ $\delta\lambda\,(\chi^2) = \delta\,(2\lambda\chi) = \frac{2\delta\chi}{\chi}$· ϗ $\delta\lambda\,(\chi\upsilon) = \delta\,(\lambda\chi + \lambda\upsilon) = \frac{\delta\chi}{\chi} + \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$· ϗ $\delta\,(\lambda\frac{\chi}{\upsilon}) = \delta\,(\lambda\chi - \lambda\upsilon) = \frac{\delta\chi}{\chi} - \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$· ϗ $\delta\lambda\,(\frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi}) = \delta\,(\lambda(\alpha+\chi) - \lambda(\alpha-\chi)) = \frac{\delta\chi}{\alpha+\chi} + \frac{\delta\chi}{\alpha-\chi}$· ϗ $\delta\,(\lambda\,(\alpha\alpha+\chi\chi)) = \frac{\delta(\alpha\alpha+\chi\chi)}{\alpha\alpha+\chi\chi} = \frac{2\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi}$· ϗ $\delta\lambda\,\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)} = \frac{\delta\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}}{\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}} = \frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}} = \frac{\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi}$, ἢ ϗ ȣ̃τω· $\delta\lambda\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)} = \delta\,(\frac{1}{2}\lambda\,(\alpha\alpha+\chi\chi)) = \frac{\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi}$· ϗ $\delta\lambda\,(\chi^{\mu}(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi} = \delta\,(\lambda\chi^{\mu} + \lambda\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}) = \delta\,(\mu\lambda\chi + \pi\lambda\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})) = \frac{\mu\delta\chi}{\chi} + \frac{\nu\pi\beta\chi^{\nu-1}\delta\chi}{\alpha+\beta\chi^{\nu}}$.

Ταὐτὶ τὰ βραχέα ὑποδείγματα ἱκανὰ, οἶμαι, χειραγωγῆσαι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀπειροστοῦ ἁπάσης ἄλλης δεδομένης λογαριθμικῆς ποσότητος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ ἀπειροστῶν τῶν κατὰ τὰς δεικτικὰς ποσότητας.

49. Δεικτικαὶ ἡμῖν ἤκουσαν αἱ ποσότητες, αἷς δείκτης ἐπιγέγραπται ἄστατος, οἷον γ^{χ}, χ^{υ} κτ· ἀφ' ὧν καὶ καμπύλαι ὡσαύτως προσηγορεύθησαν δεικτικαὶ (Τ'ψ. Γ. 321)· τούτων οὖν ἐνταῦθα κείσθω εὑρεῖν τὰ ἀπειροστά.

50. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ποσότητος δεικτικῆς τὸ ἀπειροστὸν ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπ' αὐτῆς τῆς δεικτικῆς ποσότητος, καὶ τοῦ ἀπειροστοῦ τοῦ κατ' αὐτὴν λογαρίθμου.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω γὰρ ποσότης δεικτικὴ $\chi^{\upsilon} = \psi$, καὶ τῶν ἑκατέρου μέλους λογαρίθμων ληφθέντων ἔσται $\lambda\chi^{\upsilon} = \lambda\psi$, καὶ ἑπομένως $\delta\lambda(\chi^{\upsilon}) = \frac{\delta\psi}{\psi}$ (48)· ἄρα $\delta\psi = \psi\delta\lambda(\chi^{\upsilon})$, εἴτ' οὖν (ἀντικαθισαμένων ἀντὶ ψ καὶ $\delta\psi$ τῶν κατ' αὐτὰ δυνάμεων) $\delta(\chi^{\upsilon}) = \chi^{\upsilon}\delta\lambda(\chi^{\upsilon})$· Ο. Ε. Δ.

51. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οὐκοῦν $\delta(\chi^{\upsilon}) = \chi^{\upsilon}\delta\lambda(\chi^{\upsilon}) = \chi^{\upsilon}\delta(\upsilon\lambda\chi) = \chi^{\upsilon}(\delta\upsilon\lambda\chi + \frac{\upsilon\delta\chi}{\chi})$· ὡσαύτως $\delta(\alpha^{\chi} + \upsilon^{\psi}) = \delta(\alpha^{\chi}) + \delta(\upsilon^{\psi}) = \alpha^{\chi}\delta(\lambda\alpha^{\chi}) + \upsilon^{\psi}\delta(\lambda\upsilon^{\psi}) = \alpha^{\chi}\delta(\chi\lambda\alpha) + \upsilon^{\psi}\delta(\psi\lambda\upsilon) = \alpha^{\chi}\delta\chi\lambda\alpha + \upsilon^{\psi}(\delta\psi\lambda\upsilon + \frac{\psi\delta\upsilon}{\upsilon}$· ὡσαύτως $\delta(\alpha\alpha + \chi\chi)^{\chi} = (\alpha\alpha + \chi\chi)^{\chi}\,\delta\chi(\alpha\alpha$

$+ \chi\chi)^{\chi} = (\alpha\alpha + \chi\chi)^{\chi} \delta(\chi\lambda(\alpha\alpha + \chi\chi)) = (\alpha\alpha +$ $\chi\chi)^{\chi} (\delta\chi\lambda(\alpha\alpha+\chi\chi) + \frac{2\chi^2\delta\chi}{\alpha\alpha + \chi\chi}$ · ϗ ἐφεξῆς ὁμοίως.

52. ΣΧΟΛΙΟΝ. Συχνάκις ἐν τῷ λογισμῷ εἰς χρῆσιν λαμβάνεται ἡ δεικτικὴ ποσότης κ^{χ}, τȣ̃ κ ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος, ȣ̃ λογάριθμος ἐςιν $= 1$· ταύτης ȣ̃ν τῆς ποσότητος ἀπειροςὸν ὑπάρχει (50) τὸ $\kappa^{\chi}\delta(\lambda\kappa^{\chi})$, εἶτ' ȣ̃ν $\kappa^{\chi}\delta(\chi\lambda\kappa) = \kappa^{\chi}.\ \delta\chi\lambda\kappa$· ἐπεὶ δὲ $\lambda\kappa = 1$ ἐξ ὑποθέσεως, ἡ ἔκθεσις ἐπὶ τὸ ἁπλȣ́ςερον μεταβαλεῖ, γινομένη $\delta(\kappa^{\chi}) = \delta\chi\kappa^{\chi}$, τȣ̃τ' ἔςιν „ αὕτη ἡ ἰδιαιτέρα δει„ κτικὴ ποσότης ἔχει ἀπειροςὸν τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῆς, „ ϗ τȣ̃ ἀπειροςȣ̃ τȣ̃ κατ' αὐτὴν δείκτȣ."

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Χρῆσις τῶν προεκτεθέντων κανόνων εἰς εὕρεσιν τῶν ἐν ταῖς καμπύλαις γραμμαῖς ἁπτομένων, ὑφαπτομένων, ὑποκαθέτων κτ.

53. Ἵνα δὲ γνωσθῇ ἡ χρῆσις τῶν προαποδεδομένων κανόνων, ἐφαρμοςέον ἂν εἴη τȣ́τȣς ὑποδείγμασι γεωμετρικοῖς τε ϗ τοῖς ἐκ τȣ̃ συμβολικȣ̃ λογισμȣ̃, ἃ γνωςάπως ἡμῖν ἐγένετο ἐκ τῶν προεκτεθεισῶν πραγματειῶν.

54. Ἵνα καμπύλης ἁπάσης τῆς ΑΜ (σχ. 164) εὐθεῖαν ἁπτομένην ἄξωμεν, ἐκληπτέον τὴν καμπύλην ταύτην ἴσα καὶ πολύγωνον, ἐξ ἀπειραρίθμων ἀπειροςῶν πλευρῶν συγκροτȣ́μενον· μία δὲ τῶν πλευρῶν τῶν δε ἡ

Μμ (ἣν ἐπινοητέον παντὸς δεδομένȣ ποσȣ̃ ἐλάσσονα) προαχθεῖσα, ϗ γενομένη ΤΜ, καλεῖται ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης· διορίζεται δὲ αὕτη ἐφ᾽ ἑκάςȣ σημείȣ Μ λαμβανομένης τῆς δυνάμεως τῆς κατὰ τὴν ὑφαπτομένην ΠΤ, εἴτ᾽ ȣ̃ν τὸ μέρος τῆς γραμμῆς τῶν ἀποτετμημένων, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπό τε τῆς τεταγμένης ΠΜ, ϗ τȣ̃ σημείȣ Τ, καθ᾽ ὃ ἡ ἁπτομένη προαχθεῖσα ἀπαντᾷ τῇ γραμμῇ τῶν ἀποτετμημένων ϗ αὐτῇ προαχθείσῃ· ἰδȣ̀ δὴ ὅπως ἡ ὑφαπτομένη διορίζεται.

55. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τὴν ὑφαπτομένην ἁπάσης καμπύλης εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἐν γένει καμπύλη ἡ ΑΜ· ἤχθω ȣ̃ν τεταγμένως ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ ΠΜ $=$ υ, ϗ ταύτῃ ἀπείρως προσεχῶς ἡ Πμ, ϗ ἤχθω ἡ Μρ $=$ Ππ παράλληλος τῷ ἄξονι ΑΠ· ϗ δὴ ἔςαι ΑΠ $=$ χ, ϗ Ππ $=$ Μρ $=$ δχ, ϗ ρμ (εἴτ᾽ ȣ̃ν διαφορὰ τῆς πμ ὑπὲρ τὴν ΠΜ) $=$ δυ· τὸ δὲ μέρος Μμ τῆς ἁπτομένης, ἀπειροςὸν ὄν, ἐκληφθῆναι δύναται ὡς συμπεπτωκὸς τῷ συςοίχῳ τῆς καμπύλης μέρει, ᾧπερ ἐκλαμβάνεται ἴσον· τῶν ȣ̃ν τριγώνων Μρμ, ΤΜΠ ὁμοίων ὄντων, ἔςαι ρμ : ρΜ :: ΠΜ : ΠΤ, εἴτ᾽ ȣ̃ν δυ : δχ :: υ : ΠΤ $= \frac{υδχ}{δυ}$ (Β), τύπος γενικὸς ἁπάσης ὑφαπτομένης· τȣτȣ̀ δὲ εἰσαχθείσης τῆς δυνάμεως τȣ̃ δχ, εὑρισκομένης ἐκ τῆς κατὰ τὴν προκειμένην καμπύλην ἐξισώσεως, ποριθήσεται ὁ τύπος τῆς ὑφαπτομένης ΠΤ ἐλεύθερος ἀπειροςῶν, ὡς ἐκ τῶν ἐφεξῆς ὑποδειγμάτων δῆλον γενήσεται.

56. Ἔςω ἡ καμπύλη παραβολὴ, ἧς ἐξίσωσις $υ^2 = πχ$· ταύτης δὲ ἀπειροςά εἰσι $2υδυ = πδχ$, ὅθεν δχ

$= \frac{2\upsilon\delta\upsilon}{\pi}$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἀντὶ $\delta\chi$ ἐν τῷ τύπῳ Β, εὑρίσκεται $\frac{2\upsilon^2\delta\upsilon}{\pi\delta\upsilon} = \frac{2\upsilon^2}{\pi} = \frac{2\pi\chi}{\pi} =$ 2χ, εἴγε $\upsilon^2 = \pi\chi$, εἴτ' οὖν ἡ ὑφαπτομένη τῆς παραϐολῆς διπλασία ἐςὶ τῆς ἀποτετμημένης, ὃ δήπε καὶ ἐν ταῖς κωνικαῖς τομαῖς δέδεικται (Υψ. Γ. 45).

57. Ε"ςω ἡ καμπύλη παραϐολὴ παντὸς γένους, ἧς ἐξίσωσις $\alpha^\mu \chi^\nu = \upsilon^{\mu+\nu}$· ταύτης δὲ ἀπειροςά εἰσι $\alpha^\mu \chi^{\nu-1} \delta\chi = (\mu + \nu)\, \upsilon^{\mu+\nu-1} \delta\upsilon$· ὅθεν $\delta\chi = \frac{(\mu+\nu)\,\upsilon^{\mu+\nu-1}\,\delta\upsilon}{\nu\alpha^\mu \chi^{\nu-1}}$· ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως ἀντικαταςαθείσης ἐν τῷ Β τύπῳ, εὑρίσκεται $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{\mu+\nu}{\nu} \times \frac{\upsilon^{\mu+\nu}}{\alpha^\mu \chi^{\nu-1}} = \frac{\mu+\nu}{\nu} \times \frac{\alpha^\mu \chi^\nu}{\alpha^\mu \chi^{\nu-1}}$ (τιθεμένης ἀμέλει τῆς τοῦ $\upsilon^{\mu+\nu}$ δυνάμεως) $= (\frac{\mu+\nu}{\nu}).\ \chi$· ἐὰν δὲ μ μὲν ᾖ $=3$, ν δὲ $=2$, ἔςαι ΠΤ $= \frac{5\chi}{2}$.

58. Ἡ ἐξίσωσις $\alpha^\mu\chi^\nu = \upsilon^{\mu+\nu}$ γίνεται $\alpha^\mu\chi^{-\nu} = \upsilon^{\mu-\nu}$, ὑποτιθεμένου λειπτικοῦ τοῦ ν· καὶ τηνικαῦτα ἔςαι $\alpha^\mu = \upsilon^{\mu-\nu}\chi^\nu$ (σημείωσ. τοῦ §. 20. τῆς Υψ. Γ) ἐξίσωσις παντὸς γένους ὑπερϐολῶν ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις· ἡ δὲ ὑφαπτομένη ΠΤ (σχ. 165) ἔςαι $\frac{\mu-\nu}{-\nu} = \frac{M}{-\nu}$ (ὑποτιθεμένου $M = \mu - \nu$)· ἐὰν δὲ ᾖ $M = 1$, καὶ $\nu = 1$, ὡς ἐπὶ τῆς πρωτογενοῦς ὑπερϐολῆς, ἔςαι ΠΤ $= -\chi$, εἴτ' οὖν ἡ ὑφαπτομένη ἴση ἔςαι τῇ ἀποτετμημένῃ, διὰ μέντοι τὸ

— σύμβολον ληπτέον τὴν ὑφαπτομένην ἐκ τῶν ἀντιθέτων μερῶν τῆς ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων· ἐὰν δὲ ᾖ Μ = 7 ϗ ν = 2, ἔςαι ΠΤ = $\frac{-7\chi}{2}$· εἰ δ' εἴη Μ μὲν = 20, ν δὲ = 4, εὑρεθήσεται ΠΤ = — 5χ· ϗ ἐν γένει „ἡ „ὑφαπτομένη τῶν ὑπερβολῶν ἀεί ἐςιν ἴση τῷ γινομένῳ „ὑπὸ τῆς ἀποτετμημένης ϗ τȣ̃ δείκτȣ τῆς τεταγμένης, „διαιρεθέντι διὰ τȣ̃ δείκτȣ τῆς ἀποτετμημένης, λειπτι„κῶς λαμβανομένȣ.“

59. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὴν ὑφαπτομένην τῆς κυκλοειδȣ̃ς (σχ. 166).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθωσαν προσεχέςαται ἀλλήλων αἱ τεταγμέναι ΜΠ, μπ· ϗ ἡ μὲν ΠΤ ἁπτέσθω κατὰ τὸ Π τȣ̃ γεννήτορος κύκλȣ, ἡ δὲ ΜΤ τῆς καμπύλης κατὰ τὸ Μ· τὰ τοίνυν τόξα Ππ, Μμ ἐκληφθῆναι δύνανται ὡς μέρη ἀπειροςὰ τῶν ἁπτομένων ΠΤ, μΤ· ϗ ἐὰν ἀχθῇ ἡ Μσ παράλληλος τῇ ΤΠ, τὰ τρίγωνα Μσμ, ΤΜΠ ὅμοια ἔσονται· ϗ δὴ μσ : Μσ :: ΜΠ : ΜΤ· ἀλλὰ διὰ τὰς παραλλήλȣς Ππ, Μσ, ϗ ΜΤ, μσ ἐςὶν (ὑποτιθεμένȣ τȣ̃ τόξȣ ΒΠ = χ, ϗ ΠΜ = υ) μσ = δυ, ϗ Ππ = Μσ = δχ· ἄρα δυ : δχ :: υ : ΠΤ = $\frac{\delta\chi\upsilon}{\delta\upsilon}$ = υ, εἴγε δυ = δχ, διὰ τὸ εἶναι υ = χ (Υ΄ψ. Γεωμ. 333)· ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῆς ἁπτομένης τȣ̃ γεννήτορος κύκλου ληφθῇ ΠΤ ἴση τῇ τεταγμένῃ υ, ἔςαι αὕτη ὑφαπτομένη τῆς κυκλοειδȣ̃ς.

60. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Εὑρεῖν τὴν ὑφαπτομένην τῆς λογαριθμικῆς ΒΜ (σχ. 167).

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης τῆς καμπύλης (Υ΄ψ. Γεωμ. 320), ὅταν αἱ ἀποτετμημέναι ΑΠ, Απ, ΑΞ, Αξ, ὦσιν ἐν προόδῳ ἀριθμητικῇ, αἱ συςοιχȣ̃σαι τεταγ-

μέναι εἰσὶν ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ, ὥςτε τὰς ἀποτετμημένας λογαρίθμȣς εἶναι τῶν συςοιχȣσῶν τεταγμένων· ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ ΠΜ $= \upsilon$, ἔςαι $\pi\mu = \pi\mathrm{P} + \mathrm{P}\mu = \upsilon + \delta\upsilon$· ϗ ἐὰν ὑποτεθῇ ΞΝ $= \psi$, ἔςαι $\xi\nu = \psi + \delta\psi$· ἐπεὶ ȣ̃ν αἱ ἀποτετμημέναι ΑΠ, Απ, ΑΞ, Αξ ὑποτίθενται ἐν προόδῳ ἀριθμητικῇ, ἔςαι (ὑποτιθεμένης τῆς ΑΠ $= \chi$, ϗ Ππ $= \delta\chi =$ Ξξ) $\upsilon : \upsilon + \delta\upsilon :: \psi : \psi + \delta\psi$· ἄρα $\upsilon : \delta\psi :: \psi : \delta\upsilon$, ὅθεν $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{\delta\psi}{\psi}$· ἀλλ' ἡ ὑφαπτομένη ΠΤ $= \frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ὑφαπτομένη $\Xi\tau = \frac{\psi\delta\chi}{\delta\psi}$, εἴγε Ξξ $=$ $\delta\chi$· ἀλλὰ $\frac{\upsilon}{\delta\upsilon} = \frac{\psi}{\delta\psi}$· ἄρα $\Xi\tau = \frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon} = \mathrm{\Pi T}$, τȣτ' ἔςιν „αἱ διαφόροις τεταγμέναις ἀντιςοιχȣ̃σαι ὑφαπτόμεναι „εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις, εἴτ' ȣ̃ν ἡ τῆς λογαριθμικῆς ὑφ„απτομένη ἔςιν ἄτρεπτος.“

ΑΛΛΩΣ. Ἐπείπερ αἱ μὲν τεταγμέναι ἀριθμȣ̀ς, αἱ δ' ἀποτετμημέναι λογαρίθμȣς, ἐμφαίνȣσι, τὸν δὲ τῶν ἀριθμῶν πρὸς τȣ̀ς λογαρίθμȣς λόγον ἐμφαίνει ἡ ἐξίσωσις $\frac{\alpha\mu\delta\upsilon}{\upsilon} = \delta\chi$ (43, 44)· ἡ αὐτὴ ἄρα παρίςησι ϗ τὴν λογαριθμικὴν καμπύλην· ἐντεῦθεν ἄρα προκύψει $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{\alpha\mu}{\upsilon}$, ϗ ἑπομένως ἡ ὑφαπτομένη $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$ γενήσεται $\frac{\alpha\mu\upsilon}{\upsilon} = \alpha\mu$· τȣ̃τ' ἔςιν „ἡ ὑφαπτομένη ΠΤ ἐφ' ἑκάςȣ σημείȣ τῆς λογ„αριθμικῆς ἔςιν ἄτρεπτος, ἰσȣμένη τοσάκις τῇ πρώτῃ τε„ταγμένῃ ΑΒ $= \alpha$, ὁσάκις ἡ μονὰς ἔνεσι τῷ μέτρῳ μ“.

61. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Εὑρεῖν τὴν ὑφαπτομένην

τῶν παντὸς γένες σπειρῶν, ὧν ἐξίσωσις ἐςὶ $\pi^{\nu}\upsilon^{\mu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu}$ (Υψ. Γεωμ. 331).

ΛΥΣΙΣ. Ἐμφαινέτω ἡ Αν (σχ. 168) πάντα τὰ εἴδη ταύτης τῆς καμπύλης· κ̀ ἤχθωσαν ἀπείρως προσεχεῖς αἱ ἀκτῖνες ΚΒ, Κπ, κ̀ κέντρῳ μὲν τῷ Κ διαςήματι δὲ τῷ Κν γεγράφθω τόξον ἐλάχισον τὸ μν, κ̀ ἤχθω ἁπτομένη ἡ ΝΤ· εὐθεῖα ἓν ἡ ΚΤ, ἡ τῇ ΒΚ κάθετος ἐφισαμένη, ἔςιν, ἣν ζητῦμεν, ἡ ὑφαπτομένη· γενέσθω δὲ τόξον τὸ Απ $= \chi$, κ̀ τῆς σπείρας ἡ ἀκτὶς $K\nu = \upsilon$, κ̀ $\pi B = \delta\chi$, κ̀ $N\nu = \delta\upsilon$· ἐκ δὲ δὴ τῶν ὁμοίων τομέων ΒΚπ, μΚν πρόεισι $K\pi = \alpha : K\nu = \upsilon :: \pi B = \delta\chi : \nu\mu = \frac{\upsilon\delta\chi}{\alpha}$· τῦ δὲ τόξυ νμ ἐκληφθέντος ὡς εὐθείας ἀπειροςῆς, καθέτυ τῇ $NK = \upsilon$, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΝΚΤ, Ννμ, ὅμοιά τε ἔσονται, κ̀ ταύτην τὴν ἀναλογίαν παρέξονται $N\mu = \delta\upsilon : \nu\mu = \frac{\upsilon\delta\chi}{\alpha} :: NK = \upsilon : KT = \frac{\upsilon\upsilon\delta\chi}{\alpha\delta\upsilon}$· ἀλλ' ἐκ τῆς γενικῆς ἐξισώσεως $\pi^{\nu} \times \upsilon^{\mu} = \alpha^{\mu} \times \chi^{\nu}$ πρόεισι $\mu\pi^{\nu}\upsilon^{\mu-\nu}\delta\upsilon = \nu\alpha^{\mu}\chi^{\nu-1} \times \delta\chi$, ὅθεν $\delta\chi = \frac{\mu\pi^{\nu}\upsilon^{\mu-1}\delta\upsilon}{\nu\alpha^{\mu}\chi^{\nu-1}}$· ἀντικαταςαθείσης ἄρα ταύτης τῆς δυνάμεως τῦ δχ ἐν τῷ τύπῳ τῆς ΚΤ, ποριοθήσεται $KT = \frac{\mu\pi^{\nu}\upsilon^{\mu+1}}{\nu\alpha^{\mu}\,\alpha\chi^{\nu-1}} = \frac{\mu\pi^{\nu}\upsilon^{\mu+1}\,\chi}{\nu\alpha^{\mu}\chi^{\nu}\alpha}$ (πολλαπλασιαζομένυ ἀμέλει τῦ τε ἀριθμητῦ κ̀ τῦ παρονομαςῦ ἐπὶ χ) $= \frac{\mu\alpha^{\mu}\chi^{\nu}\upsilon\chi}{\nu\alpha^{\mu}\chi^{\nu}}$ (ἀντικαθισαμένης τῆς δυνάμεως τῦ $\pi^{\nu}\upsilon^{\mu}$) $= \frac{\mu\chi\upsilon}{\nu\alpha}$.

Ἐὰν ἡ $\mu = \nu = 1$, ὥσπερ ἐπὶ τῆς Ἀρχιμηδείυ ἑλι-

κος, ἧς ἐξίσωσις $\pi\upsilon = \alpha\chi$ (Υψ. Γεωμ. 331), ἔϛαι ἡ ὑφαπτομένη $= \frac{\chi\upsilon}{\alpha}$· ἐντεῦθεν ἄρα $\alpha : \chi :: \upsilon :$ ΚΤ· ἐὰν δὲ ᾖ $\upsilon = \alpha$, ὃ συμβαίνει ἐπὶ τȣ͂ σημείȣ Α, τηνικαῦτα χ ἰσȣ͂ται τῇ περιφερείᾳ τȣ͂ γεννήτορος κύκλȣ, ϗ δὴ ΚΤ $= \frac{\chi\alpha}{\alpha} = \chi = \pi$· πορισθείη ἂν ἄρα γεωμετρικῶς γραμμὴ εὐθεῖα ἴση τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ, ϗ δὴ ὁ κύκλος τετραγωνισθήσεται, εἰ δυνατὸν ἦν ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ἀπτομένην τῆς Ἀρχιμηδείȣ ἕλικος κατὰ τὸ σημεῖον Α.

Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει $\pi^\nu \upsilon^\mu = \alpha^\mu \chi^\nu$ ὑποτεθῇ $\nu = -1$, ϗ $\mu = 1$, εὑρεθήσεται $\frac{\upsilon}{\pi} = \frac{\alpha}{\chi}$, εἴτ' ȣ͂ν $\upsilon\chi = \alpha\pi$· ἀντικαταϛαθεισῶν ȣ͂ν τῶν δυνάμεων τȣ͂ μ, ϗ ν ϗ $\upsilon\chi$ ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\mu\chi\upsilon}{\nu\alpha}$, εὑρεθήσεται Κτ $= -\pi$, τȣ͂τ' ἔϛιν „ἐν „ταύτῃ τῇ σπείρᾳ ἡ ὑφαπτομένη ἔϛιν ἄτρεπος, ἰσȣμένη „τῇ περιφερείᾳ τȣ͂ γεννήτορος κύκλȣ, ἢ τῷ τόξῳ π, εἰ „π μέρος τι ἐμφαίνει τῆς κυκλικῆς περιφερείας“· τὸ δὲ σύμβολον ἥκιϛα κατὰ μέγεθος ἀλλοιοῖ τὴν ὑφαπτομένην.

Εἰς δὲ εὕρεσιν τῆς ὑφαπτομένης ἐν τῇ λογαριθμικῇ σπείρᾳ, ἀναμνηϛέον, ὡς ἐν αὐτῇ τῆς ὑπὸ ΑΚΒ γωνίας, ἢ τȣ͂ τόξȣ ΑΒ $= \chi$, λογαρίθμȣ ὄντος τῆς συϛοίχȣ ἀκτῖνος ΚΝ (Υψ. Γεωμ. 331), ἔϛαι $\chi = \nu \cdot \Lambda \frac{\upsilon}{\pi} = \nu \cdot \Lambda \cdot \upsilon$ (ὑποτιθεμένης $\pi = 1$)· ἄρα $\delta\chi = \nu \cdot \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$ (48), ϗ ΚΤ $= \frac{\upsilon\upsilon\delta\chi}{\alpha\delta\upsilon} = \frac{\nu\upsilon}{\alpha}$· ὅθεν $\alpha : \nu :: \upsilon :$ ΚΤ· ἐὰν δὲ $\nu = 1 = \alpha$, ἔϛαι ΚΤ $= \upsilon$.

62. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Οὔσης τῆς ΑΥΝ παραβολῆς (σχ. 169), ϗ ἑτέρας καμπύλης δοθείσης τῆς ΑλΜ, ἧς αἱ τεταγμέναι μέσαι εἶεν ἀνάλογοι τῶν ἀποτετμημένων ΑΠ, ϗ τῶν συστοίχων τεταγμένων ΠΝ ἐν τῇ παραβολῇ, εὑρεῖν τὴν ὑφαπτομένην Πϐ ἐν τῇ καμπύλῃ ΑΜ.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἡ ἐν τῇ παραβολῇ τεταγμένη $= \upsilon$, ἡ δ' ἐν τῇ καμπύλῃ ΑΜ τεταγμένη $= \psi$, ϗ ἡ ἀποτετμημένη $\text{ΑΠ} = \chi$, ϗ τῆς παραβολῆς παράμετρος $= \pi$· ϗ δὴ ἔσται $\text{ΝΡ} = \text{Μ}\rho = \text{Π}\pi = \delta\chi$, ϗ $\nu\text{Ρ} = \delta\upsilon$, ϗ $\mu\rho = \delta\psi$· ἀπτέσθω δὲ τῆς καμπύλης ΑΜ ἡ Μβ· ἐκ τοίνυν τῶν ὁμοίων τριγώνων μρΜ, ΜΠβ πρόεισι $\delta\psi : \delta\chi ::$

$$\psi : \frac{\psi\delta\chi}{\delta\psi} = \text{Π}\beta$$ · ἀλλ' ἔστι διὰ τὴν φύσιν τῆς καμπύλης

$\upsilon : \psi :: \psi : \chi$, εἴτ' οὖν $\upsilon\chi = \psi^2$, $\upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon = 2\psi\delta\psi$,

$$\delta\psi = \frac{\upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon}{2\psi},$$ ἀντικαταστάσει ἄρα ταύτης τῆς τοῦ $\delta\psi$

δυνάμεως ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\psi\delta\chi}{\delta\psi}$, ποριωθήσεται $\text{Π}\beta = \frac{2\psi^2\delta\chi}{\upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon}$.

ἔστι δὲ ἡ τῆς παραβολῆς ἐξίσωσις $\upsilon^2 = \pi\chi$, $2\upsilon\delta\upsilon = \pi\delta\chi$,

$$\delta\chi = \frac{2\upsilon\delta\upsilon}{\pi}$$ · ἀντικατασταθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως

ἐν τῷ τύπῳ τῆς Πβ, γενήσεται $$\text{Π}\beta = \frac{\frac{4\psi\psi\upsilon\delta\upsilon}{\pi}}{\frac{2\upsilon\upsilon\delta\upsilon + \pi\chi\delta\upsilon}{\pi}}$$

$$= \frac{4\psi\psi\upsilon}{2\upsilon\upsilon + \pi\chi} = \frac{4\upsilon\upsilon\chi}{2\upsilon\upsilon + \upsilon\upsilon \cdot \frac{\pi}{\pi}}$$ (ἀντικαθισταμένης, ἐν μὲν

τῷ ἀριθμητῇ τῆς τοῦ $\psi\psi$ δυνάμεως, ἐν δὲ τῷ παρονομαστῇ

τῆς τȣ̃ χ) $= \frac{4\chi\upsilon^2}{2\upsilon^2 + \upsilon^2} = \frac{4\chi}{3}$. ἐὰν ἄρα ληφθῇ $A\beta = \frac{4\Pi A}{3}$, θηρευθήσεται ἡ Πβ ὑφαπτομένη. Ο. Ε. Π.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Δῆλον ἄρα, ὅπως ἄντις ποιήσειεν, εἴπερ ἡ καμπύλη ΑΝ εἴη ὑπερβολὴ, ἢ ἄλλη ἡτισȣ̃ν καμπύλη γεωμετρική.

63. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ὅταν τοιάδε ᾖ ἡ τῆς καμπύλης ἐξίσωσις, ὥςε τῆς χ αὐξȣ́σης ἐλαττȣ̃σθαι τὴν υ, τηνικαῦτα ἔςαι ἐν τῷ λογισμῷ — δυ, ϗ εἰς εὕρεσιν τῆς ὑφαπτομένης συμβάλλȣσα ἀναλογία γενήσεται $-\delta\upsilon : \delta\chi :: \upsilon : \Pi T = -\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$. τȣ́τῳ ȣ̃ν μόνῳ διοίσει τηνικαῦτα ὁ λογισμὸς, ὅτι ἡ ὑφαπτομένη πεσεῖται πρὸς τ' ἀντίθετα τῆς ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων, ὡς εἴδομεν κἀν (58)· ἀνθ' ὅτȣ δὴ τὸν τύπον $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$ ληπτέον ἀεὶ εἰς εὕρεσιν τῶν ὑφαπτομένων ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς καμπύλαις· ἐὰν δὲ μειῶνται αἱ τεταγμέναι, ἐκληπτέον λειπτικῶς τὸν τύπον $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$, ὅπερ δείκνυσι μετενεκτέον εἶναι τὴν ὑφαπτομένην πρὸς τἀναντία τῆς γενέσεως τῶν χ· ἐὰν, φέρε, ληφθῇ ἡ τȣ̃ κύκλȣ ἐξίσωσις, ἡ τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένων περιεκτικὴ, εἴτ' ȣ̃ν (Υψ. Γ. 93.) $\upsilon\upsilon = \frac{1}{4}\alpha\alpha - \chi\chi$, δῆλον, ὅτι τῆς ΚΠ αὐξȣ́σης (χ. 170), ἡ ΠΜ $=$ υ μειȣ̃ται, τοιγαρȣ̃ν ἡ ὑφαπτομένη ΠΤ πεσεῖται ἐπὶ τὰ λαιὰ τῆς ΠΜ, τῆς ἀρχῆς Κ τῶν ἀποτετμημένων κειμένης ἐν τοῖς δεξιοῖς· ὃ δὴ ϗ ὁ λογισμὸς βȣ́λεται· τὰ γὰρ τῆς προτεθείσης κυκλικῆς ἐξισώσεως ἀ-

πειροςὰ εἰσὶ $2\upsilon\delta\upsilon = -2\chi\delta\chi$, ϗ ἑπομένως $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{-\upsilon}{\chi}$. ἄρα $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{-\upsilon^2}{\chi} = \frac{-(\frac{1}{4}\alpha\alpha - \chi\chi)}{\chi}$. ἔνθα τὸ — ἐθέλει τὴν ὑφαπτομένην κεῖσθαι πρὸς τὰ ἐναντία μέρη, ἢ ἔνθα ἔκειτο διὰ τῦ +

64. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ΄.** Τὸν γενικὸν τύπον εὑρεῖν τῆς ἁπτομένης ἁπάσης καμπύλης (σχ. 164).

ΛΥΣΙΣ. Πρὸς πλείω εὐμάρειαν ὑποτεθείσθωσαν κάθετοι ἀλλήλαις αἱ χ ϗ αἱ υ· ϗ ἐπεὶ τὸ Μμρ τρίγωνον ὅμοιόν ἐςι τῷ ΤΠΜ, ἔςαι ρμ : Μμ :: ΠΜ : ΤΜ· ἐπεὶ δὲ ὀρθογώνιόν ἐςι τὸ Μρμ τρίγωνον, ἔςι $\text{Μμ} = \sqrt{((\rho\text{Μ})^2 + (\rho\mu)^2)} = \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$· ἄρα $\delta\upsilon : \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)} :: \upsilon : \text{ΤΜ} = \frac{\upsilon\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}}{\delta\upsilon} = \frac{\upsilon\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}}{\sqrt{(\delta\upsilon^2)}} = \upsilon\sqrt{(\frac{\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2}{\delta\upsilon^2})} = \upsilon\sqrt{(\frac{\delta\chi^2}{\delta\upsilon^2} + 1)}$· τοιγαρῦν τῶν ἀπειροςῶν ἐξισώσεως καμπύλης δεδομένης λαμβανομένων, ϗ ἀποφερομένης τῆς δυνάμεως τῦ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$, ϗ τῦ ἀπ᾽ αὐτῆς τετραγώνυ ἀντικαθιςαμένυ ἐν τῷ γενικῷ τύπῳ τῆς ἁπτομένης, πορισθήσεται ἡ ἁπτομένη περιέχυσα χ ϗ ποσότητας ἀτρέπτυς, ὡς ἑκάςῳ ἐφαρμόσαι ὑποδείγμασι τὸν τύπον ἕξεσιν· ἡμῖν δὲ τὰ κυριώτερα ἐκτιθεμένοις, ἰτέον ἐπὶ τὴν εὕρεσιν τῆς ὑποκαθέτυ.

65. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ΄.** Εὑρεῖν τὸν γενικὸν τύπον τῆς ὑποκαθέτυ ΠΞ ἁπάσης γεωμετρικῆς καμπύλης, ὀρθῆς ὑποτιθεμένης τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας (σχ. 164).

ΛΥΣΙΣ. Ἐπεὶ τὰ Μρμ, ΜΠΞ τρίγωνα, ἔχοντα

καθέτȣς ἀλλήλαις τὰς ἑαυτῶν πλευρὰς, εἰσὶν ὅμοια (Γεωμ. 220. Πορ. Β.)· ἄρα Μρ : ρμ :: ΠΜ : ΠΞ, εἴτ' ȣ̃ν δχ : δυ :: υ : ΠΞ $= \frac{υδυ}{δχ}$· ἐὰν ȣ̃ν ληφθῶσι τὰ ἀπειροςὰ τῆς κατὰ τὴν δεδομένην καμπύλην ἐξισώσεως, ϗ εὑρεθῶσιν αἱ δυνάμεις τȣ̃τε δυ, ϗ τȣ̃ δχ, ϗ τῷ εὑρημένῳ ἤδη τύπῳ εἰσαχθῶσι, ποριϑήσεται ἡ δύναμις τῆς ὑποκαθέτȣ ἐν χ ϗ ποσοῖς ἀτρέπτοις.

66. Ἔςω ἡ καμπύλη ἔλλειψις, ἧς ἐξίσωσις $υυ = \frac{ββ}{αα}(αχ - χχ)$ (Υ᾽ψ. Γ. 92), $2υδυ = - \frac{2ββχδχ}{αα}$, $δυ = \frac{- ββχδχ}{υαα}$· $ὑπ. = \frac{υδυ}{δχ} = \frac{- ββχ}{αα}$· δηλοῖ δὲ τὸ —, ὅτι ἄρα ληπτέον ἐςὶ τὴν ὑποκάθετον ȣ̋τω ϑέσεως ἔχȣσαν, ὡς προχωρεῖν τῇ ἀρχῇ τῶν ἀποτετμημένων, ἥτις ἐςὶ τὸ κέντρον· ὁ δὲ τύπος προφανῶς ταὐτίζεται τῷ εὑρεθέντι (Υ᾽ψ. Γ. 109)· ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ κύκλῳ $β = α$, ἔςαι $ὑπ. = - χ$· τȣ̃τ' ἔςιν ἡ τȣ̃ κύκλȣ ὑποκάθετος ἴση ἐςὶ τῇ πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένῃ.

67. Ἔςω δὲ ἡ καμπύλη παραβολὴ, ἧς ἐξίσωσις $υ^2 = πχ$ (Υ᾽ψ. Γ. 30), $2υδυ = πδχ$, $δυ = \frac{πδχ}{2υ}$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῷ τύπῳ $ὑπ. = \frac{υδυ}{δχ}$, ποριϑήσεται $ὑπ. = \frac{αυ}{2υ} = \frac{α}{2}$, „τȣ̃τ' ἔςι παραβο„λῆς ἡ ὑποκάθετος ἄτρεπτος ὑπάρχει, ἰσȣμένη τῇ ἡμι„παραμέτρῳ“· καθὰ δέδεικται ϗ ἐν ταῖς τȣ̃ κώνȣ τομαῖς (Υ᾽ψ Γ. 42).

68. Ἐπὶ τῶν παντὸς γένȣς παραβολῶν ἔςι δχ =

$\frac{(\mu+\nu)\,\upsilon^{\mu+\nu-1}\delta\upsilon}{\upsilon\alpha^{\mu}\chi^{\nu-1}}$ (57)· ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως ἀντικαταςαθείσης ἐν τῇ ὑποκαθέτῳ, ἤ, ὃ δήπȣ ταὐτὸν, διαιρεθέντος τȣ̃ υδυ διὰ ταύτης τῆς ποσότητος, ἀποφέρεται ὑπ. $= \frac{\nu\alpha^{\mu}\chi^{\nu-1}\upsilon}{(\mu+\nu)\,\upsilon^{\mu+\nu-1}} = \frac{\nu\alpha^{\mu}\chi^{\nu}\upsilon^{2}}{(\mu+\nu)\,\chi\upsilon^{\mu+\nu}}$ (πολλαπλασιαθέντων ἀμέλει τȣ̃ τε παρονομαςȣ̃, ϗ τȣ̃ ἀριθμητȣ̃ ἐπὶ χυ) $= \frac{\nu\upsilon\upsilon\,.\,\upsilon^{\mu+\nu}}{(\mu+\nu)\,\chi\upsilon^{\mu+\nu}}$ (ἀντικαταςαθείσης τῆς δυνάμεως τȣ̃ $\alpha^{\mu}\chi^{\nu}$) $= \frac{\nu\upsilon^{2}}{(\nu+\mu)\,\chi}$· ἐὰν ȣ̃ν ᾖ $\nu = \mu = 1$, ὥσπερ ἐπὶ τῆς ἐκ τȣ̃ κώνȣ παραβολῆς, ἔςαι ὑπ. $= \frac{\upsilon^{2}}{2\chi} = \frac{\pi\chi}{2\chi} = \frac{\pi}{2}$, ὥσπερ ϗ ἀνωτέρω εὕρηται· ἐὰν δὲ ᾖ $\nu = 7$, ϗ $\mu = 3$, πορισθήσεται ὑπ. $= \frac{7\upsilon\upsilon}{10\chi}$· ὅθεν $10\chi : 7\upsilon :: \upsilon :$ ὑπ.

69. Ἔςω ἐξίσωσις $\upsilon^{\mu}\chi^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu} = 1$· (πᾶσα δὲ τοιάδε ἐξίσωσις, ἐν ᾗ δήπȣ τὸ γινόμενον ὑπὸ θετικȣ̃ βαθμȣ̃ τῆς τεταγμένης ϗ θετικȣ̃ βαθμȣ̃ τῆς ἀποτετμημένης ἰσȣ̃ται ποσότητι ἀτρέπτῳ, καλεῖται ὑ π ε ρ β ο λ ῶ ν ἐ ξ ί σ ω σ ι ς)· τιθεμένȣ $\alpha = 1$, εἶτ' ȣ̃ν $\upsilon^{\mu} = \frac{1}{\chi^{\nu}} = \chi^{-\nu}$, ὅθεν $\upsilon = \chi^{-\frac{\nu}{\mu}} = \chi^{\rho}$ (ὑποτιθεμένȣ $-\frac{\nu}{\mu} = \rho$)· ϗ $\delta\upsilon = \rho\chi^{\rho-1}\delta\chi$· ἀντικαθισαμένης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως τȣ̃ δυ ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$, εὑρίσκεται ὑπ. $= \rho\upsilon\chi^{\rho-1} = \frac{\rho\upsilon\chi^{\rho}}{\chi} =$

$\frac{\varrho\upsilon\upsilon}{\chi}$ (εἴγε $\upsilon = \chi^{\varrho}$)· ἐὰν ἒν ᾖ $\mu = 2$, ϗ $\nu = 10$, ἔςαι $\varrho = -5$, ϗ ὑπ. $= -\frac{5\upsilon\upsilon}{\chi}$· ἐν ταύταις ἄρα ταῖς καμπύλαις ἡ ὑποκάθετος ΠΛ (σχ. 165), λειπτικὴ ἒσα, ἐπεκτενεῖται πρὸς τὴν Α ἀρχὴν τῶν ἀποτετμημένων.

70. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἐὰν κληθῇ ἡ ὑφαπτομένη Ρ ἐκ τῆς ἰδιότητος τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ΤΜΞ (σχ. 164), προκύψει ΤΠ : ΜΠ : : ΜΠ : ΠΞ, εἴτ' ἒν Ρ : υ : : υ : ὑπ. $= \frac{\upsilon\upsilon}{P}$· γνωσθείσης ἄρα τῆς ὑφαπτομένης, εὐχερῶς ποριοθήσεται ἡ ὑποκάθετος· ὁ δὲ τύπος ȣ̓χ ἧττον χρήσιμος ϗ ἐν ταῖς καμπύλαις, ὧν αἱ τεταγμέναι ἀφ' ἑνὸς σημείȣ προβάλλονται· ἀλλὰ τηνικαῦτα ἡ ὑποκάθετος ΚΛ (σχ. 168) ληφθήσεται ἐπὶ τῆς ΤΚ ὑφαπτομένης ἐπὶ θάτερα προαχθείσης.

Οὕτως ἡ τῶν παντὸς γένȣς σπειρῶν ὑφαπτομένη ἐςὶ ΚΤ $= \frac{\mu\chi\upsilon}{\nu\alpha}$ (61)· ȣ̓κȣ̃ν ἔςαι $\frac{\upsilon\upsilon}{P} = \frac{\nu\alpha\upsilon\upsilon}{\mu\chi\upsilon} = \frac{\nu\alpha\upsilon}{\mu\chi}$· ἐὰν ȣ̃ν ᾖ $\mu = 3$, ϗ $\nu = 7$, ἔςαι ὑπ. $= \frac{7\alpha\upsilon}{3\chi}$, ὅθεν $3\chi : 7\alpha :: \upsilon :$ ὑπ. $=$ ΚΛ· ὁ αὐτὸς δὲ εὑρεθήσεται τύπος, ϗ εἴπερ ἀντὶ τȣ̃ διελεῖν υ^2 διὰ τῆς ὑφαπτομένης, περιεχȣ́σης ὅρȣς πεπερασμένȣς, διέλωμεν διὰ τῆς ὑφαπτομένης $\frac{\upsilon\upsilon\delta\chi}{\alpha\delta\upsilon}$ (ὅπερ συνᾴδει ταύτῃ τῇ περιπτώσει) ἐπὶ τὸ εὑρεῖν ὑπ. $= \frac{\alpha\delta\upsilon}{\delta\chi}$, ὅθεν ἐξάγεται ἡ αὐτὴ δύναμις· ἀλλὰ γὰρ τῆς Ρ πεπερασμένȣς ὅρȣς περιεχȣ́σης, περιττὸν ὅλως ϗ μάταιον,

χρήσασθαι τῷ τῶν ἀπειροςῶν λογισμῷ· ἐν δὲ τῇ λογαριθμικῇ σπείρᾳ ἐπεὶ (61) $Ρ = \frac{\nu\upsilon}{\alpha}$· ἄρα ὑπ. $= \frac{\alpha\upsilon}{\nu}$, εἴτ' ἂν $\nu : \alpha :: \upsilon :$ ὑπ.· ἐὰν δὲ $\nu = \alpha = \iota$, πορισθήσεται ὑπ. $= \upsilon$· ἀλλὰ τηνικαῦτα $Ρ = \upsilon$ (61)· ἐν ταύτῃ ἄρα τῇ περιπτώσει ἀεὶ ἰσῦται ἡ ὑποκάθετος τῇ ὑφαπτομένῃ.

71. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἡ ὑφαπτομένη τῶν γεωμετρικῶν καμπύλων, ὧν παράλληλοι αἱ τεταγμέναι, ἔςιν $= \frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$, ὡς ἤδη εὕρηται (55)· ἐὰν ἂν διαιρεθῇ υ^2 διὰ τῦ τύπυ τύτυ, εὑρεθήσεται ὑπ. $= \frac{\upsilon\delta\upsilon}{\delta\chi}$, ὥσπερ ἀνωτέρω (65).

72. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η΄. Εὑρεῖν τὸν γενικὸν τύπον τῆς καθέτυ ἁπάσης γεωμετρικῆς καμπύλης, ἧς αἱ τεταγμέναι πρὸς ὀρθὰς ἐφεςήκασι ταῖς ἀποτετμημέναις (σχ. 164)

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜμΡ, ΜΠΞ προέρχεται Μρ : Μμ :: ΜΠ : ΜΞ, εἴτ' ἂν $\delta\chi : (\sqrt{}\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2) :: \upsilon : ΜΞ = \frac{\upsilon}{\delta\chi} \times \sqrt{}(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)$.

Ἐν τῇ παραβολῇ ἔςιν $\upsilon^2 = \pi\chi$, $2\upsilon\delta\upsilon = \pi\delta\chi$, $\delta\upsilon = \frac{\pi\delta\chi}{2\upsilon}$· ἄρα $\delta\upsilon^2 = \frac{\pi\pi\delta\chi^2}{4\upsilon^2}$· ἄρα $ΜΞ = \frac{\upsilon}{\delta\chi}\sqrt{}(\delta\chi^2 + \frac{\pi\pi\delta\chi^2}{4\upsilon^2}) = \frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\chi} \times \sqrt{}(\frac{4\upsilon\upsilon + \pi\pi}{4\upsilon^2}) = \frac{\upsilon}{2\upsilon}\sqrt{}(4\upsilon\upsilon + \pi\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{4\pi\chi + \pi\pi}}$, ὃς τύπος τῷ ϗ βραχύτι ἐπισημασμένῳ δῆλον ὅτι ὁ αὐτός ἐςι τῷ εὑρεθέντι (Ὑψ. Γ. 43).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δῆλον δὲ, ὅτι κληθείσης τῆς ὑποκαθέτυ ὑπ, ϗ τῆς καθέτυ Μ, ἔςαι Μ = $\sqrt{}$(ὑπ. ὑπ +

υυ), ὅπερ γενικόν ἐςι πασῶν τῶν καμπύλων, ϗ ὧν αἱ τεταγμέναι ἀφ' ἑνὸς σημείȣ ἐξίασι.

73. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ'. Εὑρεῖν τὸν γενικὸν τύπον τῆς γραμμῆς ΑΤ, τῆς ἀπολαμβανομένης ἀπό τε τῆς Α ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων, ϗ τȣ̃ σημείȣ, καθ' ὃ συμπίπτει τῇ ἀπτομένῃ (§. 164).

ΛΥΣΙΣ. Ἀφῃρήσθω τῆς ΠΤ ἡ ΑΠ· ϗ δὴ λειφθήσεται $AT = \frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon} - \chi = \frac{\upsilon\delta\chi - \chi\delta\upsilon}{\delta\chi}$.

74. Ἵν' εὑρεθῇ δὲ ὁ τύπος τῆς ΑΒ, ἐςι ΠΜ : ΠΤ : : ΑΤ : ΑΒ, εἴτ' οὖν $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon} : \upsilon : : \frac{\upsilon\delta\chi - \chi\delta\upsilon}{\delta\chi}$: $AB = \frac{\upsilon\delta\chi - \chi\delta\upsilon}{\delta\chi}$.

75. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'. Δοθείσης τῆς καμπύλης ΑΜ (ἐφ' ἧς ἡ γωνία τῶν συντεταγμένων εἴη ὀρθὴ) εὑρεῖν τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ καμπύλη μετά τινος εὐθείας παραλλήλȣ, ἤτοι ταῖς ἀποτετμημέναις, ἢ ταῖς τεταγμέναις, ποιείῃ γωνίαν τὴν δοθεῖσαν (§. 164).

ΛΥΣΙΣ. Ἡ μὲν ὑπὸ μΜρ γωνία περιέχεται ὑπό τε τῆς Μρ εὐθείας παραλλήλȣ ταῖς ἀποτετμημέναις, ϗ ὑπὸ τῆς καμπύλης, ἢ γȣ̃ν τῆς ἀπτομένης τῆς καμπύλης κατὰ τὸ σημεῖον Μ· ἡ δὲ ὑπὸ Μμρ συνίςαται ὑπό τε τῆς καμπύλης, ϗ τῆς συςοιχȣ́σης τεταγμένης πμ· ἀλλ' ἐκ τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ Μρμ (Γεωμ. 497) ἐςι Μρ : μρ : : ακ : ἀπτ. γωνίας τῆς ὑπὸ μΜρ, = Τ, εἴτ' ȣ̃ν, τιθεμένης τῆς ἀκτῖνος = 1, $\delta\chi : \delta\upsilon : : 1 : T = \frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$· ἐκ δὲ τȣ̃ αὐτȣ̃ τριγώνȣ προέρχεται $\delta\upsilon : \delta\chi : : 1 : \tau = \frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$, ἁ-

πτομένη τῆς ὑπὸ Μμρ γωνίας· ἀπόχρη ἄρα ἐξισῶν τέτες τὲς τύπες τῇ ἁπτομένῃ τῆς δεδομένης γωνίας, ἵν' ἐκ τέτε ἀποφέρηται διὰ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως ἡ δύναμις τῆς τεταγμένης, ἢ τῆς συςοιχέσης ἀποτετμημένης.

Ἐὰν, φέρε, ζητηθῇ, πρὸς ὅ,τι σημεῖον τῆς παραβολῆς ἡ ὑπὸ τῆς καμπύλης ϗ τῆς τῷ ἄξονι παραλλήλε γραμμῆς περιεχομένη γωνία ἐςὶν $= 45°$, ἐπεὶ ἡ ἁπτομένη γωνίας $= 45°$ (Γεωμ. 498) ἐςὶν $=$ ακ $= 1$, τεθείσθω $\frac{\delta \upsilon}{\delta \chi} = 1$, $\delta \upsilon = \delta \chi$· ἀλλὰ διὰ τὴν φύσιν τῆς παραβολῆς ἐςὶν $\upsilon \upsilon = \pi \chi$, $2\upsilon \delta \upsilon = \pi \delta \chi$, διὰ δὲ τὴν φύσιν τε προβλήματος ἐςὶ $\delta \upsilon = \delta \chi$, ἔςαι $2\upsilon \delta \chi = \pi \delta \chi$, $2\upsilon = \pi$, $\upsilon = \frac{\pi}{2}$· ἀλλὰ (Υ'ψ. Γ. 20) ἡ διὰ τῆς ἑςίας διήκεσα τεταγμένη ἴση ἐςὶ τῇ ἡμιπαραμέτρῳ· ἄρα ἐν ἁπάσῃ παραβολῇ γωνία ὑπὸ τῆς καμπύλης ϗ τῆς παραλλήλε τῷ ἄξονι εὐθείας περιεχομένη ϗ ἰσεμένη ἡμιόρθῳ ἐςὶν ἡ συςοιχεσα τῷ σημείῳ τῆς ἑςίας.

Ἐὰν δὲ ζητηθῇ, καθ' ὅ,τι ἄρα σημεῖον ἡ ἁπτομένη τῆς γωνίας, ἥτις περιέχεται ὑπὸ τῆς καμπύλης ϗ τῆς τεταγμένης, ἐςὶν $=$ ἡμισείᾳ ἀκτῖνι $= \frac{1}{2}$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς παραβολῆς, γενέσθω $\frac{\delta \chi}{\delta \upsilon} = \frac{1}{2}$, $2\delta \chi = \delta \upsilon$· ἀλλὰ διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς παραβολῆς ἐςὶν $\upsilon \upsilon = \pi \chi$, $2\upsilon \delta \chi = \pi \delta \chi$· ἐν ταύτῃ δὴ τῇ ἐξισώσει ἀντικαταςαθείσης τῆς τε δυ δυνάμεως $2\delta \chi$, πορισθήσεται $4\upsilon \delta \chi = \pi \delta \chi$, $4\upsilon = \pi$, $\upsilon = \frac{\pi}{4}$· ταύτης δὲ τῆς τε υ δυνάμεως ἀντικαταςαθείσης

ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon\upsilon = \pi\chi$, πορισθήσεται $\frac{\pi\pi}{16} = \pi\chi$, $\frac{\pi}{16} = \chi$· τὸ ἄρα ζητούμενον συμβήσεται κατὰ σημεῖον συστοιχοῦν ἀποτετμημένῃ ἴσῃ τῷ δεκάτῳ ἕκτῳ μέρει τῆς παραμέτρου.

Ἐὰν δὲ ζητηθῇ, καθ' ὅ,τι σημεῖον τῆς κυκλικῆς ὑπερβολῆς ἡ ἁπτομένη τῆς γωνίας, ἣ περιέχεται ὑπὸ τῆς καμπύλης καὶ τῆς τεταγμένης, ἐστιν $= 1$, μονάδος οὔσης τῆς ἀκτῖνος, γενέσθω $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = 1$, $\delta\chi = \delta\upsilon$· ἐστι δὲ ἐξίσωσις τῆς κυκλικῆς ὑπερβολῆς $\upsilon\upsilon = 2\alpha\chi + \chi\chi$ (Υ΄ψ. Γ. 166), $2\upsilon\delta\upsilon = 2\alpha\delta\chi + 2\chi\delta\chi$, ἢ (ἐπεὶ διὰ τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος $\delta\chi = \delta\upsilon$) $2\upsilon\delta\chi = 2\alpha\delta\chi + 2\chi\delta\chi$, $2\upsilon = 2\alpha + 2\chi$, $\upsilon = \alpha + \chi$· ταύτης δὲ τῆς τοῦ υ δυνάμεως ἀντικατασταθείσης ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς καμπύλης, πορισθήσεται $(\alpha + \chi)^2 = 2\alpha\chi + \chi\chi$, $\alpha\alpha + 2\alpha\chi + \chi\chi = 2\alpha\chi + \chi\chi$, ἢ $\alpha\alpha = 2\alpha\chi + \chi\chi - 2\alpha\chi - \chi\chi = 0$· ὅπερ ἀδύνατον· ἐν ἄρα τῇ κυκλικῇ ὑπερβολῇ οὐδεμία γωνία ἔσται $= 45°$, περιεχομένη ὑπὸ καμπύλης καὶ εὐθείας παραλλήλου τῷ ἄξονι.

Ἐὰν ζητηθῇ, ἐν τίνι σημείῳ ἡ ὑπὸ καμπύλης καὶ εὐθείας τῷ ἄξονι παραλλήλου περιεχομένη γωνία ἐστιν $= 45°$, ἐπὶ καμπύλης ἐμφαινομένης τῇ ἐξισώσει $\upsilon\upsilon = 2\alpha\chi + 2\chi\chi$, γενέσθω $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = 1$· ἐπεί, διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς καμπύλης, $2\upsilon\delta\upsilon = 2\alpha\delta\chi + 4\chi\delta\chi$· ἄρα $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = \frac{2\alpha + 4\chi}{2\upsilon}$, $2\upsilon = 2\alpha + 4\chi$, $4\upsilon^2 = (2\alpha + 4\chi)^2$, ἢ (ἀντικαταστάσει τῆς τοῦ $\upsilon\upsilon$ δυνάμεως), $4\,(2\alpha\chi + 2\chi\chi) = (2\alpha +$

$4\chi)^2$, $8\alpha\chi + 8\chi\chi = 4\alpha\alpha + 16\alpha\chi + 16\chi^2$· μεταθέσει δὲ ϗ ἀναγωγῇ, $8\chi^2 + 8\alpha\chi = -4\alpha\alpha$, $\chi\chi + \alpha\chi = -\frac{1}{2}\alpha\alpha$· ἀναπληρώσει δὲ τȣ̃ ἐλλειπȣ̃ς τετραγώνȣ,

$$\chi^2 + \alpha\chi + \frac{\alpha\alpha}{4} = \frac{1}{4}\alpha\alpha - \frac{1}{2}\alpha\alpha = -\frac{\alpha\alpha}{4}$$

· ἄρα $\chi + \frac{1}{2}\alpha = \pm \frac{1}{2} \times \sqrt{(-\alpha\alpha)}$, ποσότης ἀνύπαρκτος· ὅθεν δῆλον ὡς ἡ προτεθεῖσα καμπύλη ȣ̓δαμȣ̃ μετὰ παραλλήλȣ ταῖς ἀποτετμημέναις εὐθείας συςῆσαι δύναται γωνίαν $= 45°$.

76. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν μὲν τὸ $\delta\chi$ ὑποτεθῇ ἀπειροςὸν τȣ̃ $\delta\upsilon$, ἡ ἁπτομένη $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$ ἔσεται τηνικαῦτα ἀπείρως μικρὰ, ϗ ἡ τεταγμένη παράλληλος τῇ ἁπτομένῃ κατὰ τὸ ζητȣ́μενον σημεῖον, ϗ αὐτῇ συνεπιπεσεῖται, ὥσπερ γίνεται ἐπὶ τῆς Α ἀρχῆς τῶν ἐν τῇ παραβολῇ ἀποτετμημένων· ἐὰν δὲ τὸ $\delta\upsilon$ ὑποτεθῇ τȣ̃ $\delta\chi$ ἀπειροςὸν, γενήσεται τηνικαῦτα ἀπείρως μικρὰ ἡ δύναμις τȣ̃ $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$· εἴτ' ȣ̃ν ἡ ἁπτομένη τῆς γωνίας τῆς περιεχομένης ὑπὸ καμπύλης ϗ εὐθείας ταῖς ἀποτετμημέναις παραλλήλȣ ἔςαι ἀπείρως μικρά· ἀλλὰ ταύτης τῆς γωνίας ἀπειροςῆς ὑπαρχȣ́σης, ἡ αὐτῆς ἐφαπτομένη συμβάλλȣσα τῷ ἄξονι μετὰ διάςημα ἄπειρον ἐπινοηθήσεται· ϗ ἡ μὲν ὑφαπτομένη ἐπινοηθήσεται ἄπειρος, ἡ δ' ἁπτομένη τῷ ἄξονι ἔςαι παράλληλος· τȣ̃θ' ὅπερ τῷ κυκλικῷ τεταρτημορίῳ ΑΜ (σχ. 170) συμβαίνει κατὰ τὸ Μ πέρας· σημειωτέον δὲ ἐνταῦθα, ὡς τῆς $\delta\upsilon$ ἐχȣ́σης τι μέγεθος συναντᾷ πȣ τῇ τῶν ἀποτετμημένων γραμμῇ ΠΤ ἡ ἁπτομένη, ἄπειρος δὲ γίνεται ἡ ὑφαπτομένη ΠΤ τῆς Τ γωνίας ἀπείρως ὑπαρχȣ́σης

μικρᾶς· ἀλλ᾽ ἐπείπερ ἡ ἁπτομένη μΤ (ταὐτὸν δ᾽ ἂν εἴη ῥητέον ϗ περὶ τῆς ὑφαπτομένης), γινομένη τῷ ἄξονι παράλληλος, ἄπειρος γίνεσθαι τηνικαῦτα λέγεται· τότε ἄρα τὸ δυ, κατὰ βραχὺ μικρυνόμενον, ἀπολύτως ἀποκαθίσταται $=$ ο· ϗ ἀποβαίνει ἄρα ὁ τύπος $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi} = \text{o}$, ὃς ἐμφαίνει παράλληλον εἶναι τῷ ἄξονι τὴν ἐφαπτομένην· ὁ δὲ τύπος $\frac{\delta\upsilon}{\text{o}}$ δείκνυσι τὴν ἁπτομένην ταῖς τεταγμέναις εἶναι παράλληλον· οὐ μέντοι γε διῃρῆσθαί τι διὰ τοῦ ο, ἀλλὰ τὴν δχ ἄπειρον οὖσαν ἐκδηλοῦμεν, παρατιθεμένην πρὸς τὴν δυ (*).

Ἐὰν ἄρα ζητηθῇ, ἐν τίνι τῆς καμπύλης σημείῳ ἡ ἁπτομένη παράλληλος γίνεται ταῖς ἀποτετμημέναις, δῆλον ὅτι εὑρεθήσεται τουτὶ τὸ σημεῖον, ὑποτιθεῖσι δυ $=$ ο ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$· τοὐναντίον δὲ ζητηθέντος τοῦ τόπου, ἔνθα ἡ ἁπτομένη παράλληλος γίνεται ταῖς τεταγμέναις, ἀπόχρη ὑποθέσθαι τὴν δύναμιν τοῦ κλάσματος $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \text{o}$, ἢ, ὃ δήπου ταὐτὸν, $\delta\chi = \text{o}$· τοιγαροῦν, ἐὰν ὑποτεθῇ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{\alpha}{\beta}$, ἡ ἁπτομένη εὑρεθήσεται παράλληλος, ταῖς μὲν

(*) Σαφέστερον δὲ τὸ λεγόμενον γενήσεται ἐπιστήσασι τὸν νοῦν ταῖς δυσὶ τεταγμέναις ΚΜ, πΝ· ἐκλαμβάνονται γὰρ αὗται ὡς οὐδενὶ ἀλλήλων διαφέρουσαι, ϗ περατούμεναι ἑκατέρα πρὸς τῇ εὐθείᾳ ΜΔ, ᾗ συμπίπτον ἐπινοεῖται τὸ τόξον ΜΝ· ἵν᾽ οὖν δηλώσωμεν, ὅτι τὸ δυ ἐστιν ἀπείρως ἔλαττον τοῦ δχ, ἢ τοὐναντίον, ἐκείνως μὲν τὸ δυ $=$ ο, οὕτω δὲ τὸ δχ $=$ ο ἐκλαμβάνομεν.

τεταγμέναις, τȣ̃ ἀριθμητȣ̃ ὄντος $= 0$, ταῖς δὲ ἀποτετμημέναις, τȣ̃ παρονομαςȣ̃ ὄντος ὡσαύτως $= 0$.

77. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑ'. Εὑρεῖν τὸν τόπον τῆς παραβολῆς, ἔνθα ἡ αὐτῆς ἁπτομένη ταῖς τεταγμέναις ὑπάρχει παράλληλος.

ΛΥΣΙΣ. Ἐν τῇ παραβολῇ ἐςὶν $\upsilon^2 = \pi\chi$, $2\upsilon\delta\upsilon = \pi\delta\chi$, $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{2\upsilon}{\pi}$· ἐὰν ȣ̃ν ὑποτεθῇ ὁ ἀριθμητὴς $2\upsilon = 0$, ἔςαι $\upsilon = 0$· ϗ τȣ̃ 0 ἀντὶ υ ἀντικατας αθέντος ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon\upsilon = \pi\chi$, εὑρεθέσεται $0 = \pi\chi$, $\chi = \frac{0}{\pi} = 0$· ἡ ἄρα τῆς παραβολῆς ἁπτομένη παράλληλος ἔςαι ταῖς τεταγμέναις κατὰ τὴν ἀρχὴν τῶν ἀποτετμημένων, ἢ κατὰ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἔςι $\chi = 0$· ἐπεὶ δὲ ἀδύνατόν ἐςιν ὑποθέσθαι τὴν παράμετρον $\pi = 0$, ἥτις ἐςὶ παρονομαςὴς τȣ̃ κλάσματος· ȣ̓δαμȣ̃ ἄρα τῆς παραβολῆς ἡ ἁπτομένη ἔςαι ταῖς ἀποτετμημέναις παράλληλος.

78. Ἐν δὲ τῷ κύκλῳ (Υψ. Γ. 12) ἔςιν $\upsilon^2 = 2\alpha\chi - \chi\chi$, $\upsilon = \sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}$, $2\upsilon\delta\upsilon = 2\alpha\delta\chi - 2\chi\delta\chi$, $\upsilon\delta\upsilon = (\alpha - \chi)\,\delta\chi$, $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{\upsilon}{\alpha - \chi} = \frac{\sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}}{\alpha - \chi}$. ἐὰν ȣ̃ν ὑποτεθῇ $= 0$ ὁ ἀριθμητὴς, ἔςαι $\sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)} = 0$, ϗ ἑκατέρȣ μέλȣς τετραγωνισθέντος, $2\alpha\chi - \chi\chi = 0$, ϗ μεταλλαγῇ τῶν συμβόλων, $\chi\chi - 2\alpha\chi = -0$, ϗ ἀναπληρώσει τȣ̃ ἐλλειπȣ̃ς τετραγώνȣ, $\chi\chi - 2\alpha\chi + \alpha\alpha = -0 + \alpha^2 = \alpha^2$, ϗ ἐξαγωγῇ τῆς ῥίζης, $\chi - \alpha = \pm\sqrt{\alpha\alpha} = \pm\,\alpha$, $\chi = \alpha \pm \alpha$, εἴτ' ȣ̃ν $\chi = 2\alpha$, ϗ $\chi = 0$· ἡ τȣ̃ κύκλȣ ἄρα ἁπτομένη παράλληλος ταῖς τεταγμέναις καθίςαται κατὰ τὰ τῆς διαμέτρȣ πέρατα· ἐὰν δὲ ὁ παρονομαςὴς ὑποτεθῇ $= 0$, ἔςαι $\alpha - \chi =$

ο, ϗ α = ± χ· ἄρα ταῖς ἀποτετμημέναις γίνεται παράλληλος ἡ τῦ κύκλυ ἁπτομένη κατὰ σημεῖον ἀντιϛοιχῦν ἀποτετμημένη χ = α, τῦτ' ἔϛι σημεῖον ἀντιϛοιχῦν τῷ κέντρῳ· ἀλλ' ἴωμεν ἤδη ἐπὶ τὰς Ἀσυμπτώτυς, ἀμέλει τοι τὰς εὐθυγράμμυς· περὶ δὲ τῶν καμπύλων ἀσυμπτώτων μέτιθι τὺς κατὰ πλάτος διαλαβόντας περὶ τῦ λαγισμῦ τῶν ἀπειροϛῶν, μάλιϛα δὲ τὸν περικλεῆ Σαύριον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ εὑρέσεως τῶν Ἀσυμπτώτων.

79. Ἀ σ ύ μ π τ ω τ ο ς ἀκύει τοῖς γεωμετρῦσι γραμμὴ εὐθεῖα, ἥτις ἐκλαμβάνεται ὡς ἁπτομένη τῆς καμπύλης ἐν διαϛήματι ἀπείρῳ, εἴτ' ῦν παντὸς δεδομένυ μείζονι· ὥϛε τὸ ἀπόϛημα, καθ' ὃ ἡ ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης ἀπέχει, πάσης δεδομένης ποσότητος ἔλαττον ὂν, ἐκλαμβάνεσθαι ἔχειν ἴσον τῷ μηδενί· τυτὶ μέντοι ὐχ' ἱκανοῖ πρὸς τὸ καταϛῆσαι τὴν γραμμὴν ἀσύμπτωτον· προσδεῖ δὲ διορίσαι ϗ τὴν θέσιν, ὡς τὸ ταύτης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς καμπύλης ἀπόϛημα πεπερασμένον ὑπάρχειν· τῶν δὲ ἀσυμπτώτων, αἱ μὲν ταῖς ἀποτετμημέναις, αἱ δὲ ταῖς τεταγμέναις, εἰσὶ παράλληλοι· ἵν' ῦν τὰς πρώτας θηρευσώμεθα, ἐπάναγκές ἐϛι, ά. ὑποθέσθαι χ (εἴτε ὑπαρκτικὸν, εἴτε λειπτικὸν) ἄπειρον ἐπὶ τῦ τύπυ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$, ἢ ἐπὶ τῦ λόγυ δχ : δυ, τῦ δυ ὄντος = ο, ἢ γῦν ἀπείρως ἐλάττονος τῦ δχ· β'. τὸ υ ὑπάρχειν, ἤτοι πεπερασμένον ποσὸν, ἢ γῦν = ο· ϗ ὄντος μὲν υ = ο, ἡ γραμμὴ τῶν

χ ἔςαι ἡ αὐτὴ τῇ ἀσυμπτώτῳ· ὄντος δὲ τȣ̃ υ ποσȣ̃ πεπερασμένȣ ϗ $= \beta$, φέρ' εἰπεῖν, ἡ τῷ ἄξονι τῶν χ παράλληλος, ϗ αὐτȣ̃ ἀφιςαμένη τῇ ποσότητι β, ἔςαι ἀσύμπτωτος· ἐφ' ᾧ δὲ τῶν ταῖς τεταγμέναις παραλλήλων ἐγκρατεῖς ἐσόμεθα, ὑποθετέον, τὸ $\pm$ υ πεπερασμένον λαμβάνοντας, τὴν δύναμιν τȣ̃ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = o$, ἢ γȣ̃ν τὸ δχ ἀπείρως τȣ̃ δυ ἔλαττον, ὅπερ ὑπάρχειν ἀνάγκη ἐν ταύτῃ τῇ ὑποθέσει, ἤτοι $= o$, ἢ ποσὸν πεπερασμένον· ἐὰν δὲ, τȣ̃ $\pm$ χ ἀπείρȣ ὑποτεθέντος, ἡ δύναμις τȣ̃ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$ ᾖ πεπερασμένη, γνωσθήσεται ἡ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ἀσυμπτώτȣ ϗ τȣ̃ τῶν ἀποτετμημένων ἄξονος· ἵνα μέντοι ἡ ὕτω διοριζομένη εὐθεῖα ὑπάρχῃ ἀσύμπτωτος, ἀνάγκη πᾶσα τὸ μέρος τȣ̃ ἄξονος προαχθέντος, εἰ δέοι, τὸ ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ἀρχῆς τῶν χ, ϗ τȣ̃ σημείȣ, καθ' ὃ αὕτη ἡ εὐθεῖα συμβάλλει τῷ ἄξονι, ὑπάρχειν πεπερασμένον· διὸ δὴ εὑρεθείσης τῆς ὑφαπτομένης κατὰ σημεῖον ἀπείρως ἀφεςηκὸς, ϗ ἀπ' αὐτῆς τῆς ἀποτετμημένης ἀφαιρεθείσης, ἐὰν τὸ κατάλοιπον ᾖ, ἤτοι ποσὸν πεπερασμένον, ἢ $= o$, ἡ ἐκ τȣ́τȣ τȣ̃ σημείȣ ὑπο γωνίαν διωρισμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἀσύμπτωτος ἔσεται τῆς καμπύλης.

80. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὑρεῖν τὰς ἀσυμπτώτȣς τῆς καμπύλης ΜΝ (σχ. 171), ἧς ἐξίσωσις, ὑποτιθεμένων, τῶν μὲν ἀποτετμημένων $A\Pi = \chi$, τῶν δὲ τεταγμένων $\Pi N = \upsilon$, ἐςὶν ἡ $\upsilon\chi = \alpha\chi + \alpha\beta$, ἢ $\upsilon = \alpha + \frac{\alpha\beta}{\chi}$.

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθέντος τοῦ $\chi = \infty$, ὁ ὅρος $\frac{\alpha\beta}{\chi}$ ἐξουθενωθήσεται· καὶ δὴ ἔσαι $\upsilon = \alpha$· ἔσι δὲ ἐκ τῆς κατὰ τὴν καμπύλην ἐξισώσεως, $\upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon = \alpha\delta\chi$, εἶτ' οὖν $\upsilon\delta\chi - \alpha\delta\chi = -\chi\delta\upsilon$, $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{-\chi}{\upsilon - \alpha}$· ἐὰν οὖν ὑποτεθῇ $\delta\upsilon = 0$, εὑρεθήσεται, ὡς ἀνωτέρω (79) εἴδομεν, ἁπτομένη ταῖς ἀποτετμημέναις παράλληλος· ἐὰν δὲ γένηται ὁ παρονομασὴς $\upsilon - \alpha = 0$, ἔσαι $\upsilon = \alpha$· λαμβανομένου ἄρα τοῦ ΑΔ $= \alpha$, ἡ ἐκ τοῦ Δ ἀγομένη τῇ ΑΒ παράλληλος ΔΖ ἔσαι τῆς καμπύλης ἀσύμπτωτος· εἰ δ' ὑποτεθείη $\upsilon = \infty$, ἡ ἐξίσωσις $\upsilon = \alpha + \frac{\alpha\beta}{\chi}$ οὐχ ἴσαται, εἰ μὴ γένοιτο $\chi = \frac{1}{\infty}$· τηνικαῦτα γὰρ ὁ ὅρος α ἀφανίζεται πρός γε τὸν $\frac{\alpha\beta}{\chi}$ ἄπειρον γινόμενον· ἐὰν δὲ ἐπὶ τοῦ τύπου $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{-\chi}{\upsilon - \alpha}$ ὑποτεθῇ ὁ ἀριθμητὴς $= 0$, εὑρεθήσεται $-\chi = 0$, καὶ $\chi = 0$· τοιγαροῦν πορισθήσεται οὕτως ἁπτομένη ταῖς τεταγμέναις παράλληλος, διήκουσα διὰ τοῦ σημείου, ᾧ ἀντισοιχεῖ $\chi = 0$· ἀχθεῖσα ἄρα διὰ τοῦ σημείου Α, ἀρχῆς τῶν χ, ἡ εὐθεῖα ΑΓ ταῖς τεταγμέναις παράλληλος, ἔσαι καὶ αὕτη τῆς προτεθείσης καμπύλης ἀσύμπτωτος.

81. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὰς ἀσυμπτώτους τῆς ὑπερβολῆς, ἧς ἐξίσωσις, ὑποτιθεμένου τοῦ μὲν πρώτου ἄξονος $= \alpha$, τῆς δὲ κατ' αὐτὸν παραμέτρου $= \pi$, ἔσιν $\upsilon^2 = \frac{\pi}{\alpha} \times (\alpha\chi + \chi^2)$.

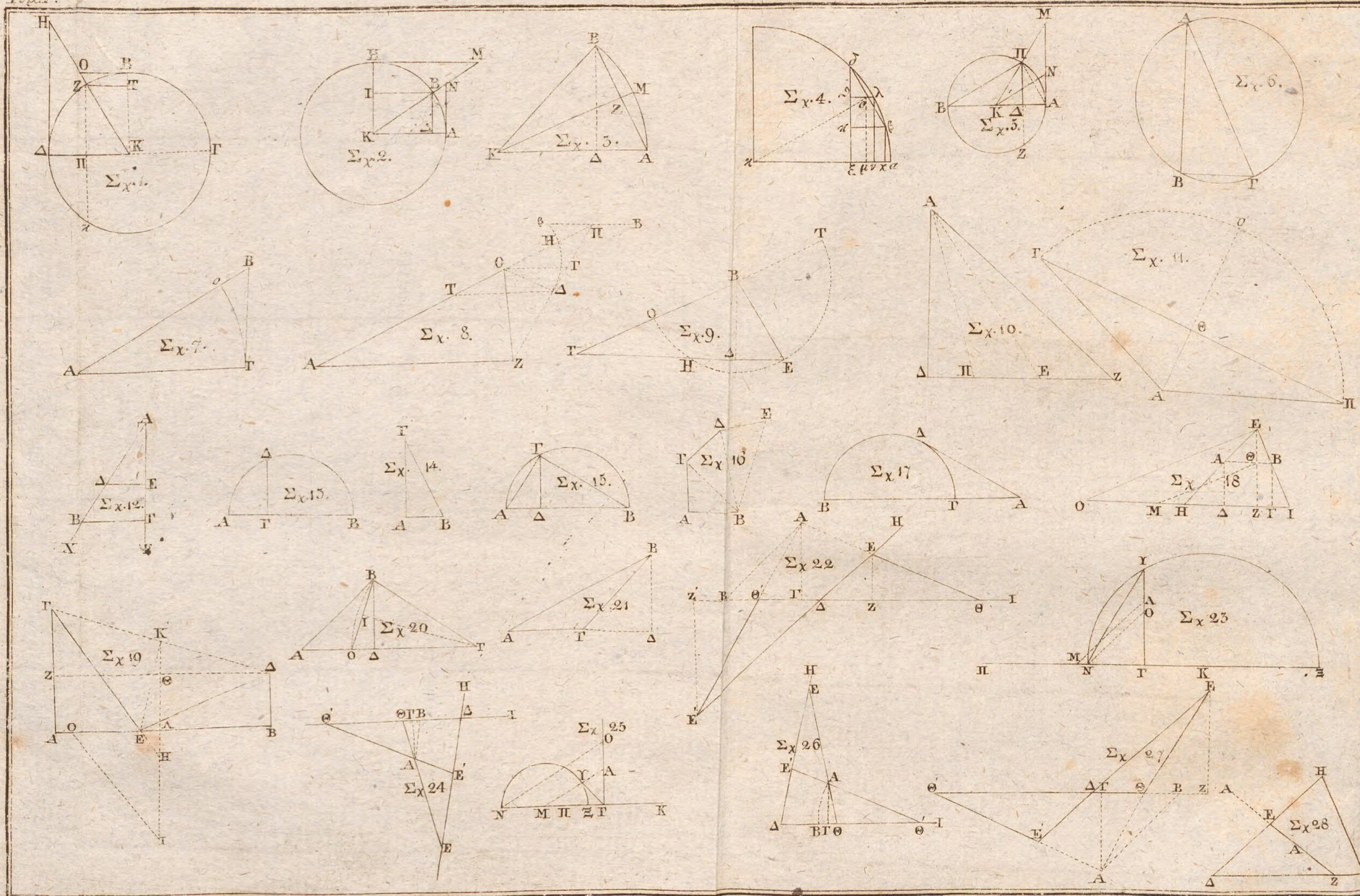
ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείϑω $\chi = \infty$· ἐκεῖν ἔςαι $\upsilon^2 = \frac{\pi}{\alpha}\chi\chi$, $\upsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\chi$, $\delta\upsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}\cdot\delta\chi$, $\sqrt{\alpha}.\delta\upsilon = \sqrt{\pi}.\delta\chi$, $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}$· ἐπεὶ τοίνυν ἀδύνατον ὑποτεθῆναι ὔτε α ὔτε $\pi = 0$, ἡ καμπύλη ὐδεμίαν ἕξει ἀσύμπτωτον παράλληλον, ὔτε ταῖς τεταγμέναις, ὔτε ταῖς ἀποτετμημέναις· μόνη δὲ ἡ εὐθεῖα, ἥτις μετὰ τῦ ἄξονος ποιεῖ γωνίαν, ἧς ἡ ἁπτομένη $\frac{\delta\upsilon}{\delta\chi}$ ἔςιν $= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$, ἐκλαμβάνεται ὡς ἁπτομένη τῆς καμπύλης ἐν διαςήματι ἀπείρῳ· ἵνα δὲ γνωςὸν γένοιτο, εἰ αὕτη ἡ εὐθεῖα ἔςιν ἀσύμπτωτος, ζητηϑήτω ἡ τῆς ὑπερβολῆς ὑφαπτομένη, ἥτις εὑρίσκεται (55) $= \frac{\alpha\chi+\chi\chi}{\frac{1}{2}\alpha+\chi}$· ϗ δὴ $\frac{\alpha\chi+\chi\chi}{\frac{1}{2}\alpha+\chi} - \chi =$

$$\frac{\alpha\chi + \chi\chi - \frac{1}{2}\alpha\chi - \chi\chi}{\frac{1}{2}\alpha+\chi} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\chi}{\frac{1}{2}\alpha+\chi} = \text{TA } (\chi.\ 172),$$

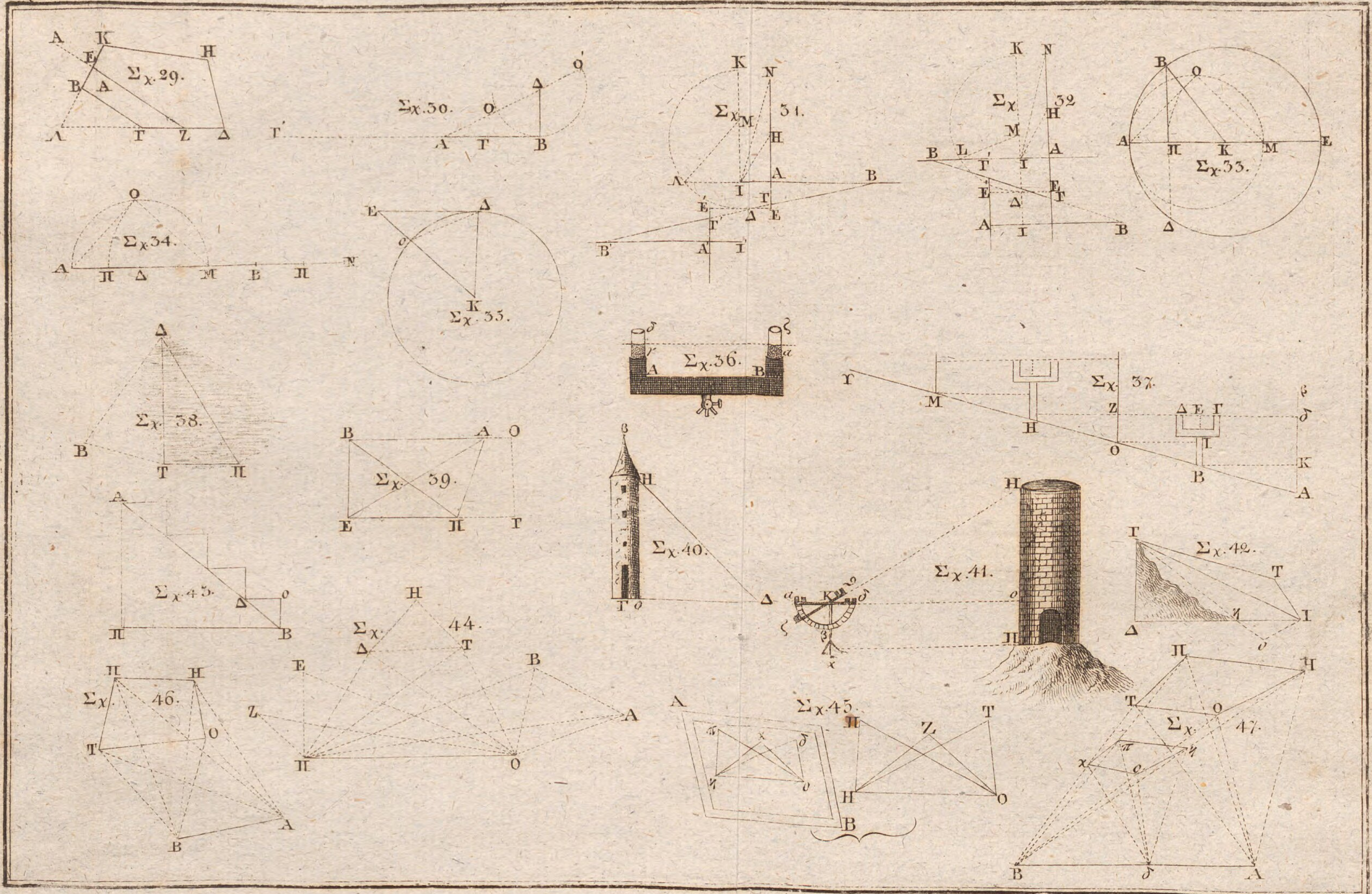
ἥτις, ὄντος $\chi = \infty$, ὡς ἐνταῦθα, γίνεται $= \frac{\frac{1}{2}\alpha\,\infty}{\infty} = \frac{1}{2}\alpha$· ἄρα ἡ ζητυμένη εὐθεῖα διήκει τὸ τῦ ἄξονος μέσον σημεῖον K· ἵνα δὲ διοριϑῇ καὶ ἕτερον σημεῖον B ταύτης τῆς εὐθείας KB, ποριϑήσεται τῦτο ἐκ τῦ ὀρθογωνίυ τριγώνυ KAB· ἔςι γὰρ συνημ. τῆς γωνίας K : ἡμ. K : : $\text{KA} = \frac{1}{2}\alpha : \text{AB}$, ἤ, ἐπεὶ $\frac{\text{ἡμ. K}}{\text{συνημ. K}} = \text{απ. K} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}$, $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\pi} :: \frac{1}{2}\alpha : \text{AB} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha\pi}$· ἐὰν ὖν ὑποτεθῇ ὁ δεύτερος ἄξων $= \beta$, εὑρεθήσεται ἡ τῦ πρώτυ

παράμετρος θεμένοις $\alpha:\beta::\beta:\pi$ (Υψ. Γ. 168), ὅθεν $\beta\beta = \alpha\pi$, καὶ $\beta = \sqrt{\alpha\pi}$, καὶ $\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha\pi}$· ἐὰν ἄρα ἐκ τοῦ σημείου Α ἀνασταθῇ κάθετος τῷ πρώτῳ ἄξονι ἡ ΑΒ $= \frac{1}{2}\beta$, ἡ ἐκ τῶν σημείων Κ, Β διαχθεῖσα εὐθεῖα ἔσται τῆς ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτος.

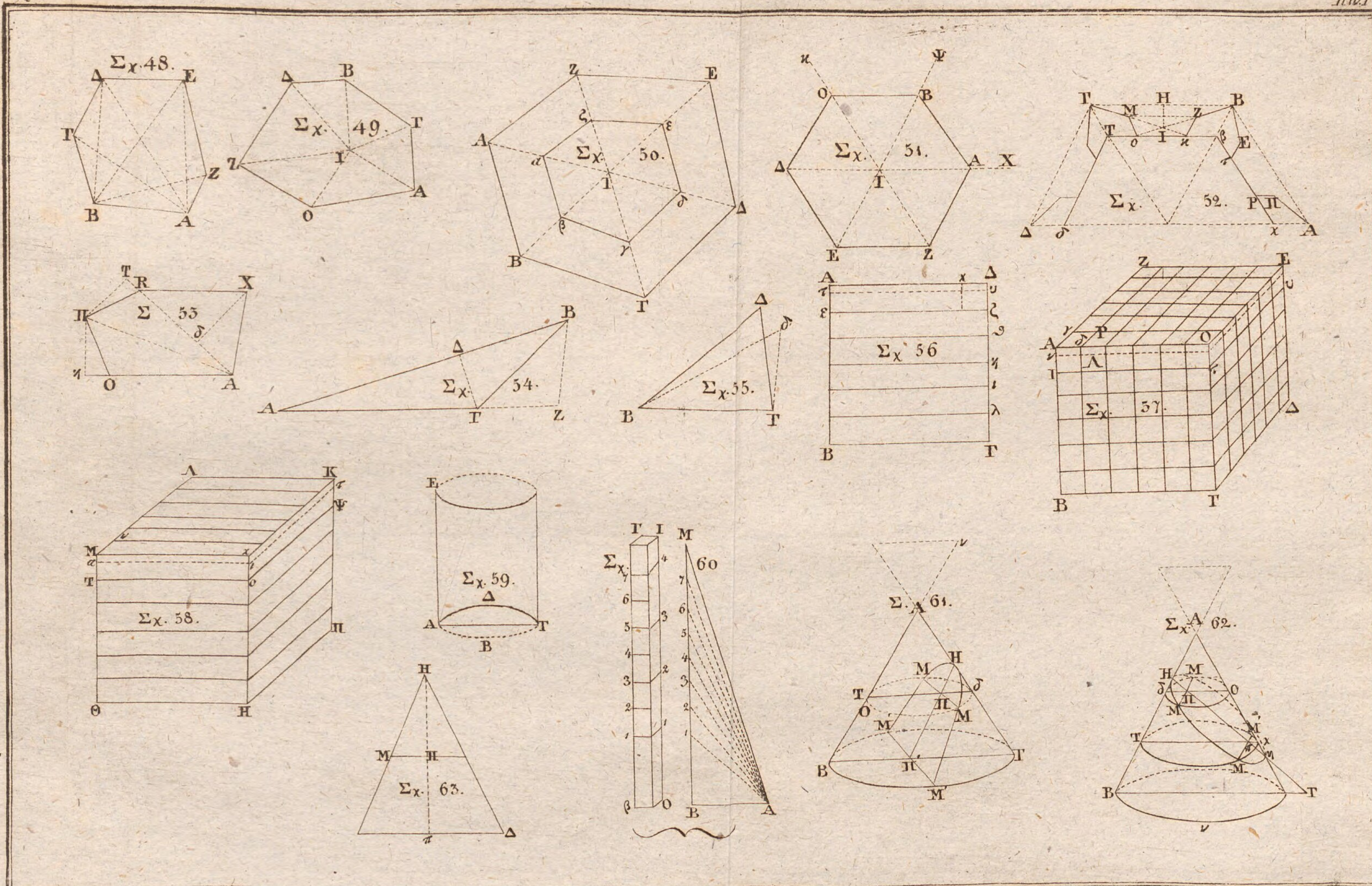
ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Γ΄. ΤΟΜΟΥ.



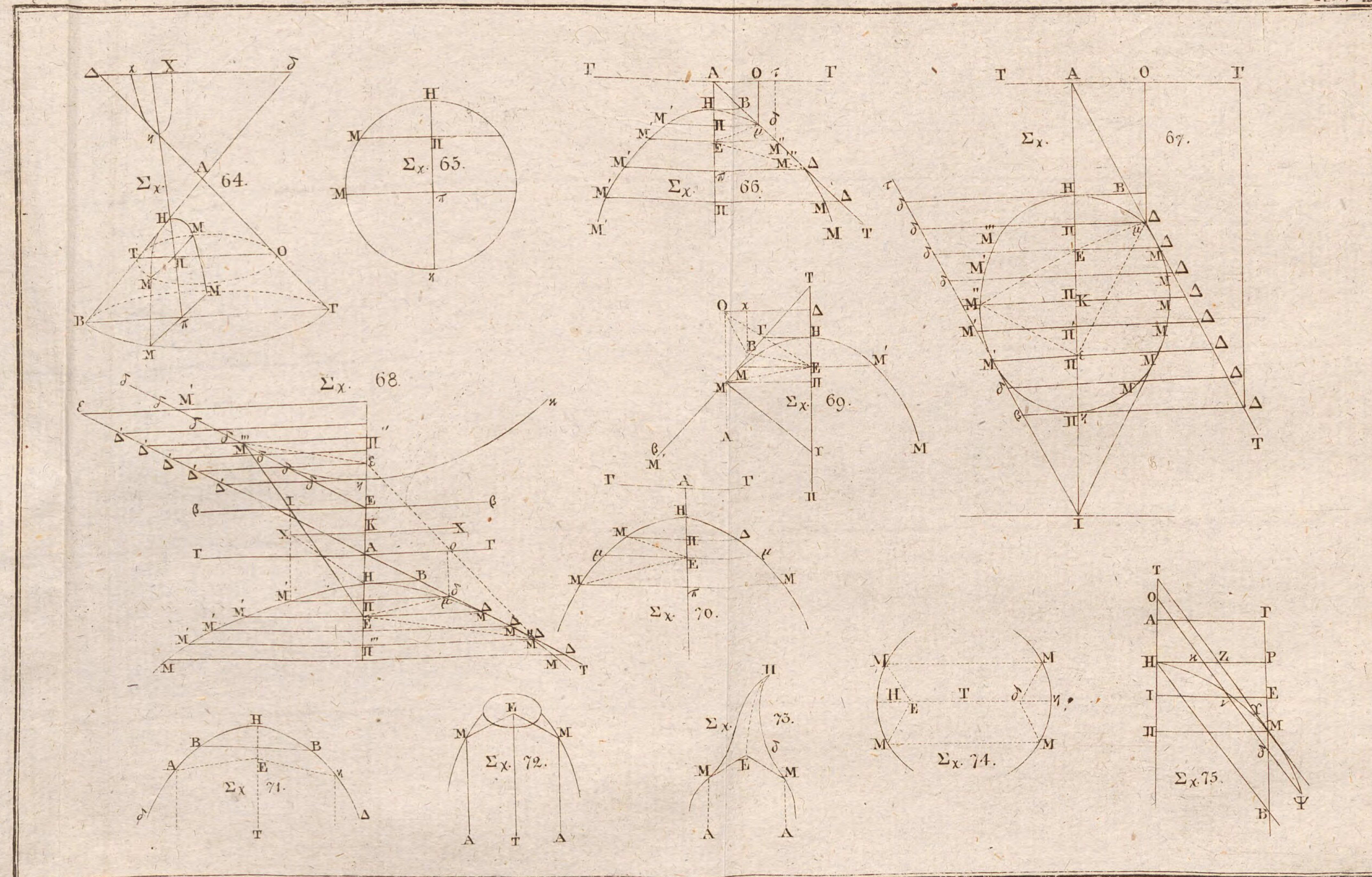
Παρὰ Ἰγνατίῳ Κύρ.



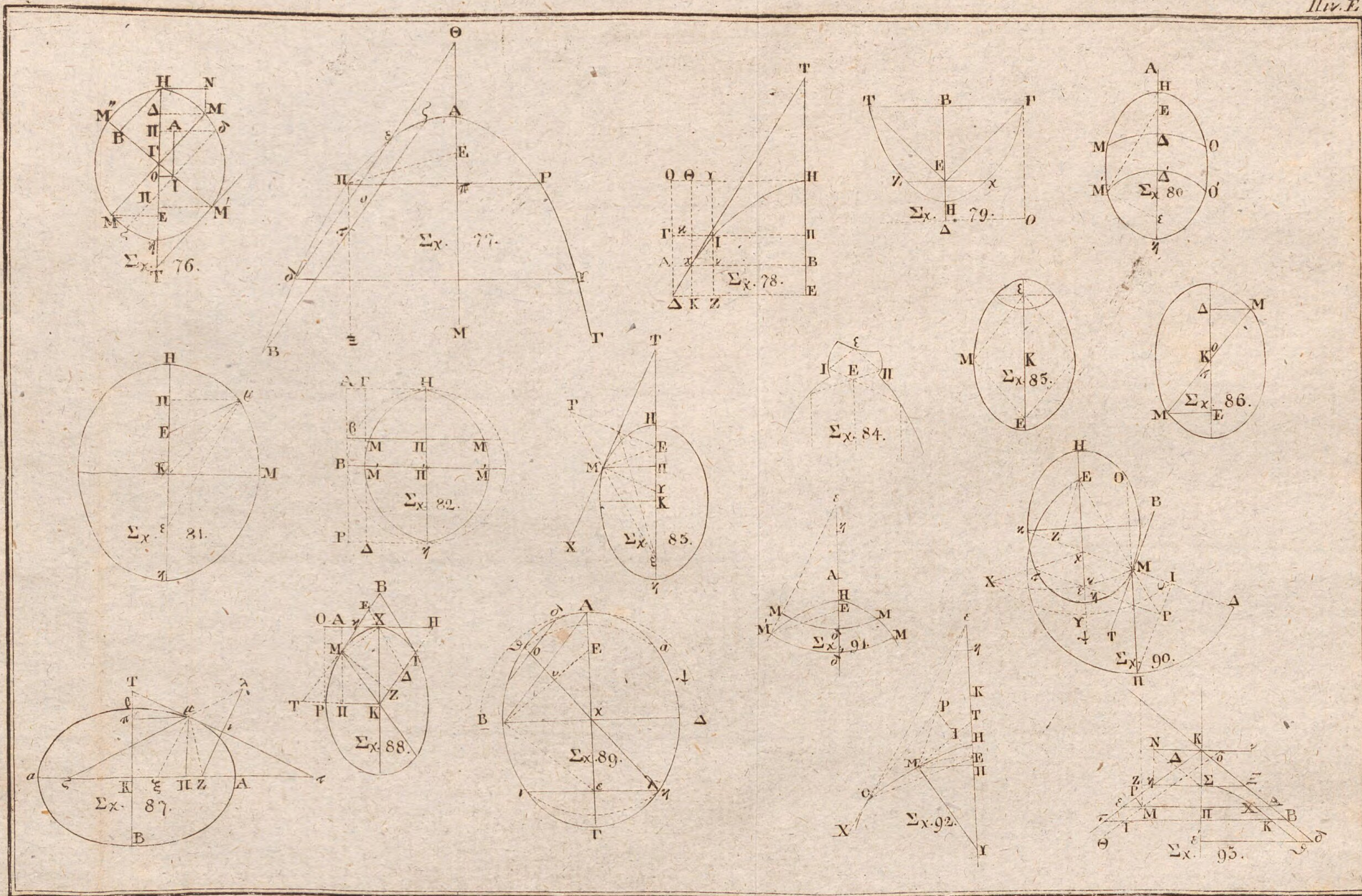
Παρὰ Ιγνατίω Κόεν



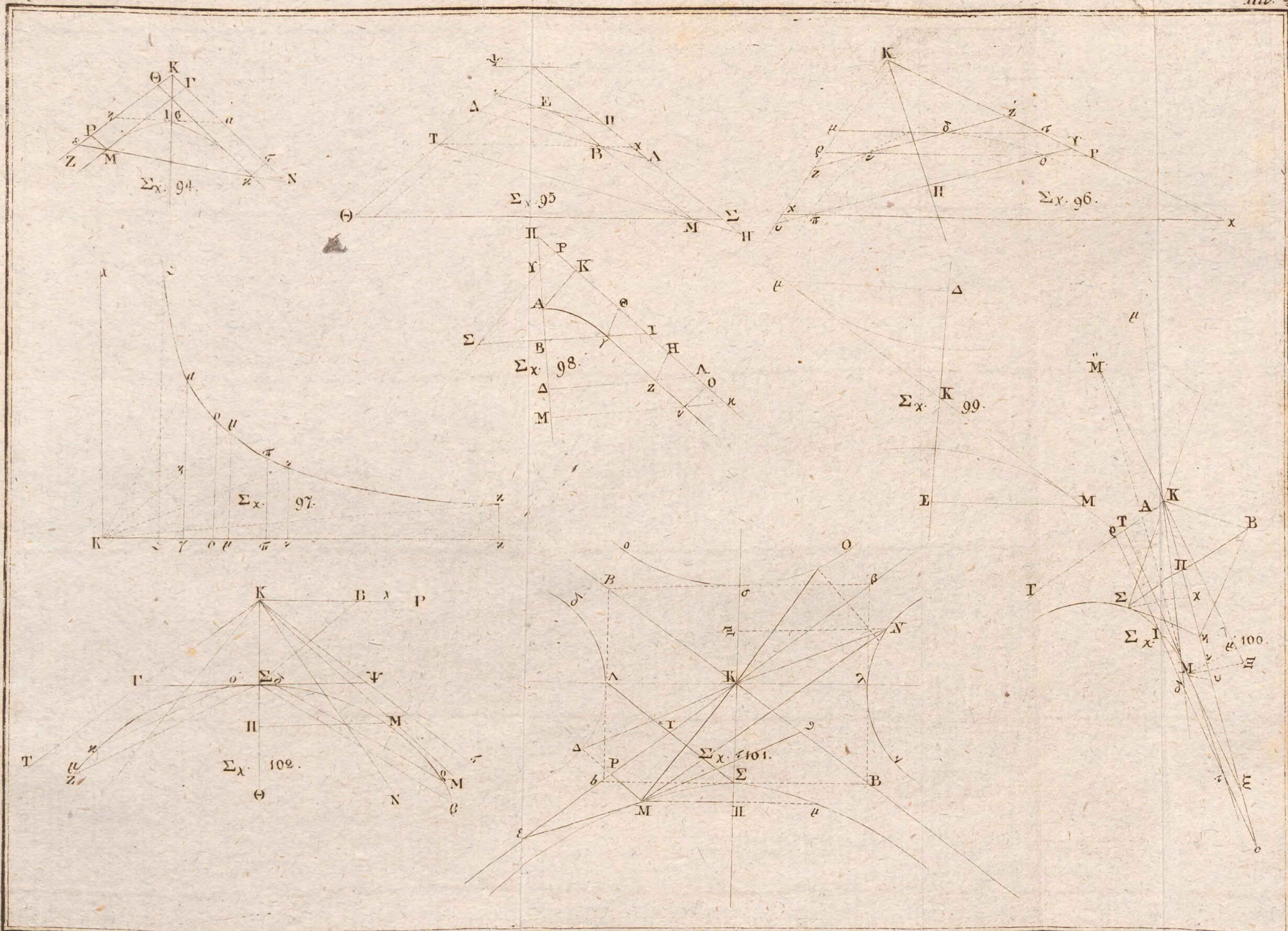
Παρὰ Ἰγνατίῳ Γύζει



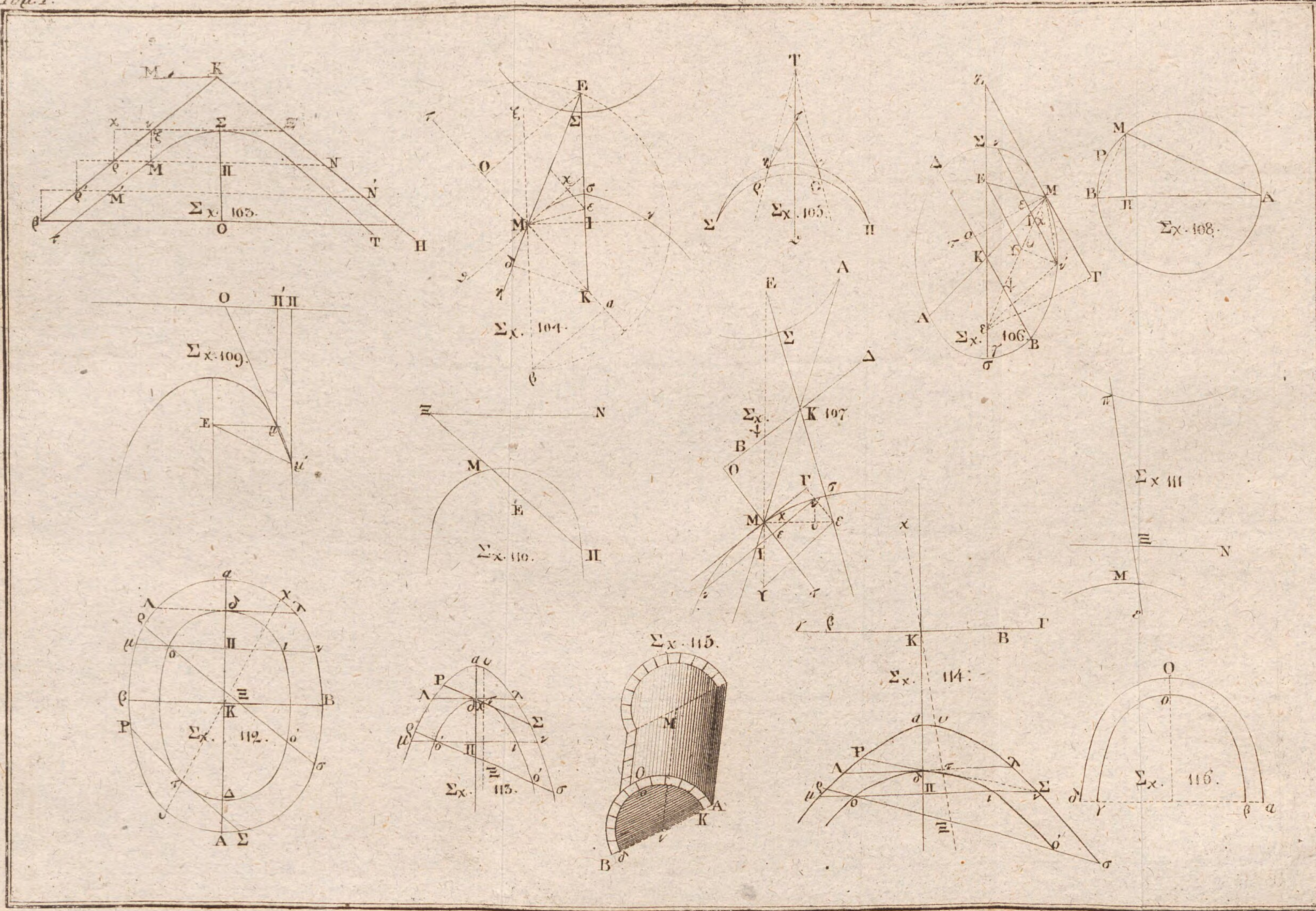
Παρὰ Ἰγνατίῳ



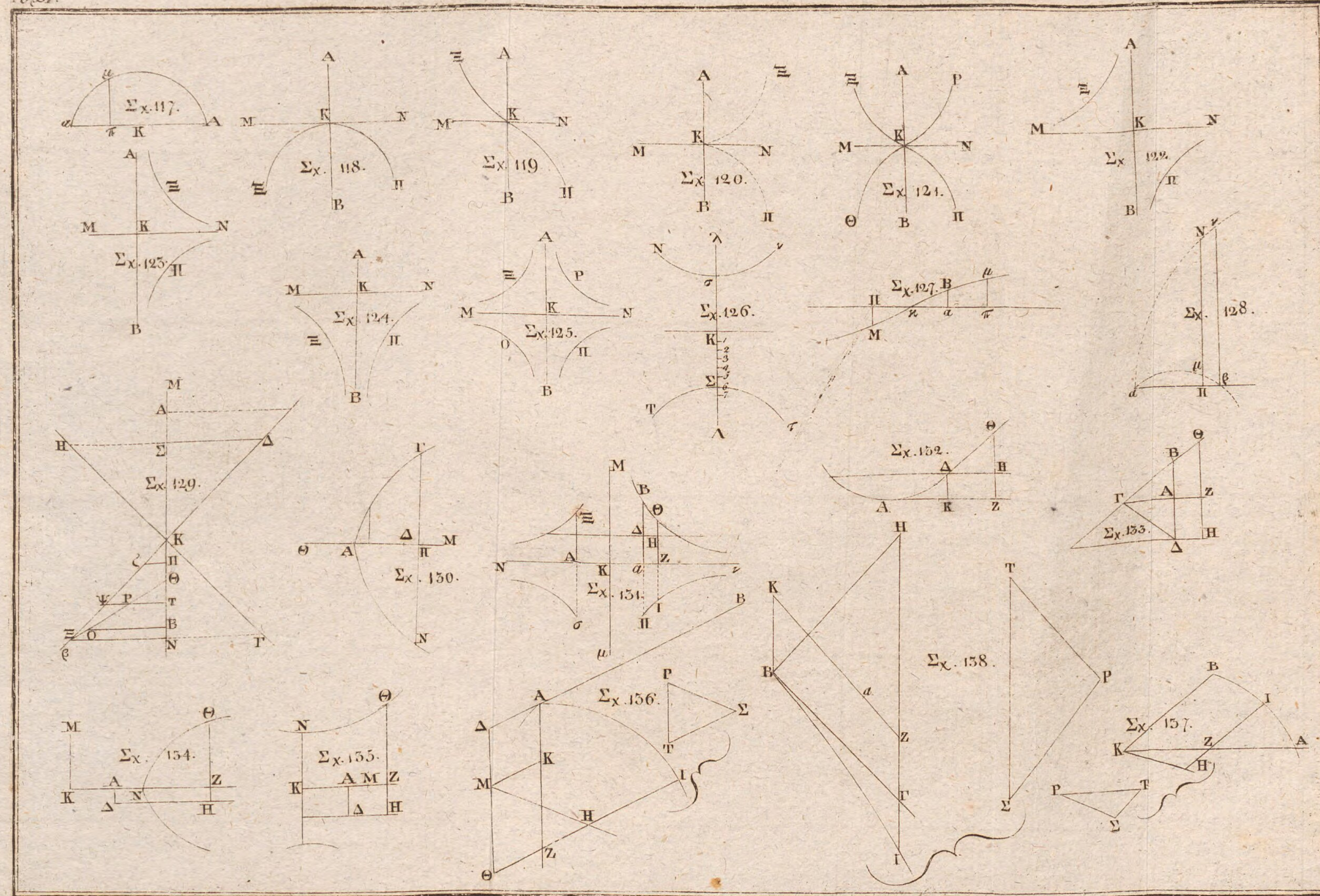
Παρὰ Ιγνατίῳ Κύεν.



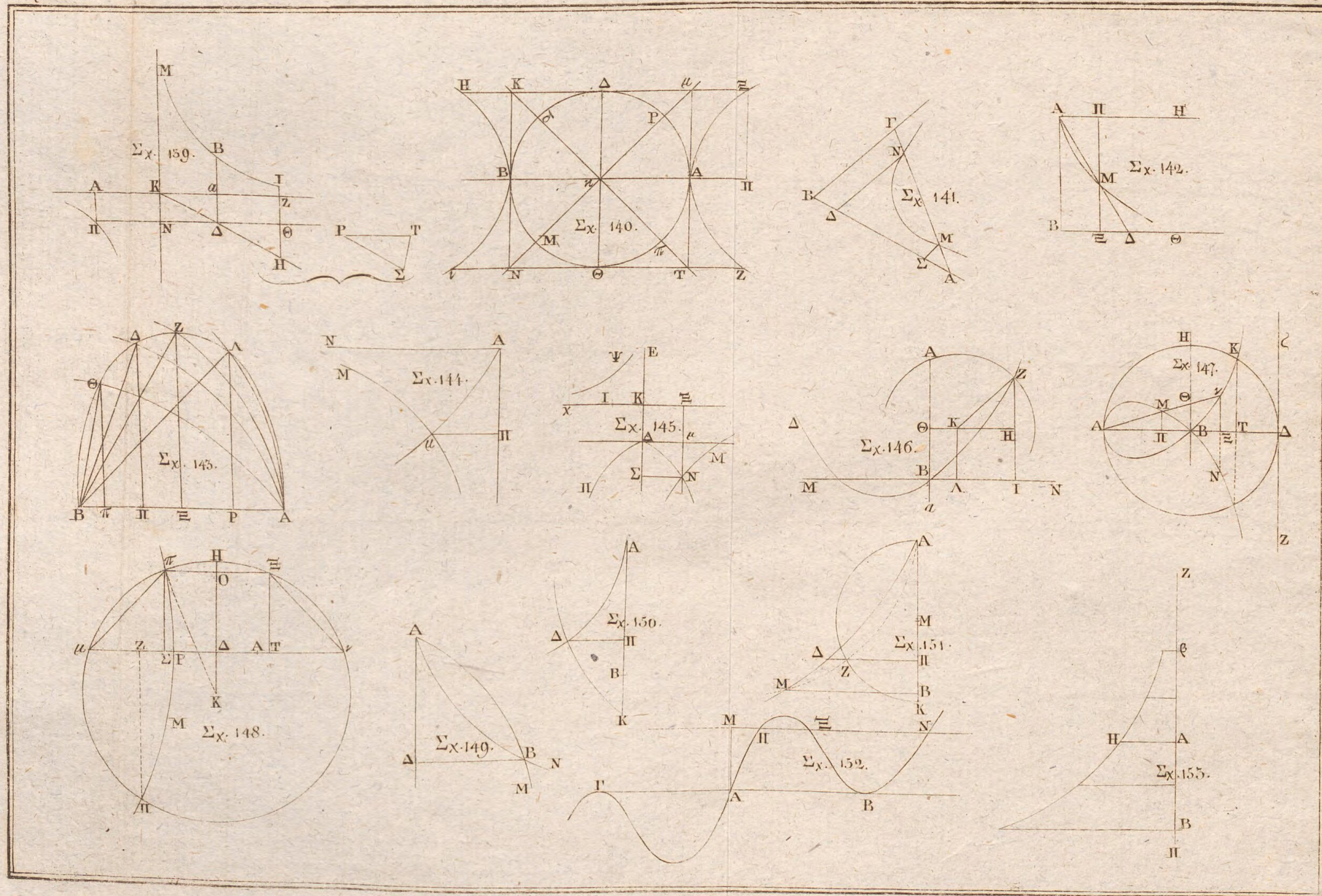
Παρὰ Ἰγνατίω Κυεν.

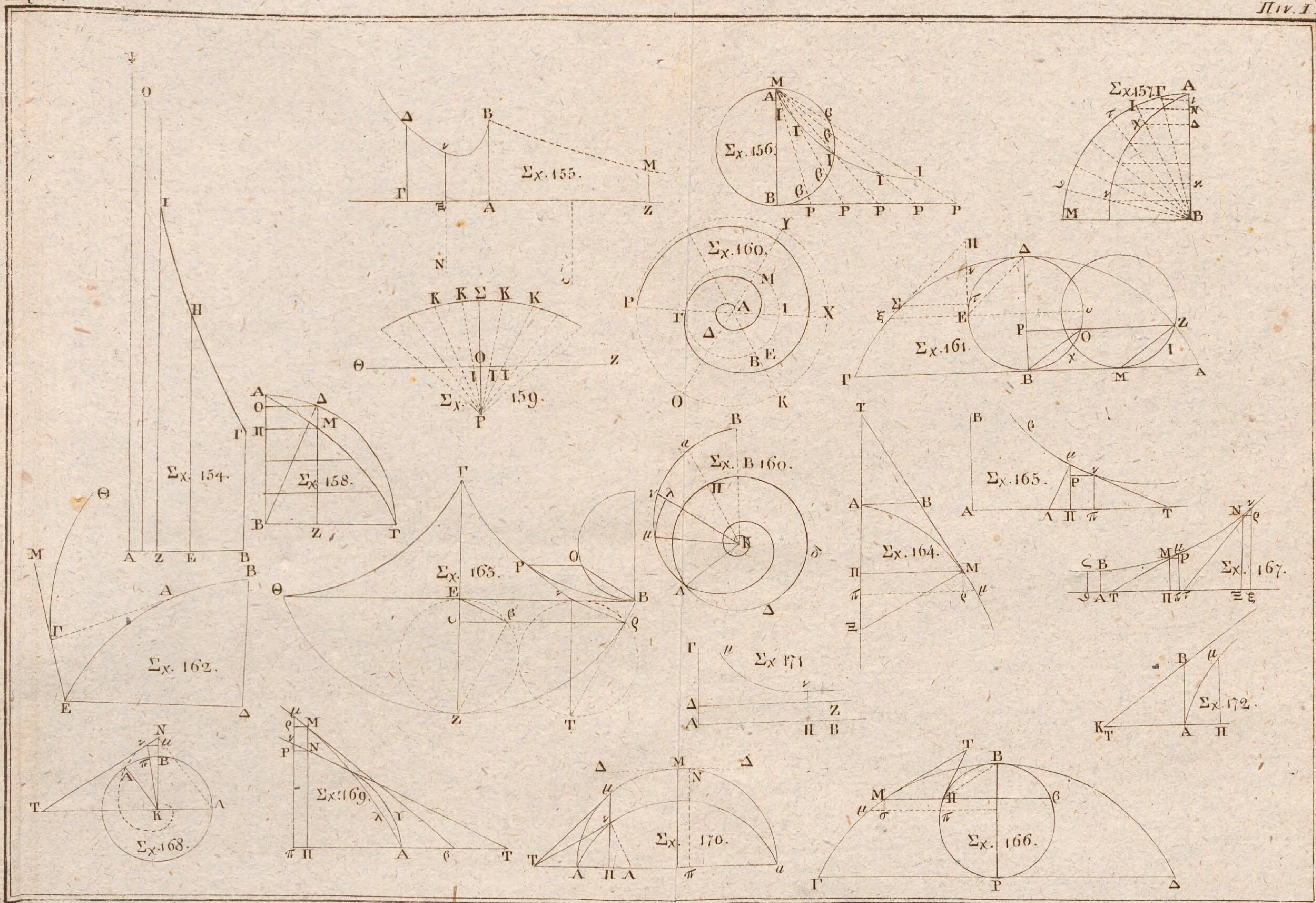


Παρὰ Ἰγνατίῳ Κύεν.



Παρὰ Ἰγνατίῳ Κοέν.


Σχ. 139.
Σχ. 140.
Σχ. 141.
Σχ. 142.
Σχ. 143.
Σχ. 144.
Σχ. 145.
Σχ. 146.
Σχ. 147.
Σχ. 148.
Σχ. 149.
Σχ. 150.
Σχ. 151.
Σχ. 152.
Σχ. 153.


Σχ. 154.
Σχ. 155.
Σχ. 156.
Σχ. 157.
Σχ. 158.
Σχ. 159.
Σχ. 160.
Σχ. 161.
Σχ. 162.
Σχ. B 160.
Σχ. 163.
Σχ. 164.
Σχ. 165.
Σχ. 167.
Σχ. 171
Σχ. 172.
Σχ. 168.
Σχ. 169.
Σχ. 170.
Σχ. 166.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kumas, Kōnstantinos M., 1777-1836

Seiras stoicheioōdus tōn mathēmatikōn kai physikōn pragmateiōn

Bd.: T. 3

en Bienn ē tēs Austrias (1807)

Math.u. 91 m-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594036-4